

CROIX DANS UN CARRE

Au Rallye Mathématique de Franche-Comté 2009, on trouvait l'exercice suivant :

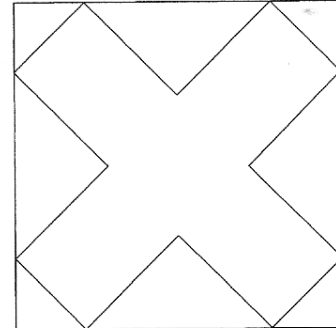
Dans un carré est inscrite une croix comme l'indique la figure ci-contre.

Les quatre axes de symétrie du carré sont également les axes de symétrie de la croix.

Les côtés de la croix sont deux à deux perpendiculaires ou parallèles.

Construisez une telle croix dans un carré de côté 6 cm sachant que l'aire de la croix doit être égale à la moitié de l'aire du carré.

Justifiez votre démarche.



Partie 1 : analyser une ébauche de démarche

Un groupe d'élèves, voulant établir une formule pour dresser une table de valeurs a écrit l'égalité suivante : $18 = l^2 + 4l \times L$.

- Que désignent l et L ? Que représente 18 ?
- Pourquoi n'ont-ils pas pu conclure ?

*Pourtant, en persévérant, ils auraient pu améliorer cette formule !
A vous de le faire, en tenant compte de la remarque suivante.*

Partie 2 : améliorer une formule pour la rendre utilisable

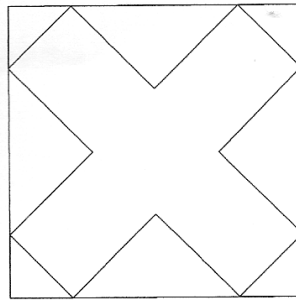
Les dimensions de la croix dépendent de l'endroit où sont placés ses sommets sur les côtés du carré de départ. On peut donc désigner par x la distance entre un sommet du carré et le sommet de la croix le plus proche et situé sur un côté.

- Quelles valeurs peut prendre le réel x ?
- Exprimer l en fonction de x .
- En considérant seulement une branche de la croix, et donc un quart du carré de départ, exprimer L en fonction de x .
- En déduire alors que si f est la fonction qui à x associe l'aire de la croix,
 $f(x) = 24x - 6x^2$.
- Laquelle des deux phrases est vraie ?
« Pour répondre à la question posée, il suffit de trouver l'image de 18 par f »
« Pour répondre à la question posée, il suffit de trouver un antécédent de 18 par f »
En déduire la construction demandée.

Partie 3 : utiliser la géométrie et les aires pour simplifier les calculs

Si l'aire de la croix est égale à la moitié de l'aire du carré, l'aire extérieure à la croix dans le carré est aussi égale à la moitié de l'aire du carré...

Or il reste 4 petits triangles rectangles isocèles et 4 grands triangles rectangles isocèles !

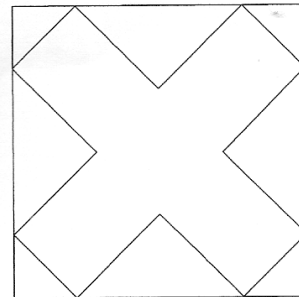


- Exprimer en fonction de x , la longueur des côtés perpendiculaires du petit triangle et la longueur de l'hypoténuse du grand triangle.
- Quelles figures élémentaires peut-on reconstituer avec ces 8 triangles ? Exprimer leurs aires en fonction de x .
- En déduire alors que si g est la fonction qui à x associe l'aire extérieure à la croix dans le carré, $g(x) = 6x^2 - 24x + 36$.
- Retrouver, en utilisant la fonction g , la réponse à l'exercice.

Partie 4 : changer de variable pour pouvoir faire les calculs sans calculatrice

Plutôt que de repérer les sommets de la croix par rapport aux sommets du carré, on peut les repérer par rapport au milieu d'un côté...

On peut donc désigner par x la distance entre le milieu d'un côté du carré et le sommet de la croix le plus proche et situé sur le même côté !



- En considérant l'aire extérieure à la croix dans le carré, exprimer en fonction de x , la longueur des côtés perpendiculaires du petit triangle et la longueur de l'hypoténuse du grand triangle.
- En déduire alors que si h est la fonction qui à x associe l'aire extérieure à la croix dans le carré, $h(x) = 6x^2 - 12x + 18$.
- Résoudre alors l'équation $h(x) = 18$ et retrouver la réponse au problème posé.

Pour les curieux.....

En allant sur le site du Rallye Mathématique de Franche-Comté, vous trouverez une solution purement géométrique à cet exercice ! Vous trouverez aussi les solutions des autres exercices proposés en entraînement.