Les Publications de
l'IREM de BESANÇON

Rallye Mathématique de Franche-Comté

Mai 2003

Action proposée par l'I.R.E.M. de Franche-Comté
(Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques)

avec le concours de l'A.P.M.E.P.
(Régionale de Franche-Comté)
de l'I.U.F.M.
et de l'Inspection Pédagogique Régionale de mathématiques

UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

Presses Universitaires de Franche-Comté

Groupe Rallye

Les Organisateurs du Rallye de Franche-Comté 2003

Françoise de Labachelerie, Lycée Duhamel, Dole
Susana Barata, Lycée Duhamel, Dole
Sylvie Dontenwill, Collège Gérôme, Vesoul
Christine Grandjean, Collège Stendhal, Besançon
Philippe Le Borgne, Iufm de Franche-Comté, Fort-Griffon, Besançon
Michel Magnenet, Professeur honoraire, Besançon
Alain Parmentelat, Lycée Hyacinthe Friant, Poligny
Patrick Walter, Collège Gustave Courbet, Grand-Charmont

IREM de Franche-Comté
Département de Mathématiques
UFR des Sciences et Techniques
16 route de Gray
25030 Besançon cedex
Contact mail :
Philippe.leborgne@fcomte.iufm.fr
http://www-irem.univ-fcomte.fr/rallye/index.htm

Préambule

Un groupe de professeurs de l'IREM de Franche-Comté s'est constitué durant l'année 2002/2003 avec pour objectif d'organiser un rallye mathématique en Franche-Comté. L'expérimentation s'est déroulée en mai 2003, auprès d'une dizaine de classes de troisième et d'une dizaine de classes de seconde des Lycées d'Enseignement Général. Cette brochure, document de travail, regroupe les différentes épreuves (six exercices en classes de troisième et six exercices en classes de seconde dont trois exercices en commun) leurs objectifs spécifiques ainsi que des analyses de productions et des prolongements possibles.

Quels sont les objectifs du Rallye Mathématique de Franche-Comté ?

- Permettre à tous les élèves d'une même classe de s'exprimer et de participer à une activité mathématique.
- Motiver les élèves en posant les problèmes sous forme de jeux, de défis.
- Favoriser l'argumentation et la communication au sein d'une classe.
- Développer chez nos élèves la pratique de la démarche scientifique.
- Permettre la confrontation entre classes de troisième et de seconde.

Quelles sont les modalités ?

Le Rallye de Franche-Comté a pour but de faire participer les élèves des classes de troisième et de seconde des Lycées d'enseignement général de l'Académie de Besançon. La compétition se fait en classe entière et favorise les travaux de groupes. Chaque classe s'organise pour résoudre des exercices en séance d'une heure, afin de produire une seule fiche réponse.

Trois étapes durant l'année scolaire :

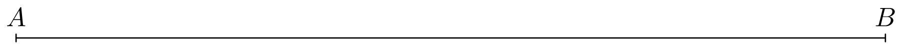
- La période d'entraînement des élèves, organisée par le professeur de la classe, à l'aide des exercices de l'année précédente ou d'autres problèmes.
- La période de qualification. Les classes désireuses de s'impliquer dans une telle démarche s'inscrivent auprès du responsable du groupe Rallye de l'IREM de Franche-Comté avant les vacances de Noël. L'inscription est gratuite, mais la classe s'engage à envoyer sa production, les frais de reprographie sont à la charge de l'établissement. L'épreuve de qualification a lieu courant du mois de février dans l'établissement, le même jour et à la même heure pour toutes les classes inscrites. Chaque classe participante reçoit les exercices proposés par le groupe Rallye. Les dix meilleures productions de chaque catégorie (troisième, seconde) sont retenues pour la phase finale.
- La phase de la finale a lieu courant du mois de mai. Les classes de troisième et de seconde sont regroupées, si possible, dans un secteur géographique de proximité. Les frais de reprographie et de déplacement sont à la charge de l'établissement auquel les classes participantes appartiennent. Dans la limite du budget disponible, des lots sont offerts aux classes présentes aux épreuves de la finale.

Plan du document

Construction avec des allumettes

Énoncé

Pour construire des figures géométriques, on ne dispose que de sept allumettes, chacune mesurant exactement 3 centimètres.
Le but est de placer le milieu d'un segment $[AB]$ de longueur 11,5 centimètres avec pour seuls outils les sept allumettes.



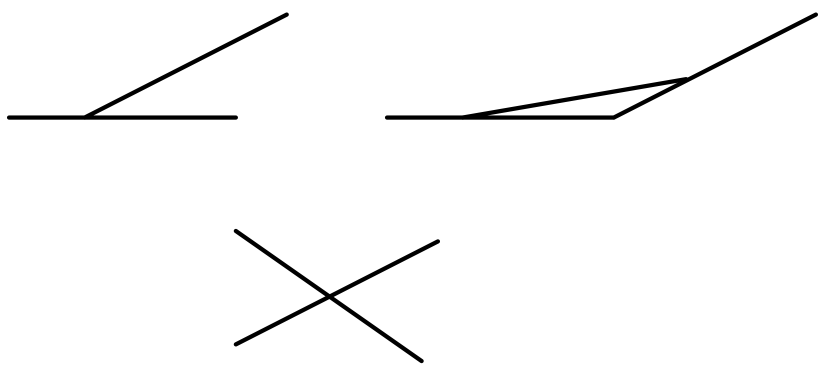
Représentez en couleur la position des sept allumettes sur le dessin de la fiche réponse.

Objectifs et analyse du problème

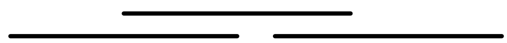
Le but de cet exercice est de faire en sorte que l'élève plonge dans la culture géométrique qu'il a acquise au collège.
Il lui est notamment souhaitable de savoir :

- repérer des configurations mettant en jeu le milieu d'un segment,
- repérer d'autres configurations n'utilisant que des segments de même longueur (triangle équilatéral, losange),
- mettre en évidence un point, ici un milieu, à l'aide de segments,
- procéder par analyse et synthèse (au préalable les élèves vont devoir manipuler leurs segments de 3 cm afin de lister ce qui leur est nécessaire de faire pour résoudre le problème, puis, même si la rédaction n'est pas demandée, les élèves doivent se convaincre mutuellement du résultat).

L'originalité de l'exercice réside dans l'utilisation d'allumettes à la place des instruments géométriques habituels. L'élève doit s'adapter à de nouveaux modes de construction et réfléchir à la validité de ceux qu'il choisit d'utiliser. Ainsi peut se poser la question de la validité d'un point obtenu en « posant » une allumette sur une ou plusieurs autres :

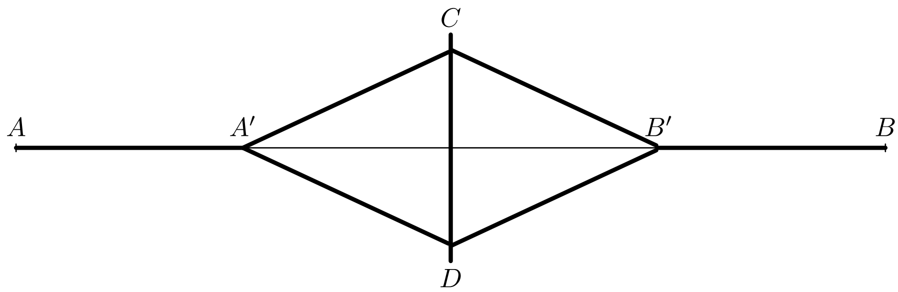


De la même façon, l'alignement de deux points distants de plus de trois centimètres demande, si l'on veut vraiment être rigoureux, l'utilisation d'au moins une tierce allumette :



Dans ce cas de figure, la possibilité de réemployer la troisième allumette une fois l'alignement effectué peut également être prise en compte.
Le cadre d'utilisation de ces allumettes est délibérément laissé flou afin que les élèves s'interrogent et, après discussion, s'accordent sur un mode d'emploi légitimant leur construction.
En ce qui concerne la longueur de 11,5 cm du segment $[AB]$:

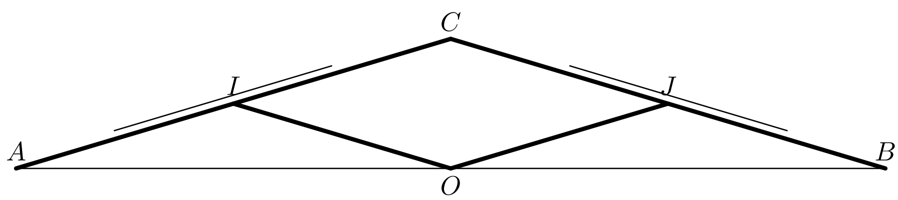
- $AB > 6$ afin que les losanges de côtés 3 cm ne soient pas utilisables d'emblée et $AB < 12$ pour réduire le nombre d'allumettes et de possibilités,
- le nombre maximal d'allumettes est précisé pour que la configuration du losange de côtés 6 cm soit abandonnée de suite (9 allumettes nécessaires au minimum et problèmes d'alignement),
- l'énoncé est en fait basé sur un « rétrécissement » du segment par une allumette en A et une autre en B, ce qui laisse un segment $[A'B']$ de longueur inférieure à 6 cm et 5 allumettes. La configuration du losange de côté 3 cm s'applique alors facilement, on obtient un losange $A'CB'D$.



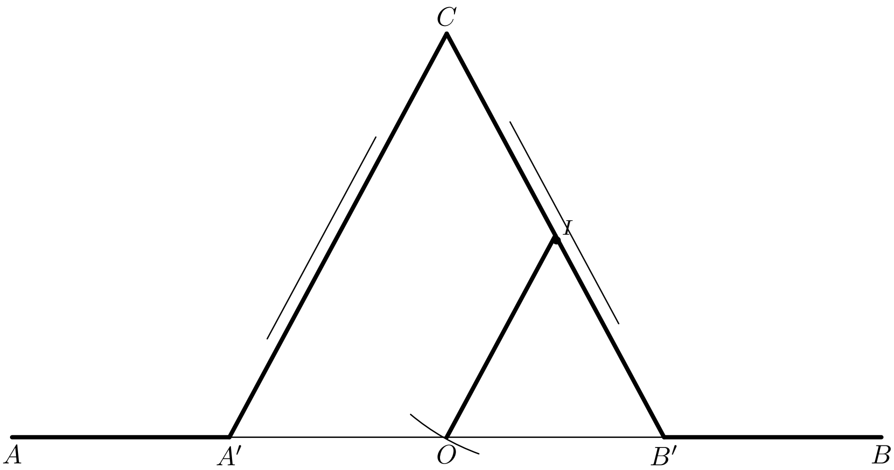
Afin de minimiser le nombre d'allumettes, il faut alors pouvoir lier C et D par une seule allumette. Or, $CD < 3$ si et seulement si $3\sqrt{3} < A'B'$ lorsque $A'B' < 6$ d'où la condition suffisante $11,2 \leqslant AB < 12$. La longueur de 11,5 cm a donc été choisie en fonction de ce type de construction.

Résultats, corrections et analyse

La correction des copies a mis en évidence trois types de construction :
a) le rétrécissement du segment puis l'utilisation d'un losange de côté 3 cm, comme attendu,
b) l'utilisation d'un triangle isocèle de base $[AB]$ puis à nouveau d'un losange de côté 3 cm



c) le rétrécissement du segment suivi d'une configuration rappelant le théorème de Thalès.



Ces deux dernières constructions restent marginales, la démarche attendue ayant été largement majoritaire. Elles utilisent néanmoins l'alignement de deux allumettes, nous avons choisi de supposer l'emploi d'une allumette de soutien pour l'alignement, réemployée pour la suite de la construction.

Correction :

a) La justification de cette construction s'appuie sur la propriété des diagonales d'un losange, qui se coupent en leur milieu.
On peut revérifier le fait que $CD < 3$:
on a exactement $CD = 2\sqrt{3^2 - 2,75^2}$ soit $2,39 < CD < 2,4$.
b) On trace le triangle isocèle ABC de base $[AB]$ tel que $AC = 6$ cm (ce triangle existe).
On note I et J les milieux de $[AC]$ et $[BC]$ (facilement repérables avec les allumettes) et on trace le losange $CJOI$ de côté 3 cm.
On obtient alors une configuration qui est celle du symétriseur.
L'inhabituel pour les élèves dans la justification de cette construction réside dans le fait de démontrer d'abord que les points A, O et B sont alignés, puis enfin que O est le milieu de $[AB]$.
Cela se fait en utilisant, par exemple, les parallélogrammes de la figure (géométriquement ou vectoriellement).
c) On se base à nouveau sur le segment rétréci $[A'B']$ mesurant 5,5 cm.
On trace le triangle isocèle $A'CB'$ de base $[A'B']$ tel que $A'C = 6$ cm et on note I le milieu de $[CB']$.
La construction est achevée en positionnant l'extrémité d'une allumette en I et l'autre extrémité sur le segment $[A'B']$: on obtient le point O milieu de $[AB]$.
La technique utilisée qui consiste à appuyer une allumette sur deux autres peut sembler imprécise et poser un problème de rigueur aux élèves. Nous l'avons considérée valable, estimant que les élèves utilisaient cette allumette comme un compas.
La justification peut tout de même se révéler délicate pour les élèves, qui reconnaissent la configuration du théorème de la droite des milieux mais n'en possèdent pas toutes les hypothèses.

On peut proposer une démonstration en avançant le fait que les triangles $A'CB'$ et OIB' sont isocèles de bases $[A'B']$ et $[OB']$ donc plusieurs angles ont même mesure.
Notamment $\widehat{CA'B'} = \widehat{IOB'}(= \widehat{CB'A'})$ donc les angles $\widehat{CA'B'}$ et $\widehat{IOB'}$ sont correspondants et de ce fait les droites $(A'C)$ et (OI) sont parallèles. La réciproque du théorème de la droite des milieux est alors applicable et O est bien le milieu de $[A'B']$.
Dans une étape de restitution, il peut être intéressant de confronter les élèves à ces deux dernières méthodes et de construire avec eux les démonstrations, les problèmes d'alignement ou de parallélisme non établis pouvant amener des discussions entre groupes d'élèves.
On peut aussi imaginer demander aux élèves d'établir un mode d'emploi précis pour ce jeu d'allumettes et proposer une banque d'exercices simples de constructions, qui amèneraient éventuellement des modifications dans les règles préétablies.
L'intérêt de ce type d'exercice serait par exemple de faire ressentir aux élèves la nécessité de rigueur dans l'utilisation d'une construction géométrique à des fins démonstratrices, aussi imprécis ou grossier que soit le « matériau » utilisé pour sa représentation visuelle.
Enfin, pour rendre la manipulation réelle et plus ludique, on peut également fabriquer un jeu d'allumettes de 3 cm exactement, comme cela avait été réalisé par l'un des professeurs lors de l'expérimentation de cet exercice.

Quand 2003 se plie en 4

Énoncé

Le 31 décembre 2002 au soir, le programme qui gère l'illumination de la tour Eiffel est pris d'un virus hors du commun : la quadrimania !
Il refuse d'utiliser tout chiffre qui n'est pas un 4, mais permet tous les calculs habituels que l'on trouve sur une calculatrice : addition/soustraction, multiplication/division, puissance, racine carrée, parenthèses, etc.
Pour ne pas décevoir les milliers de personnes qui attendent la nouvelle année devant la tour, ainsi que les millions de téléspectateurs, l'informaticien propose, dans l'urgence, le calcul suivant :

$$\frac{4444-444}{\sqrt{4}}+4-\frac{4}{4}$$

Auriez-vous été capable de programmer à votre tour l'affichage du nombre 2003, en utilisant le moins de chiffres 4 possible ? Proposez alors un affichage.

Objectifs et bilan des procédures

D'une part cet exercice est accessible à tous les élèves et d'autre part, il constitue un problème ouvert : après avoir trouvé une solution, les élèves ne sont pas sûrs que ce soit la meilleure.

Objectifs :

C'est l'occasion de faire du calcul mental, d'estimer des ordres de grandeur, de travailler les différentes écritures d'un nombre (somme, produit, puissance..)

Solutions proposées par les élèves :

$44^2+4^3+4-4/4$:	solution ne respectant pas la contrainte de n'utiliser que le chiffre 4.
$4\times4\times4+44\times44+4-4/4$:	dans cette solution , les élèves n'utilisent que les opérations « de base » : addition, soustraction, multiplication et division, mais pas les racines carrées et les puissances.
$4^4\times4\times\sqrt{4}-444/4$:	nous n'avons pas trouvé de meilleure solution que celle-ci, (utilisant moins de 8 fois le chiffre 4), ni la façon de montrer qu'il n'en existe pas de meilleure : le problème reste ouvert...

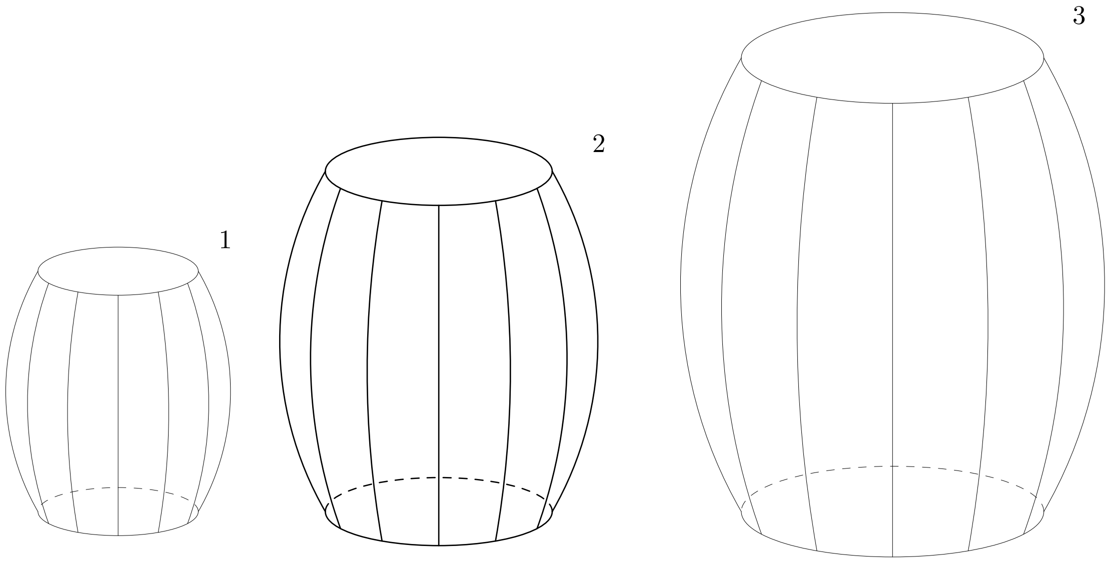
Exploitation ultérieure :

Utiliser les différentes écritures produites, les comparer, travailler sur les parenthèses, les règles de priorité...
Relancer le problème avec un autre nombre (3 , 7...)

Les tonneaux

Énoncé

Trois tonneaux ont des mesures proportionnelles.
On les a représentés en perspective avec la même échelle.
Le tonneau central a une capacité de 230 ℓ.



Évaluez la capacité des deux autres tonneaux.
Expliquez la démarche que vous avez utilisée et précisez vos calculs.

Objectif et correction

Cet exercice rompt le contrat habituel : il faut prendre les informations sur le dessin !
La connaissance de la proportionnalité est utile ; une des erreurs fréquentes est de croire à la proportionnalité des capacités des trois tonneaux. Les connaissances concernant les rapports de volumes doivent être disponibles.

Objectif

Faire le lien entre les représentations des tonneaux, les dimensions, les rapports de leurs volumes.

Solution

En notant h_1, h_2 et h_3 les hauteurs des trois tonneaux représentés sur le dessin V_1, V_2 et V_3 les capacités en litres des trois tonneaux, on a

$$V_1 = V_2 \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^3 \quad V_3 = V_2 \left(\frac{h_3}{h_2}\right)^3$$

L'échelle étant conservée, les rapports $\frac{h_1}{h_2}$ et $\frac{h_3}{h_2}$ peuvent être évalués à partir du dessin. On a

$$\frac{h_1}{h_2} \approx \frac{1,7}{2,4}\ , \quad \frac{h_3}{h_2} \approx \frac{3,2}{2,4} \quad \text{et} \quad \mathrm{V}_1 \approx 80\,\ell \quad \mathrm{V}_3 \approx 550\,\ell$$

Remarque : une imprécision de 5.10^{-2} cm sur les longueurs entraîne une erreur relative de 10 %.

Productions

Procédures utilisant la proportionnalité pour modéliser les rapports de capacité, les données sont parfois traitées à l'aide d'un tableau de proportionnalité.

Evaluation de la capacité du tonneau 1 : 162,35 L environ
Evaluation de la capacité du tonneau 3 : 304,41 L environ

Evaluation de la capacité du tonneau 1 : 164 L
Evaluation de la capacité du tonneau 3 : 302 L

	1	2	3
hauteur du tonneau en cm	2,5	3,5	4,6
contenance en L	164	230	302

Productions justes, la première production ci-dessous exprime les rapports des volumes à l'aide d'un nombre rationnel.

Evaluation de la capacité du tonneau 1 : environ 84 L $\left(230 \times \left(\frac{5}{7}\right)^3\right)$
Evaluation de la capacité du tonneau 3 : environ 489 L $\left(230 \div \left(\frac{7}{9}\right)^3\right)$

Evaluation de la capacité du tonneau 1 : $\frac{230}{1,4^3} \simeq 83,8$ L
Evaluation de la capacité du tonneau 3 : $83,8 \times 1,8^3 \simeq 488,8$ L

Dans la production suivante, le tonneau est remplacé par un cylindre ce qui révèle une excellente analyse de la situation.

Evaluation de la capacité du tonneau 1 : ≃ 57 L

Evaluation de la capacité du tonneau 3 : ≃ 541 L

En considérant que le tonneau est un cylindre ; il faut commencer par chercher l'échelle :

Capacité du tonneau 2 : 230 L

Mesure du rayon ≃ Diamètre ÷ 2 ≃ 2,4 ÷ 2 ≃ 1,2 cm

Mesure de la hauteur ≃ 3,4 cm

soit x l'échelle

$230 = x\,(R^2 \times \pi \times h)$

$230 = x\,(1{,}2^2 \times \pi \times 3{,}4)$

$230 = x\,(1{,}44 \times \pi \times 3{,}4)$

$\dfrac{230}{1{,}44 \times \pi \times 3{,}4} = x$

$\boxed{x \simeq 14{,}96}$ → coefficient de proportionnalité

Evaluation de la capacité du tonneau 1 :

$14{,}96\,(R^2 \times \pi \times h)$

Mesure du rayon ≃ 0,6 cm

Mesure de la hauteur ≃ 2,4 cm

$14{,}96\,(0{,}6 \times 0{,}6 \times \pi \times 2{,}4)$

$\boxed{\simeq 57\text{ L}}$

Evaluation de la capacité du tonneau 3 :

$14{,}96\,(R^2 \times \pi \times h)$

Mesure du rayon ≃ 1,6 cm

Mesure de la hauteur ≃ 4,5 cm

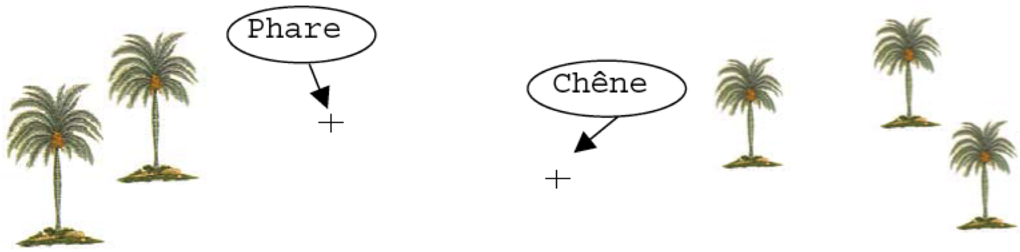
$14{,}96\,(1{,}6 \times 1{,}6 \times \pi \times 4{,}5)$

$\boxed{\simeq 541\text{ L}}$

SOS pour pirate manchot

Énoncé

Le pirate anglais Pad Barb tient sa vengeance, il a enfin localisé la cache secrète de son ennemi juré, le corsaire français Naquinheuil.
Il lui suffit de trouver sur sa carte la position symétrique du phare de l'Ile des Mouettes par rapport au vieux Chêne des Pendus.
Mais il y a un os : le pirate a perdu un bras lors de son dernier affrontement avec Naquinheuil, il ne peut donc pas utiliser de règle et n'a que son vieux compas à sa disposition.



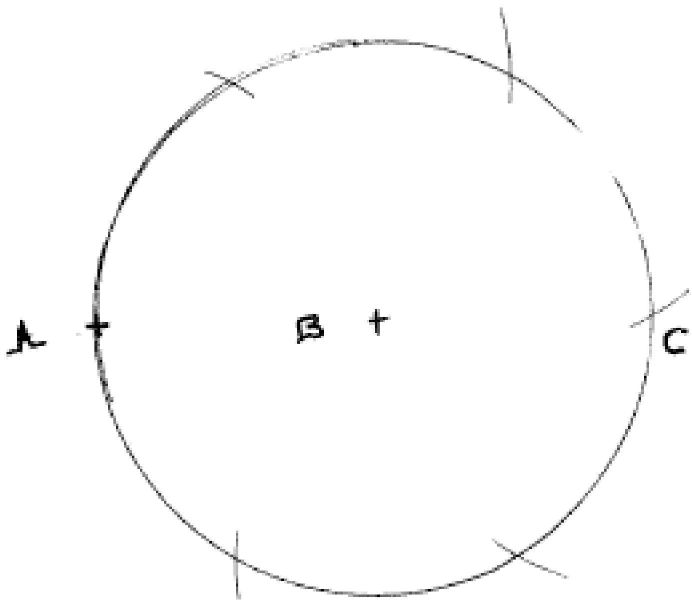
Aidez-le à trouver une méthode pour débusquer sur sa carte la cachette de son ennemi.
(On prendra soin de laisser les arcs de cercles utiles à la construction sur la fiche réponse)

Objectifs et description de l'énoncé

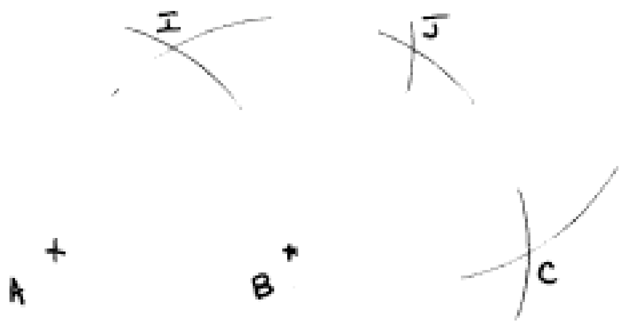
L'énoncé est rédigé de façon à rendre le cadre de l'exercice plus « exotique » mais se base en réalité sur un problème classique de construction au compas seul : connaissant deux points A et B, construire le symétrique C de A par rapport à B.
Si l'on omet le tracé des côtés, le panel de figures constructibles au compas seul est assez large (cercle, parallélogramme, triangle ...) donc l'élève est à nouveau appelé à puiser dans les configurations connues et à manipuler avant de valider sa réalisation (démarche d'analyse - synthèse).

Résultats, correction et analyse

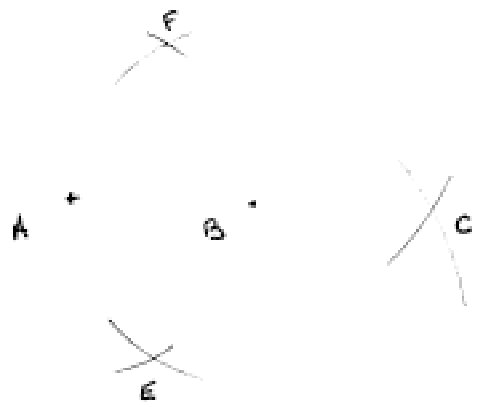
Cet exercice a obtenu 100 % de bonnes réponses, avec quatre types de construction :
a) la majorité s'appuie sur la construction d'un cercle de centre B passant par A et d'un hexagone régulier inscrit dans ce cercle,



b) quelques réponses reposent sur le même principe mais à partir d'un demi-cercle seulement,



c) une réponse originale n'utilise que des triangles équilatéraux.



Correction :

a) Pour ce qui est de l'hexagone régulier, on peut juger connu le fait que le centre de son cercle circonscrit est centre de symétrie du polygone, donc le sommet C opposé à A est bien son symétrique par rapport à B.
b) Dans ce cas de figure, seul le demi-cercle de centre B est tracé à partir de A, puis le rayon est reporté trois fois, ce qui revient en fait à tracer trois triangles équilatéraux isométriques.
Il peut sembler nécessaire alors de démontrer l'alignement des points A, B et C.
Cela se fait aisément en invoquant les parallélogrammes de la figure ou tout simplement en montrant que la somme des angles au centre vaut 180°.
c) On trace deux triangles équilatéraux de côté [AB] : on obtient le losange AEBF, puis on trace le triangle équilatéral EFC afin d'obtenir le point C.
Dans un premier temps, il faut justifier l'alignement des points A, B et C : en fait, ils sont tous les trois équidistants des extrémités du segment [EF] donc ils appartiennent tous les trois à la médiatrice de ce segment.
Ensuite, il reste à montrer que B est le milieu de [AC], ce qui peut se faire par détermination de longueurs égales : on pose AB $= d$ et on note I le point d'intersection des diagonales du losange. Alors, puisque les diagonales se coupent perpendiculairement en leur milieu, I est également le pied de le la hauteur issue de E dans le triangle équilatéral AEB.
On en déduit que EI $=\dfrac{\sqrt{3}}{2}d$ donc EF = 2EI $=\sqrt{3}d$.
I est également le pied de la hauteur issue de C dans le triangle équilatéral ECF donc, de la même façon, IC $=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3}d = \dfrac{3}{2}d$ et, finalement, BC = IC − IB $= \dfrac{3}{2}d - \dfrac{1}{2}d = d =$ AB.
Cette dernière construction présente un intérêt certain pour une confrontation entre élèves lors d'une recherche ultérieure (en cours ou à la maison) de démonstration.

Trio de tête

Énoncé

On procède à l'élection du président d'un club comptant 48 membres.
Il y a trois candidats : Jacques, Michel et Richard.
Chaque électeur classe les trois candidats dans son ordre de préférence sur son bulletin de vote.
Le mode de scrutin retenu consiste à élire le candidat cité en première position le plus grand nombre de fois.
En cas d'ex æquo, le candidat cité le plus grand nombre de fois en deuxième position est élu.
Au dépouillement, on constate qu'il y a au moins un bulletin de vote pour chacun des six classements possibles. De plus :
– Jacques a été plus souvent classé devant Michel que Michel devant Jacques.
– Michel a été plus souvent classé devant Richard que Richard devant Michel.
A la surprise générale, Richard remporte l'élection.
Donnez un exemple de répartition des 48 votes correspondant à cette situation.

Objectifs de l'exercice

1) Faire comprendre la définition du mode de scrutin et parvenir à la liste des six bulletins possibles.
2) Faire découvrir aux élèves, comment, en partant d'une répartition équilibrée ou presque équilibrée, on peut par tâtonnement aboutir à une solution correcte, vérifiant les contraintes de l'énoncé.
3) Faire percevoir aux élèves l'imperfection de ce mode de scrutin, qui semblait pourtant séduisant dans sa définition.

Une solution possible

Bulletins	Nombre
Richard-Jacques-Michel	10
Jacques-Richard-Michel	6
Michel-Jacques-Richard	8
Richard-Michel-Jacques	7
Michel-Richard-Jacques	7
Jacques-Michel-Richard	10

1. Richard est cité 17 fois en tête, Jacques est cité 16 fois et Michel 15 fois. Richard est donc élu.
2. Richard a été cité 23 fois devant Michel, mais 25 fois derrière Michel.
3. Jacques a été cité 26 fois devant Michel et 22 fois derrière Michel.

Il semblerait donc que :
D'après 2. , Michel soit préféré à Richard
D'après 3. , Jacques soit préféré à Michel
Pourtant, Richard est élu d'après 1. N'y-a-t-il pas là un résultat paradoxal ?

En fait, c'est le mode de scrutin que l'on doit mettre en cause. Les choix effectués par les électeurs ne sont pas de même importance : ce qui compte avant tout, c'est le choix du candidat que nous mettons en première position.
Plus précisément, dans les 23 fois où Richard a été cité avant Michel, il y a 17 premières places alors que dans les 25 fois où Michel a été cité devant Richard , il n'y a que 15 premières places. Finalement, cet écart de deux premières places est plus important que par exemple, l'écart de 4 entre les cas où Richard et Michel ont été placés en 2e et 3e position.
Mathématiquement, on dit que **les choix ne sont pas transitifs** : les faits que Jacques soit préféré à Michel et que Michel soit préféré à Richard n'impliquent pas que Jacques soit préféré à Richard (24 contre 24 dans notre exemple)
C'est le philosophe et mathématicien **Condorcet** (1743-1794) qui a le premier mis en évidence ces paradoxes et conclut qu'il n'existait pas de procédé parfaitement équitable de vote.
Pour une étude approfondie des différents systèmes électoraux avec leurs qualités et leurs défauts, n'hésitez pas à consulter le numéro 84 de la revue « Tangente » et le numéro 294 de « Pour la science ».

Pneu à pneu on fait sa route ...

Énoncé

Quelle distance peut-on parcourir avec une voiture disposant de 7 pneus neufs, sachant que chaque pneu peut faire 40 000 km ?

Objectifs

L'énoncé est court, drôle, éveille la curiosité. Il semble facile mais il nécessite un raisonnement et une justification : une fois que l'on a obtenu une distance à parcourir avec les 7 pneus, il reste à vérifier qu'il s'agit de la plus grande possible. Il n'y a pas de méthode évidente ni de contenu mathématique apparent.
Les objectifs sont donc les suivants :
1) Apprendre à développer une stratégie permettant de résoudre un problème à plusieurs contraintes. Savoir respecter des contraintes et les utiliser de façon optimale.
2) Formuler clairement son raisonnement.

Solution

Une idée pour résoudre le problème : en effectuant des changements successifs d'un pneu parmi 4, on répartit l'usure due à la distance parcourue sur l'ensemble des pneus.
En changeant un pneu tous les 10000 km comme le suggère le tableau ci-dessous, au bout du septième changement tous les pneus ont parcouru 40000 km, on peut donc parcourir 70000 km.
Dans le tableau figurent les kilomètres parcourus par chacun des pneus utilisés au moment du changement.

	Pneu 1	Pneu 2	Pneu 3	Pneu 4	Pneu 5	Pneu 6	Pneu 7
1^{er} changement	10000	10000	10000	10000			
2^{e} changement		20000	20000	20000	10000		
3^{e} changement			30000	30000	20000	10000	
4^{e} changement				40000	30000	20000	10000
5^{e} changement	20000				40000	30000	20000
6^{e} changement	30000	30000				40000	30000
7^{e} changement	40000	40000	40000				40000

L'analyse des productions révèle une grande richesse dans la formulation des démarches. Certains groupes ont pris beaucoup de soin pour communiquer celle-ci.

Typologie des productions

1) Pas de permutation des pneus

La distance que l'on peut parcourir est : 40.000 km

Votre démarche : la voiture peut parcourir 40.000 km car on a au départ 4 pneus qui roulent en même temps donc ils s'usent tous les 4 en même temps. On a 7 pneus au départ donc il n'en reste que 3, et la voiture ne peut pas rouler avec 3 pneus.

2) Réponse qui n'optimise pas l'utilisation des pneus

La distance que l'on peut parcourir est : 60 000 km au max

Votre démarche : On parcourt 20 000 km avec 4 pneus neuf puis on change 3 et on parcourt 20 000 km à nouveau et on change le pneu qui est totalement usé et on refait 20 000 km (après trop de pneus usés)

3) Production sous la forme d'une narration

Dans les deux productions ci-dessous, on cherche déjà à utiliser un train de pneus sur 30000 km, on utilise ensuite les trois pneus restant avec en complément un pneu usé pendant 10000 km. On répète l'opération 4 fois.

La distance que l'on peut parcourir est : 70000 km.

Votre démarche : Nous utilisons 4 pneus afin de rouler sur une distance de 30000 km. Puis nous utilisons les 3 pneus qui n'ont pas encore été utilisé et nous ajoutons 1 pneu l'ancien (qui a roulé durant les 30000 km). Ceux-ci roulent durant 10000 km. Au bout de ces 10000 km nous changeons l'ancien (qui ne peut désormais plus rouler car il a effectué 40000 km) et nous le remplaçons par l'un des autres premiers pneus. On répète cette opération encore 2 fois de suite jusqu'à ce que tous les pneus soient usés. Nous avons effectué 70000 km

7 - Enchaînement d'entiers

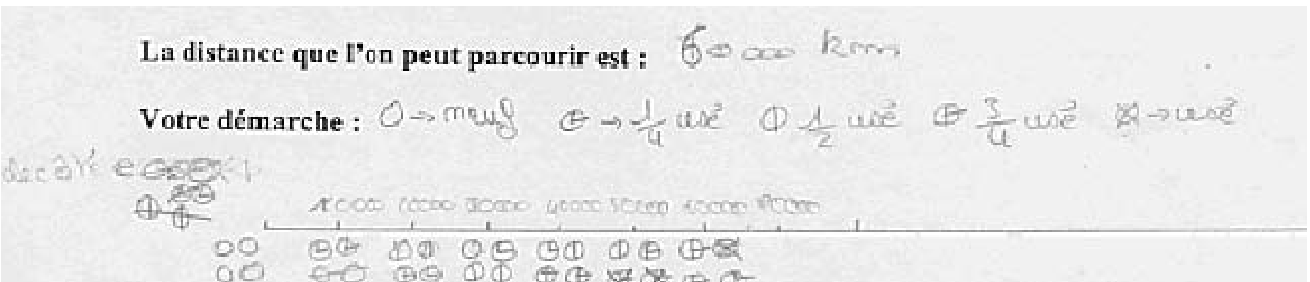
La distance que l'on peut parcourir est : 70 000 km.

Votre démarche :

- On effectue 30 000 km avec quatre pneus neufs
- On enlève trois pneus ayant effectués 30000 km pour remettre les trois pneus neufs restant.
- Il reste alors 10000 km à parcourir aux 4 pneus ayant déjà effectués 30000 km chacun.
- Nous roulons 10000 km avant de changer de pneus usé qui vient alors d'effectuer 40000 km
- Il reste alors 30 000 km à faire avec les pneus changés recemment
- Nous changeons alors, le pneu usé pour le remplacer par un pneu ayant roulé 30 000 km.
- Nous roulons encore 10000 km avant que le pneu changé ne soit usé.
- des trois pneus changés au début peuvent encore effectuer 20000 km.
- On change ~~un~~ le pneu ayant roulé 40000 km pour le remplacer par un pneu qui a déjà effectué 30000 km.
- Au bout de ~~3~~ 10000 km le pneu est alors usé et nous le remplaçons par le dernier pneu ayant effectué 30000 km au début
- les 4 pneus montés sur la voiture n'ont alors plus que 10000 km chacun à parcourir avant d'être usés
- Nous parcourons les 10000 km et tous nos pneus sont alors usés

4) Utilisation de représentations symboliques

Ici, le codage symbolise l'état d'usure des pneus.



Dans la production ci-dessous, le changement d'un pneu tous les 10000 km répartit la distance parcourue sur les 7 pneus. L'utilisation de ce tableau, témoigne d'une compréhension « globale » de la situation et fournit des éléments de contrôle sur les différents paramètres (kilomètres parcourus, gestion de l'usure des pneus).

La distance que l'on peut parcourir est : 70 000 km

Votre démarche : Soit A, B, C, D, E, F, G les 7 pneus.
Un roulement est égal à 10 000 km.

1er roulement	A	B	C	D			
2ème roulement		B	C	D	E		
3ème roulement			C	D	E	F	
4ème roulement				D	E	F	G
5ème roulement	A				E	F	G
6ème roulement	A	B				F	G
7ème roulement	A	B	C				G

Les élèves utilisent parfois des représentations littérales...

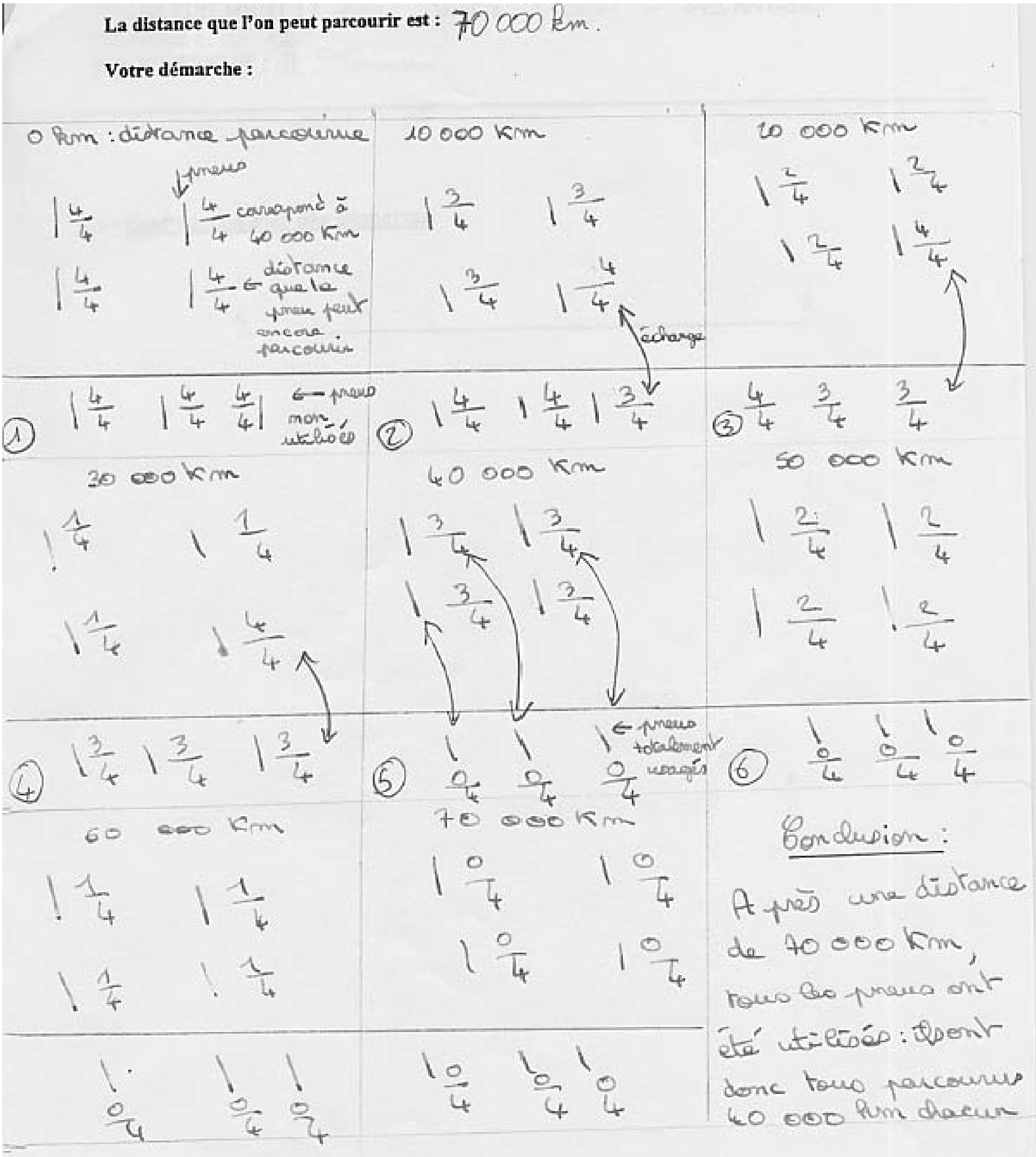
La distance que l'on peut parcourir est : 70 000 Km

Votre démarche : Nous prenons les 7 pneus : a ; b ; c ; d ; e ; f ; g.

Si la combinaison a ; b ; c ; d fait 10 000 Km | a ; b ; c font 40 000 Km.
" " " a ; b ; c ; e " 10 000 Km | d ; e ; f ; g font 30 000
" " " a ; b ; c ; f " 10 000 Km | + 30 000
" " " a ; b ; c ; g " 10 000 Km

40 000 + 30 000 = 70 000

Les fractions représentent l'état du pneu (la fraction de « non-usure » !)



La distance que l'on peut parcourir est : 70 000 km.

Votre démarche :

0 km : distance parcourue	10 000 km	20 000 km
pneus; $\frac{4}{4}$ $\frac{4}{4}$ $\frac{4}{4}$ $\frac{4}{4}$; $\frac{4}{4}$ correspond à 40 000 km; $\frac{4}{4}$ ← distance que le pneu peut encore parcourir	$\frac{3}{4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{4}$; échange	$\frac{2}{4}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{4}{4}$
① $\frac{4}{4}$ $\frac{4}{4}$ $\frac{4}{4}$ ← pneus non utilisés	② $\frac{4}{4}$ $\frac{4}{4}$ $\frac{3}{4}$	③ $\frac{4}{4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{4}$
30 000 km: $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{4}{4}$	40 000 km: $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{4}$	50 000 km: $\frac{2}{4}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{2}{4}$
④ $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{4}$	⑤ $\frac{0}{4}$ $\frac{0}{4}$ $\frac{0}{4}$ ← pneus totalement usagés	⑥ $\frac{0}{4}$ $\frac{0}{4}$ $\frac{0}{4}$
60 000 km: $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$	70 000 km: $\frac{0}{4}$ $\frac{0}{4}$ $\frac{0}{4}$ $\frac{0}{4}$	Conclusion : Après une distance de 70 000 km, tous les pneus ont été utilisés : ils ont donc tous parcourus 40 000 km chacun
$\frac{0}{4}$ $\frac{0}{4}$ $\frac{0}{4}$	$\frac{0}{4}$ $\frac{0}{4}$ $\frac{0}{4}$	

Prolongements

Et que se passe-t-il si les pneus peuvent parcourir 50000 km ?
Et si nous disposons de 5, 6 pneus ?

Enchaînement d'entiers

Énoncé

On considère un nombre entier n compris entre 2 et 99.
En partant de n, on construit une chaîne de nombres de la façon suivante :
- si un nombre k de la chaîne est pair, le suivant s'obtient en divisant k par 2,
- si un nombre k de la chaîne est impair, le suivant s'obtient en multipliant k par 3 et en ajoutant 1.
La longueur de la chaîne est le nombre d'entiers nécessaires pour atteindre le nombre 1.
Exemple en prenant n = 20 :
20 - 10 - 5 - 16 - 8 - 4 - 2 - 1 est une chaîne de longueur 8.
Attention, les nombres utilisés dans chaque chaîne ne peuvent s'écrire qu'avec 1 ou 2 chiffres.
Quel est le nombre compris entre 2 et 99 qui possède la chaîne la plus longue ? Donnez sa chaîne complète.

Objectifs

D'une part cet exercice est accessible à tous, et d'autre part il présente un aspect culturel intéressant ; en effet, il a été construit à partir de la suite de Syracuse définie de la manière suivante :

$$\begin{cases} \text{Soit } u_0 \text{ un entier naturel non nul quelconque} \\ \text{Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*, \\ \qquad \text{si } u_n \text{ est pair,} \quad u_{n+1} = u_n \times 0,5 \\ \qquad \text{si } u_n \text{ est impair,} \quad u_{n+1} = 3u_n + 1 \end{cases}$$

Il semblerait que quel que soit l'entier u_0 choisi, l'on finisse toujours par aboutir au nombre 1 , (puis au cycle 4 - 2 - 1). Mais ce problème (toutes les chaînes aboutissent-elles à 1 ?), posé en 1950 à l'université américaine de Syracuse, n'a pas encore été résolu : d'où son nom de **conjecture de Syracuse.**

Solution :

La chaîne la plus longue commence à 50 : 50 – 25 – 76 – 38 – 19 – 58 – 29 – 88 – 44 – 22 – 11 – 34 – 17 – 52 – 26 – 13 – 40 – 20 – 10 – 5 – 16 – 8 – 4 – 2 – 1

Démarche utilisée par les élèves

(ils ont tous trouvé la solution) :
- ils ont éliminé certains types de nombres
- ils ont testé les nombres restants

Solution proposée en mai 2003 par les élèves de seconde 10 du lycée V. Hugo (Besançon) :

Exercice 7

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	

1°) On élimine tous les nombres inférieurs à 50 (non compris) car leurs doubles sont compris dans le tableau donc leurs chaînes sont forcément plus petites

2°) On élimine tous les nombres impairs supérieurs ou égaux à 33 car lorsqu'on les multiplie par 3 et que l'on ajoute un, le nombre obtenu comporte 3 chiffres.

3°) On élimine tous les nombres pairs qui lorsqu'on les divise par 2 donne un nombre impair supérieur à 33.

4°) On élimine 64 car il est toujours divisible par 2

5°) On vérifie les autres nombres par calcul.

Le nombre qui a la plus grande chaine est 50

50 . 25 . 76 . 38 . 19 . 58 . 29 . 88 . 44 . 22 . 11 . 34 . 17 . 52 . 26
13 - 40 - 20 - 10 . 5 - 16 - 8 - 4 - 2 - 1 .

Remarques :
Dans la forme, cette démarche peut rappeler le crible d'Eratosthène.
Mais s'agissant du crible d'Eratosthène, la méthode permet d'éliminer tous les nombres non premiers (les nombres non barrés constituant la liste des nombres premiers), sans étude de la réciproque. Ici, on élimine certains nombres, puis il reste à déterminer la solution parmi les nombres restants. Démarche que l'on retrouve dans la résolution de certaines équations en arithmétique.

Autre démarche possible :

Partir de 1 , et remonter pour déterminer les chaînes aboutissant à 1 :

128
/
32 – 64 – 21 – 42 – 84
/
1 – 2 – 4 – 8 – 16
\ /
5 – 10 – 20 – 40 –
\
3 – 6 – 12 –

Exploitation ultérieure :

♦ Déterminer toutes les chaînes d'une longueur donnée : la deuxième méthode proposée s'avère efficace pour répondre à cette question. On peut alors essayer de déterminer les termes qui ont deux « antécédents ».
♦ À la calculatrice, écrire un programme :

- pour tester la conjecture (toutes les chaînes aboutissent à 1)
- pour déterminer la longueur d'une chaîne

Exemple d'algorithme :
1) mettre 1 dans N (compteur de la longueur de la chaîne)
2) Demander le premier terme de la suite et le mettre dans U
3) Si U = 1, afficher N
Si U ≠ 1, remplacer N par N + 1 et U par le terme suivant de la suite retouner à 3) .

Exemple de programme (pour calculatrice Casio) :

```
1 → N
"VALEUR DE U0" → U
Lbl 0
If U = 1
Then "LONGUEUR DE LA CHAINE" : N ◢
Stop
Else N + 1 → N
If Int(U/2) = U/2
Then U/2 → U
Else (3×U + 1) → U
Ifend
Goto 0
```

Remarque : on peut partir de deux entiers proches l'un de l'autre, et avoir des chaînes de longueurs très différentes. Par exemple, avec $u_0 = 26$, on obtient une chaîne de longueur 11 et avec $u_0 = 27$, on obtient une chaîne de longueur 112.

Bibliographie :

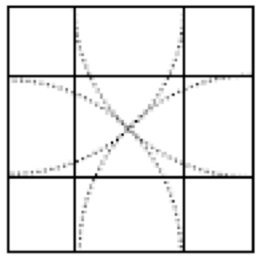
« La conjecture de Syracuse », article de Jean-Paul Delahaye paru dans POUR LA SCIENCE n° 247 (mai 1998).

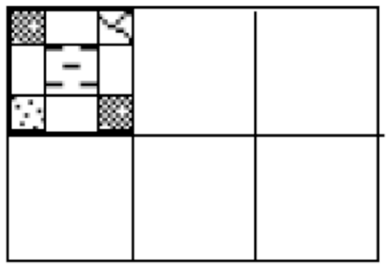
Division sacrée

Énoncé

En Grèce, en Europe ou encore en Égypte, on a retrouvé des plans de villes ou des décors construits selon la règle de la « division sacrée ».

A partir d'un carré :
– on trace quatre quarts de cercle ayant chacun pour rayon la moitié de la longueur d'une diagonale et pour centre l'un des quatre sommets du carré.
– ces quatre quarts de cercle coupent les côtés du carré en huit points, que l'on joint deux à deux pour obtenir quatre segments parallèles aux côtés du carré.





M. Bricol veut mettre dans sa cuisine un panneau mural en carrelage.
Ce panneau sera un rectangle constitué de six carreaux.
Chaque carreau, de forme carrée, sera partagé selon la « division sacrée », puis peint : seuls seront peints le carré central et les quatre petits carrés, chacun d'une seule couleur.
M. Bricol a également les exigences suivantes, sachant qu'on ne dispose que de 4 couleurs différentes :
– Dans le panneau, deux carrés ayant un côté ou un sommet commun devront être de couleurs différentes.
– Sur le panneau rectangulaire, chaque couleur devra recouvrir exactement la même aire totale.

Faites une proposition à M. Bricol sous forme de maquette en respectant ses voeux.

Cet exercice est inspiré d'un article du magazine Tangente (Hors série n°14, p.12 et 13) : « la division sacrée des bâtisseurs romains ».

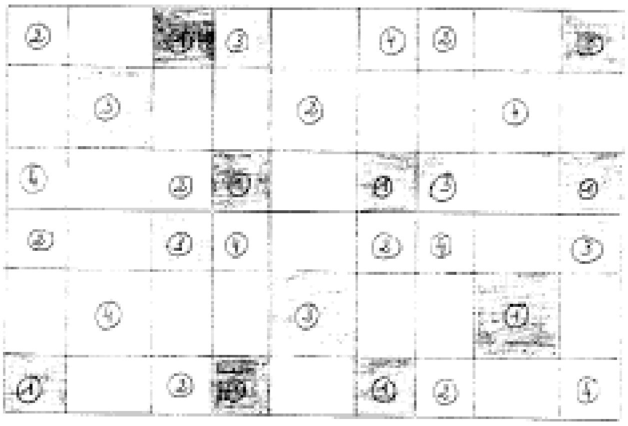
Objectifs

Satisfaire la deuxième exigence demande un travail d'analyse : on dispose de quatre couleurs, et le nombre de carrés centraux n'est pas un multiple de quatre. Le problème se ramène donc à comparer (en proportion) l'aire d'un carré central à celle d'un petit.
La comparaison des aires amène les élèves à effectuer du calcul algébrique (avec égalités remarquables, racines carrées..) : cet exercice réinvestit des notions du programme de 3^{e} .

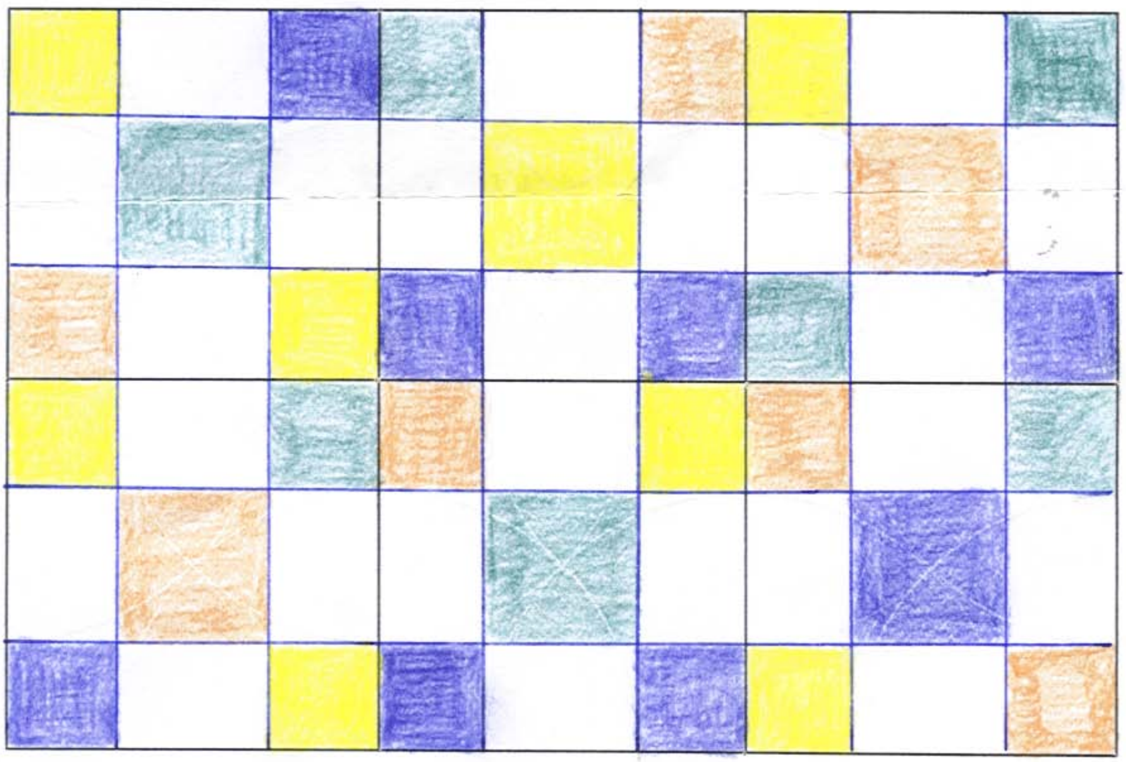
Quant à la partie coloriage, de nombreuses solutions étaient possibles ici, que l'on pouvait trouver facilement par tâtonnement : il s'agissait plutôt de donner un aspect un peu ludique à l'exercice. Néanmoins, on peut chercher des méthodes plus systématiques de coloriage de façon à pouvoir étendre le problème au cas où le panneau central comporterait davantage de carreaux.

Solution

Solution codée



Solution couleur



Démarches utilisées par les élèves

Beaucoup d'élèves n'ont pas comparé les aires des différents carrés, et ont colorié un nombre de carreaux au hasard. Seule la première exigence a été satisfaite.
Quatre classes ont bien analysé le problème :
- une classe a utilisé (sans le démontrer) le rapport des aires.

Chaque couleur représente l'équivalent
de 9 petits carreaux

- une classe a pris les mesures sur le dessin :

En faisant un dessin et en mesurant (4 cm de côté pour le grand carré),
on a : 1,2 cm de côté pour un petit carré (soit une aire de 1,44 cm²) et
1,6 cm pr un carré moyen (2,56 cm² d'aire). On obtient un rapport d'environ
1,75 : $A_{moyen} = 1,75 \times A_{petit}$.
En rultant 2 grands carrés jaunes et bruns, on a $A = 3,5 \times A_{petit}$
" " 1 grand carré rouge et vert, on a $A = 1,75 \times A_{petit}$.

On réparti ensuite les 24 petits carrés :
jaune et brun : 5, pour un total $A = 5 + 3,5 = 8,45$
rouge et vert : 7 " " $A = 7 + 1,75 = 8,75$

L'imprécision étant due au dessin.

deux classes ont essayé de faire des calculs :

Aire du petit carré : $\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \simeq 0{,}085$

Aire du gros carré : $\left(1-\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\times 2\right)^2 \simeq 0{,}17$

Aire d'un petit carré égal $\dfrac{1}{2}$ de l'aire d'un gros

Aire totale à colorié : 6 gros carrés + 24 petits carrés
$\simeq 3{,}08$

pour 4 couleurs : $\dfrac{3{,}08}{4} \simeq 0{,}77$

Il faut donc 2 couleur représent 2 gros carrés et 5 petits, 2 autres 1 gros carré et 7 petits.

soit C le côté d'un carré. la diagonale est égale à $\sqrt{2}\times C$.
la moitié de la diagonale est égale à $\underline{\sqrt{2}\times C}$.
Cette mesure est aussi celle du rayon des cercles, donc le côté d'un petit carré est égal à $C-\underline{\sqrt{2}\times C}$.
Le côté d'un grand carré est égal à $C-2(\underline{\sqrt{2}\times C})$ soit $C-\sqrt{2}\times C$
Le côté d'un grand carré est égal au double du côté d'un petit carré.
Donc un grand carré est egal à deux petits carrés.

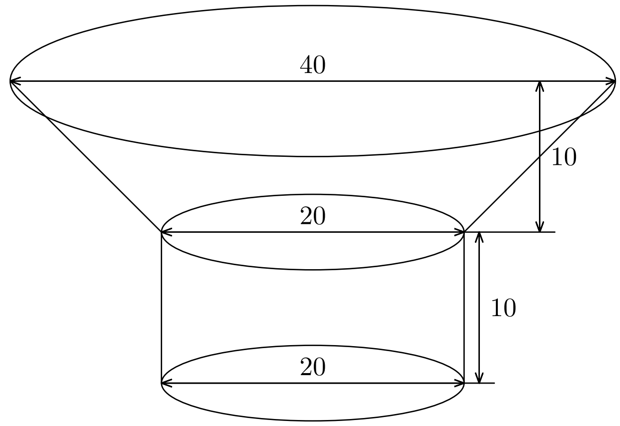
Exploitation ultérieure

On peut essayer de rechercher un coloriage pour les deux carreaux de gauche permettant ensuite de colorier tout le panneau par translation.
On peut se poser la même question pour les trois carreaux du haut.

Ras-le-bol

Énoncé

Un récipient en plastique transparent
a la forme ci-contre :
Il est constitué :
– d'un cylindre droit de hauteur 10 cm et de diamètre 20 cm,
– d'un tronc de cône droit de hauteur 10 cm et dont le diamètre supérieur mesure 40 cm.
On désire graduer ce récipient tous les litres.



Proposez une méthode.
Marquez les graduations sur le récipient (on reproduira le schéma de la fiche réponse à l'échelle réelle sur une autre feuille, millimétrée si possible).

Objectifs et description de l'énoncé

Les objectifs de ce type de problème sont multiples et variés, l'élève devant pouvoir :
- analyser une configuration de l'espace et traduire des données sur un schéma en coupe,
- utiliser les touches de la calculatrice, notamment les touches puissance et racine cubique,
- modéliser un problème avec un choix judicieux de l'inconnue,
- distinguer une situation de proportionnalité d'une situation de non-proportionnalité,
- construire éventuellement des graphiques de fonctions.

La résolution de cet exercice passe par la recherche de l'expression littérale donnant le volume de liquide en fonction de la hauteur de celui-ci.
Les unités de longueur (1dm = 10 cm) et de volume (dm^3 ou litre) ont été choisies de sorte que les calculs soient facilités, mais les élèves doivent veiller eux-mêmes à la cohérence des unités, le décimètre n'ayant pas été cité.
On note h la hauteur de liquide en décimètres et V le volume de liquide en litres.
Si $0 \leqslant h \leqslant 1$ (partie cylindrique), alors $V = \pi \times 1^2 \times h = \pi h$ et le volume total du cylindre vaut π litres.
Si $1 \leqslant h \leqslant 2$, alors $V = \pi + \dfrac{\pi h^3}{3} - \dfrac{\pi \times 1^2}{3} = \dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\pi}{3}h^3$ et le volume total du récipient est $\dfrac{10\pi}{3}$ litres.
Finalement, se donnant V, nombre entier inférieur à $\dfrac{10\pi}{3}$, on peut obtenir h :
Si $V \in \{0; 1; 2; 3\}$ alors $h = \dfrac{V}{\pi}$ (situation de proportionnalité)
Si $V \in \{4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$ alors $h = \sqrt[3]{\dfrac{3}{\pi}V - 2}$ (situation de non-proportionnalité)

Cette démarche met en œuvre la notion de fonction réciproque, applicable ici du fait que la fonction V est bijective de l'intervalle $[0\ ;\ 2]$ dans l'intervalle $[0\ ;\ \frac{10\pi}{3}]$.

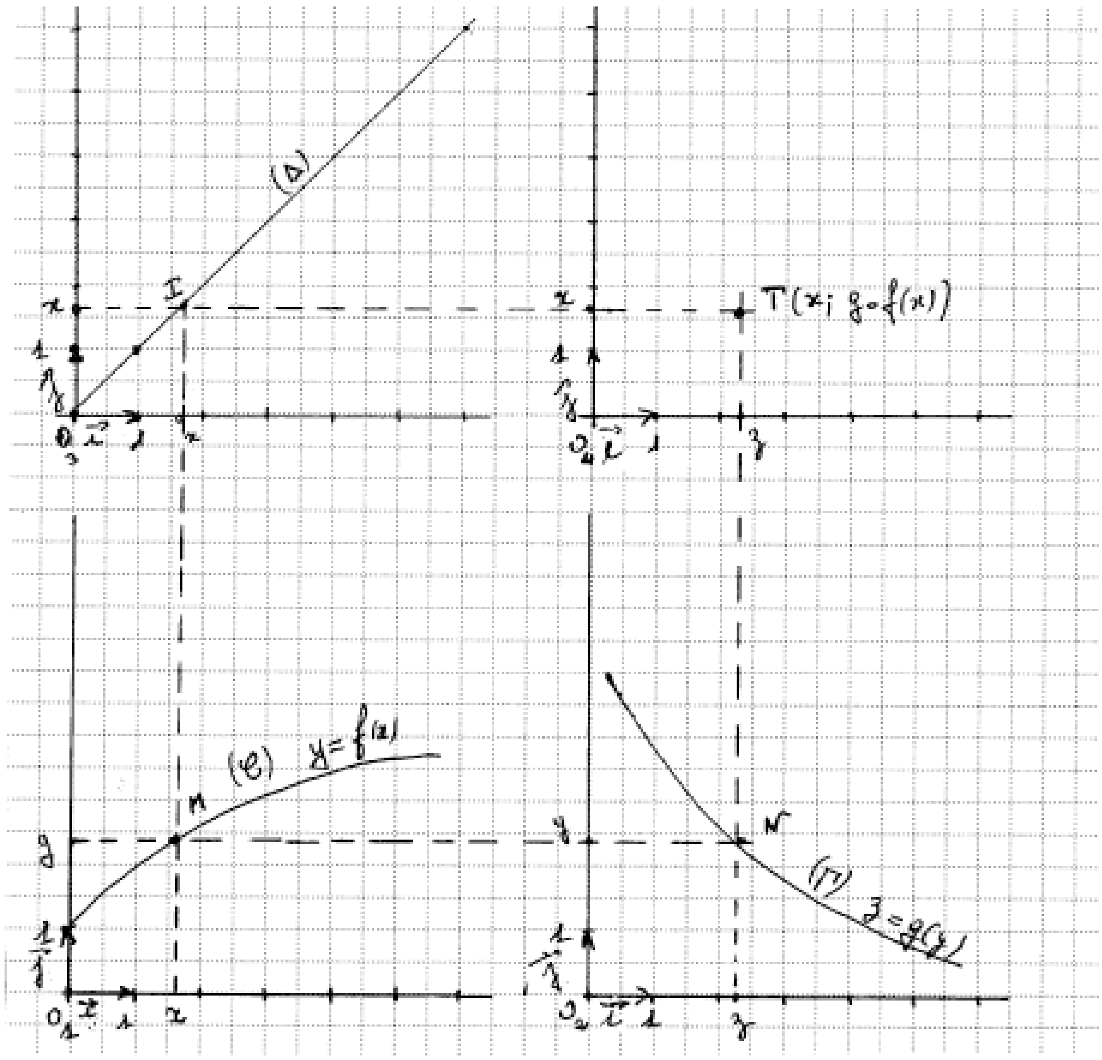
Correction et analyse

La démarche de modélisation attendue a été rencontrée dans toutes les copies où l'exercice a été abordé, les inconnues étant bien le volume et la hauteur de liquide versé.
En ce qui concerne la graduation de la partie cylindrique du récipient, la situation de proportionnalité a mis les élèves en confiance, la relation entre V et h étant assez simple.
Dans quelques copies assez imprécises au niveau des justifications, on note tout de même une graduation approximative : le volume du cylindre étant de π litres, soit environ trois litres, le partage du cylindre en trois a pu être fait à la main.
Pour ce qui est de la partie semi-conique, les élèves ont bien calculé le volume du cône tronqué par soustraction de volumes de cônes, mais peu de groupes sont allés au-delà de cette étape et sans réel succès quant à l'obtention de la bonne formule littérale.
On ne peut que remarquer le manque de confiance et d'initiative des élèves lorsqu'il s'agit de manipuler des inconnues sans le guidage et la validation d'un professeur.
Quelques incompréhensions ont été notifiées concernant le demi-plan de coupe du cylindre et également au sujet du positionnement des sommets des deux cônes formant le cône tronqué.
Cet aspect purement géométrique n'a pas été abordé dans l'énoncé mais peut être facilement résolu en considérant justement le plan de coupe choisi : les cônes sont alors représentés par des triangles dont les troisièmes sommets se confondent au centre de la base du cylindre, ceci étant dû aux dimensions choisies.

Résolution graphique du problème

Considérons deux fonctions connues f et g définies sur deux domaines D_f et D_g tels que $f(D_f) \subset D_g$.
Nous présentons ci-dessous le principe de construction de la représentation graphique point par point de la fonction réciproque de la fonction $g \circ f$, connaissant les représentations graphiques de f et g.
On place quatre repères orthonormés de bases $(\overrightarrow{\imath}\ ; \overrightarrow{\jmath}\ )$ et d'origines vérifiant :
$\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{O_3O_4}$ colinéaires à $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{O_3O_4}$ colinéaire à $\overrightarrow{\jmath}$.
Dans le repère $(O_1; \overrightarrow{\imath}\ ; \overrightarrow{\jmath}\ )$ la courbe (C) a pour équation $y = f(x)$.
Dans le repère $(O_2; \overrightarrow{\jmath}\ ; \overrightarrow{\imath}\ )$ la courbe Γ a pour équation $z = g(y)$.
Le repère $(O_3; \overrightarrow{\imath}\ ; \overrightarrow{\jmath}\ )$ (facultatif) permet de reporter le réel x de l'axe $(O_1; \overrightarrow{\imath}\ )$ sur l'axe $(O_4; \overrightarrow{\jmath}\ )$ à l'aide de la droite Δ d'équation $y = x$.
Dans le repère $(O_4; \overrightarrow{\imath}\ ; \overrightarrow{\jmath}\ )$, on a tracé la courbe représentative de $g \circ f$, dans $(O_4; \overrightarrow{\jmath}\ ; \overrightarrow{\imath}\ )$, on a sa réciproque.
Construction : En se référant à des repères de base $(\overrightarrow{\imath}\ ; \overrightarrow{\jmath}\ )$, on place un point $M(x; y)$ sur (C), on obtient $N(z; y)$ sur Γ et $I(x; x)$ sur Δ. On peut alors placer $T(z; x)$ dans $(O_4; \overrightarrow{\imath}\ ; \overrightarrow{\jmath}\ )$ avec $z = g(f(x))$.

Schémas

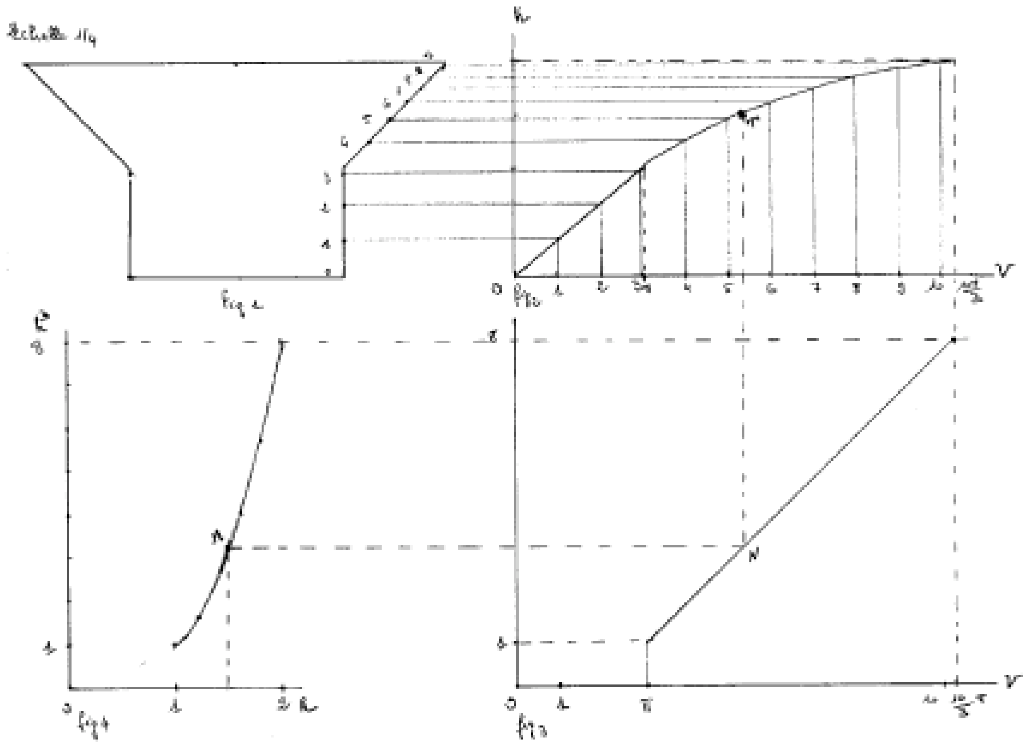


Nous présentons ci-dessous un exemple de report direct des graduations sur le récipient à l'aide de la méthode graphique.

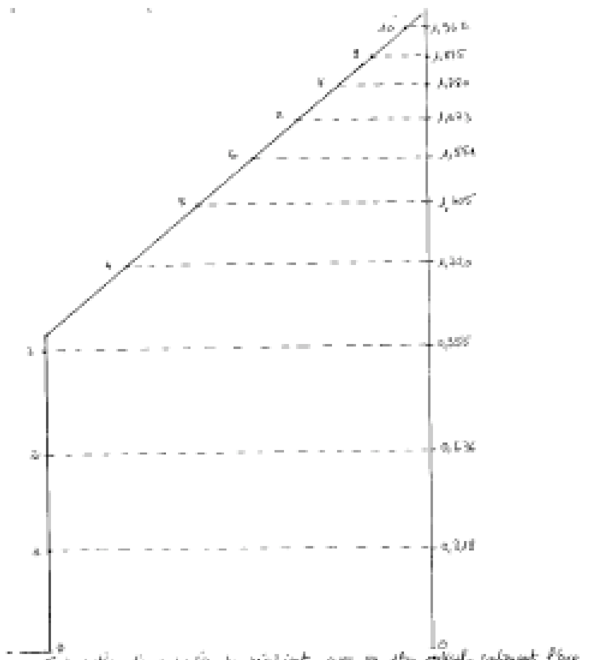
Les fonctions utilisées sont $f : h \longmapsto h^3$ sur $[1; 2]$ et $g : x \longmapsto \dfrac{2}{3}\pi + \dfrac{\pi}{3}x$ sur $[1; 8]$.

On obtient alors la courbe représentant h en fonction de V sur le troisième graphique, où $V = (g \circ f)(h)$ sur $[1; 2]$ et $V = \pi h$ sur $[0; 1]$.

Le report de h sur l'axe des ordonnées est ici fait sans utiliser la droite Δ.



Méthode numérique



Intersection d'une partie du récipient avec un plan vertical contenant l'axe de ce récipient

V	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h	0,318	0,636	0,955	1,220	1,405	1,551	1,673	1,780	1,875	1,960

V en litre
h en décimètre

$h = \frac{V}{\pi}$ lorsque $0 \leq V \leq 3$; $h = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi} - 2}$ lorsque $4 \leq V \leq 10$

Variantes

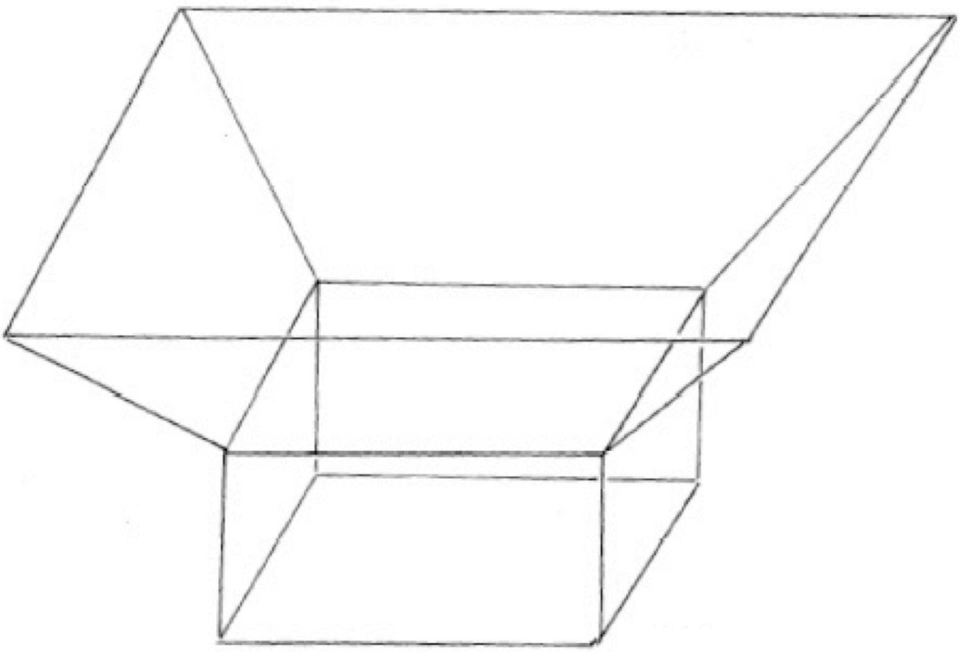
L'expression littérale donnant V en fonction de h peut sembler compliquée dans ce problème, notamment du fait de la présence du nombre π et de l'emploi de la fonction cube.
Nous proposons ici deux variantes à cet exercice, reposant sur deux récipients qui diffèrent du premier par leur forme.
Le problème reste toujours la graduation du récipient de hauteur 2 dm tous les litres.
Les objectifs restent inchangés.

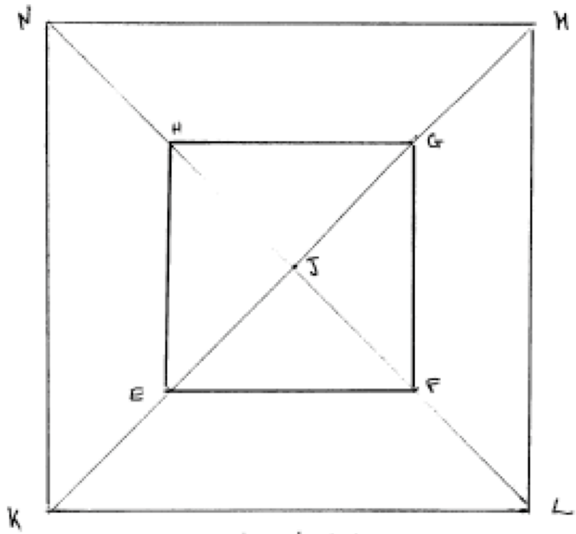
Variante 1

Le récipient est constitué d'un parallélépipède rectangle à base carrée de côté 20 cm et de hauteur 10 cm, et d'un tronc de pyramide à bases carrées de côtés 20 cm et 40 cm et de hauteur 10 cm.

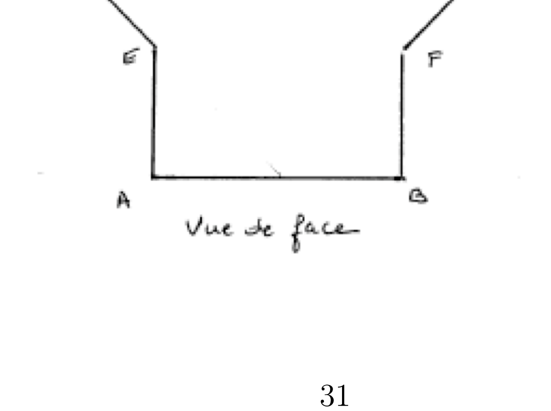
On remarque à nouveau que le sommet de la pyramide entière est le centre du carré à la base du récipient, ce qui facilite les calculs.
On obtient les résultats suivants (en dm et litres) :
Si $0 \leqslant h \leqslant 1$ alors $V = 2 \times 2 \times h = 4h$ et pour $h = 1$ on a $V = 4$.
Si $1 < h \leqslant 2$ alors $V = 4 + \dfrac{1}{3} \times 2h \times 2h \times h - \dfrac{1}{3} \times 2 \times 2 \times 1 = \dfrac{8}{3} + \dfrac{4}{3}h^3$ par soustraction de volumes en démontrant que la grande pyramide de hauteur h a pour grande base un carré de côté $2h$ (théorème de Thalès), et pour $h = 2$ on a $V = \dfrac{40}{3}$ donc on peut graduer le récipient jusqu'à 13.
La fonction volume obtenue est à nouveau bijective de $[0; 2]$ dans $[0; \dfrac{40}{3}]$, on en déduit donc la hauteur h (en dm) en fonction du volume V (en litres) :
Si $0 \leqslant V \leqslant 4$ alors $h = \dfrac{V}{4}$
Si $4 < V \leqslant 13$ alors $h = \sqrt[3]{\dfrac{3}{4}V - 2}$.
On obtient le tableau de valeurs donnant la hauteur en dm des graduations :

V	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
h	0,25	0,5	0,75	1	1,205	1,357	1,481	1,587	1,681	1,765	1,842	1,913	1,979

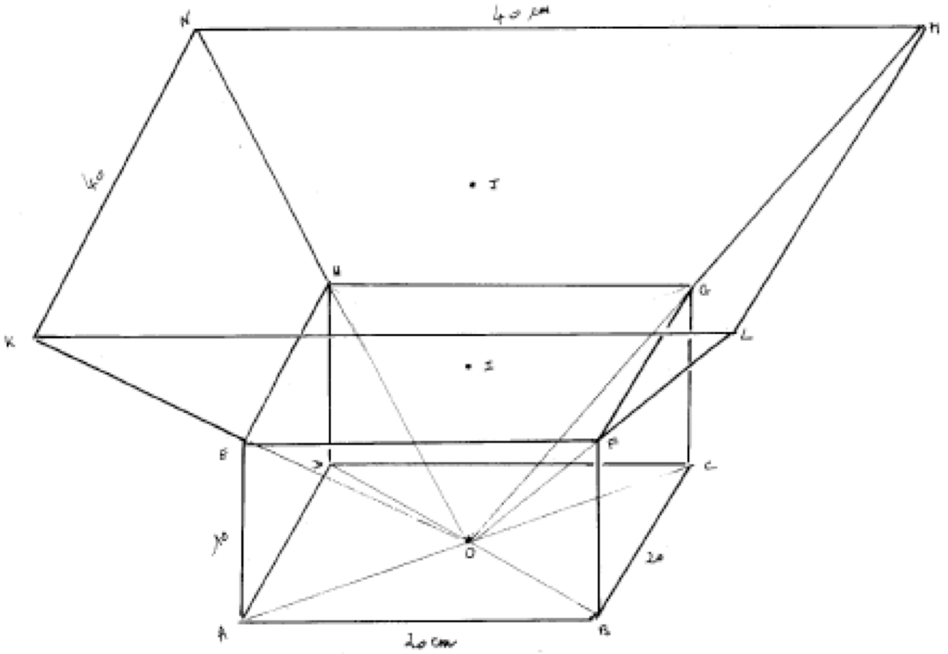




Vue de dessus

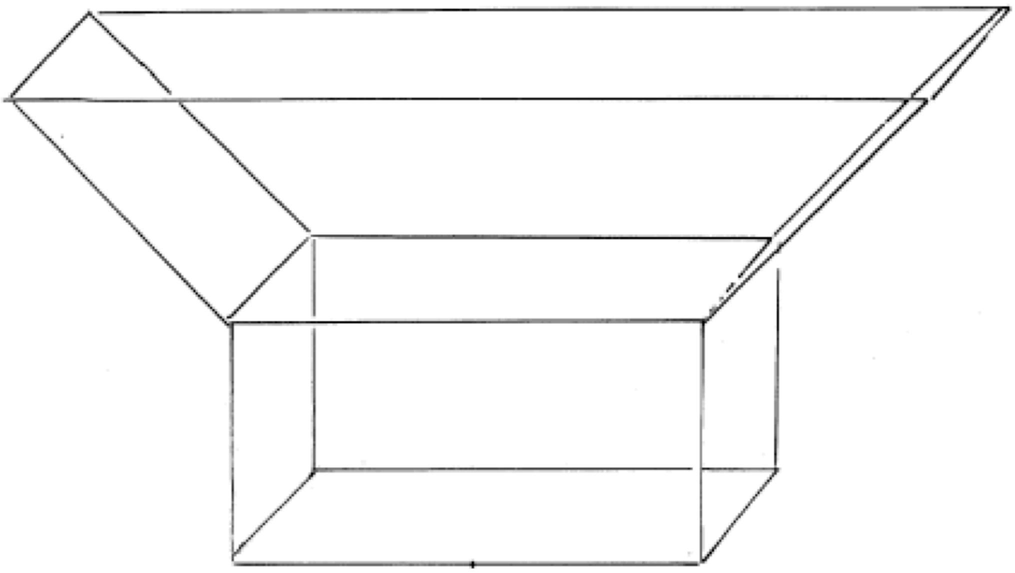


Vue de face

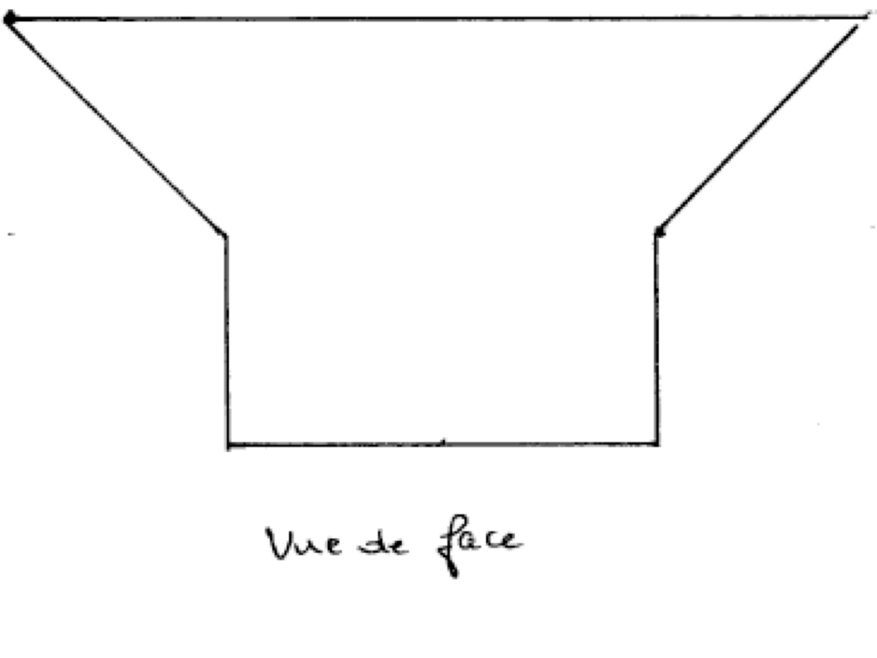


Variante 2
Le récipient est constitué d'un pavé droit à base rectangulaire de côtés 20 cm et 10 cm et de hauteur 10 cm, et d'un prisme droit à base trapézoïdale de hauteur 10 cm et dont le trapèze de base admet un axe de symétrie, des segments parallèles de longueurs 20 cm et 40 cm et une hauteur de 10 cm.
On obtient alors les volumes suivants :
Si $0 \leqslant h \leqslant 1$ alors $V = 2 \times 1 \times h = 2h$ et pour $h = 1$ on a $V = 2$.
Si $1 < h \leqslant 2$ alors $V = 1 \times \dfrac{(2 + 2h) \times (h - 1)}{2} + 2 = h^2 + 1$ (en montrant à nouveau que pour une hauteur h de liquide, la grande base du trapèze mesure $2h$ et sa hauteur $h - 1$), et pour$h = 2$ alors$V = 5$.
La fonction volume est toujours bijective de $[0; 2]$ dans $[0; 5]$, on donne donc les expressions de h en fonction de V (en dm et litres) :
Si $0 \leqslant V \leqslant 2$ alors $h = \dfrac{V}{2}$
Si $2 < V \leqslant 5$ alors $h = \sqrt{V - 1}$.
Les expressions trouvées sont, dans ce cas-ci, très simples, et on obtient le tableau de valeurs suivant :

V (en litres)	1	2	3	4	5
h (en dm)	0,5	1	1,414	1,732	2



Vue de dessus



Vue de face

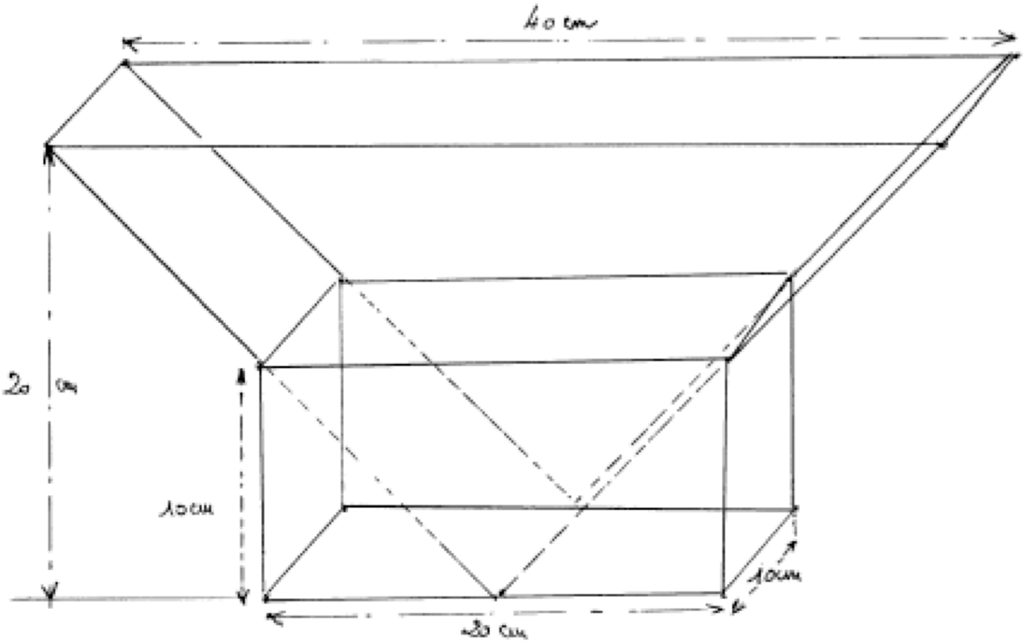


Schéma.

Les sites web présentant des rallyes mathématiques

APMEP
http://www.apmep.asso.fr/BMjml.html
IREM de Lyon
http://www2.ac-lyon.fr/enseigne/math/panorama/concours.html
Rallye mathématique de la Sarthe
http://www.univ-lemans.fr/~benard/rallye/rallye.html
Le rallye mathématique du centre
http://www.ac-orleans-tours.fr/maths-1/rallye/ac_ral.htm
Rallye québecois
http://station05.qc.ca/Partenaires/APAME/rallye.html
Le rallye mathématique de Bourgogne
http://www.u-bourgogne.fr/IREM/rallye.html
Le rallye mathématique de Charente-Poitou
http://irem.campus.univ-poitiers.fr/apmep/rallye/irallye.htm
Le rallye mathématique transalpin
http://www.rmt-sr.ch/
Le rallye Mathématiques sans frontières
http://pedagogie.ac-aix-marseille.fr/MSF/generalites/accueil.html
Le rallye Mathématiques sans frontières - de l'IREM de Toulouse
http://www.irem.ups-tlse.fr/Groupes/Rallye.html
Rallye Mathématiques des Antilles et de la Guyane
http://calamar.univ-ag.fr/uag/irem/index1.html
Rallye Mathématique d'Auvergne 2001
http://crdp.ac-clermont.fr/pedago/maths/rallye/rallye01.htm
Le BOMBYX : Rallye Mathématique de Ganges et du Languedoc-Roussillon
http://www.ac-montpellier.fr/pedagogie/disciplines/maths/apmep/activite/bombyx.htm
Le Kangourou des Mathématiques
http://www.mathkang.org/liens/construct.html

Ressources sur les Rallyes

http://www.univ-irem.fr/

http://www.apmep.asso.fr

http://www.animath.fr

250 problèmes pour nos élèves. I.R.E.M. de Lyon Université Claude Bernard-Lyon 1. Mai 1983.

A.P.M.E.P. Fichier Evariste. Coédition A.P.ME.P./les Editions du Kangourou.

A.P.M.E.P. Jeux 4 « de l'intérêt des problèmes de rallyes ». Publication de l'A.P.M.E.P. 1995 - n° 97.

AASSILA M. 300 défis mathématiques. Editions Ellipses.

ARSAC G. GERMAIN G. MANTE M. Problème ouvert et situation-problème I.R.E.M. Académie de Lyon.

ARSAC G. CHAPIRON G. COLONNA A. GERMAIN G GUICHARD Y. MANTE M., Initiation au raisonnement déductif au collège. IREM de Lyon, Presses Universitaires de Lyon.

Comité International des Jeux Mathématiques. PanoraMath96. Panorama 1996 des compétitions mathématiques. CIJM Paris 1996. Coédition CIJM-APMEP-ACL.

Comité International des Jeux Mathématiques. PanoraMath 2. Panorama 2000 des compétitions mathématiques. CIJM Paris 1999 - Coédition CIJM-APMEP-ACL.

Comité International des Jeux Mathématiques. PanoraMath 3. Panorama 2002 des compétitions mathématiques. CIJM Paris 2002 - Coédition CIJM-APMEP-ACL.

ERMEL. Vrai ? Faux ? ...On en débat ! De l'argumentation vers la preuve en mathématiques au cycle 3. Institut National de Recherche Pédagogique Paris 1999.

FERACHOGLOU R. FAFOND M. 100 friandises mathématiques. IREM de Dijon, Ellipse 2002.

HALMOS P. Problèmes pour mathématiciens petits et grands. Le sel et le fer, CASSINI Paris 2000.

La fraction du bicentenaire, championnat de France, volume n° 5. Jeux mathématiques et logiques , Hatier collection jeux mathématiques sous la direction de Gilles COHEN.

Le plaisir de chercher en mathématiques et autres textes de didactique. Publication de l'I.U.F.M. de Nice. Université de Nice-Sophia-Antipolis - Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques et Institut Universitaire de Formation des Maîtres de l'Académie de Nice (mai 1996).

Le Rallye mathématique transalpin ; Quels profits pour la didactique ? Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin - Brigue 1997-1998. Dipartemento di Matematica dell'Università di Parma/Institut de Recherche et de Documentation Pédagogique Neufchâtel. Editeurs responsables : GRUGNETTI L. et JAQET F.

Evolution des connaissances et évaluation des savoirs mathématiques. Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin. Siena 1999 Università di Siena Dipartemento di Matematica « Roberto Magari » /Institut de Recherche et de Documentation Pédagogique Neufchâtel. RMT - Neufchâtel 2000. Editeurs responsables : GRUGNETTI L. (Parma), JAQET F. (Neufchâtel), CROCIANI C., DORETTI L. SALOMONE L. (Siena).

PEAULT Hervé Un Rallye pour débattre de Mathématique, 4 années d'expérience du Rallye mathématique de Maine et Loire, épreuves-résultats-commentaires. C.R.D.P. des Pays de la Loire / C.D.D.P. de Maine et Loire 1989-1993.

SOULAMI T.B. Les olympiades de mathématiques - Réflexes et stratégies. Editions Ellipses.

La revue TANGENTE et ses numéros spéciaux :

Tangente Arithmétique. Secrets de nombres. Tangente hors série n° 6. Editions Archimède.

Auteur groupe de travail Rallye IREM de Franche-Comté

Titre Rallye Mathématiques de Franche-Comté - mai 2003

Langage : français

Caractéristique de l'édition :

Édition première édition

Éditeur presse universitaire de Franche-Comté

Diffuseur IREM de Franche-Comté

Année 2004

Format $21 \times 29,7$ cm (A4)
38 pages
Support papier

Dépôt légal : 1er trimestre 2004

ISBN 2-84867-051-7

Public Professeurs de mathématiques enseignants en collège et en lycée.

Résumé Énoncés des exercices du Rallye Mathématique de Franche-Comté, mai 2003. Objectifs des exercices, analyse a priori et présentations de solutions possibles. Analyse des productions d'élèves et propositions de variantes.

Mots clés Résolution de problèmes, rallye, mathématique, analyse, productions, élèves. Démarches, prolongement.

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
De l'Université de Franche-Comté
Département de Mathématiques- UFR Sciences et Techniques
16 route de Gray - 25030 Besançon Cedex France
Tél. : 0381666225 - Fax : 0381666234
Mél : iremfc@math.univ-fcomte.fr
http://pegase.univ-fcomte.fr