

RALLYE MATHÉMATIQUE DE FRANCHE-COMTE
Finale du Lundi 2 Mai 2005. Éléments de solutions.

1- Le parking

Le premier jour, Didier a peint 9 chiffres (correspondant aux 9 premiers appartements), puis $2 \times (84 - 9) = 150$ chiffres (correspondant aux appartements dont le numéro va de 10 à 84). Ainsi, Didier a peint 159 chiffres le premier jour, ce qui constitue la moitié de son travail. Son temps total de travail sera donc de $2 \times (2 \times 159)$, soit 636 minutes.

Didier travaillera 10 heures et 36 minutes.

Le deuxième jour, Didier a peint $2 \times (99 - 84) = 30$ chiffres correspondant aux appartements dont le numéro va de 85 à 99.

Les $159 - 30 = 129$ chiffres restant correspondent donc à $129 / 3 = 43$ appartements dont le numéro comporte 3 chiffres.

Ces appartements portent donc les numéros 100, 101, 102, ..., 142.

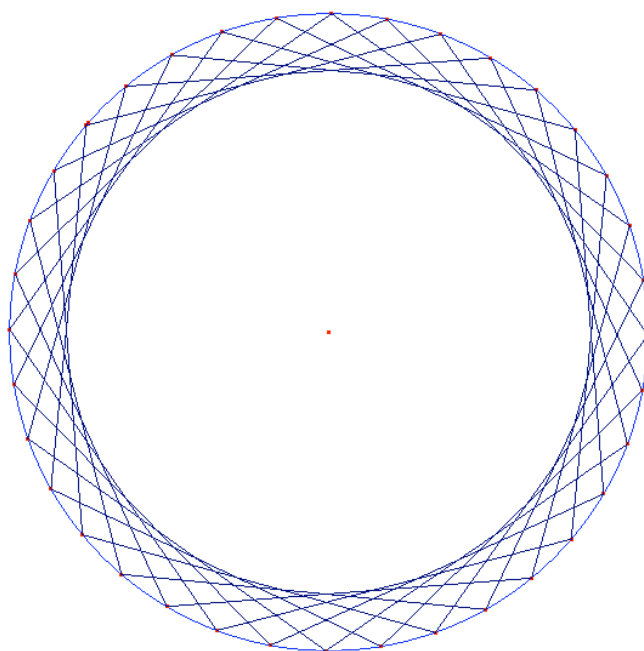
La résidence Les Pins compte donc 142 appartements

2- L'enveloppe

$360 = 5 \times 70 + 10$ et $360 = 10 \times 36$ donc à l'extrémité du 36^{ème} segment sera le point A.

Vérification: $70 \times 36 = 2520$ et $360 \times 7 = 2520$

Le plus petit multiple de 360 qui soit aussi un multiple de 70 est 2520 (vérification à la calculatrice ou écriture des multiples de 70 et 360) donc **la réponse est 36**.



3- Harmonie

Pour la fleur de gauche, on utilise la règle graduée tous les centimètres et le compas pour construire : - un cercle de rayon 2 cm
- 8 secteurs de 45 degrés
- 8 cercles tangents de rayon 1 cm.

Pour la fleur de droite :

Soit r le rayon du disque central et R le rayon du grand disque

On doit avoir :

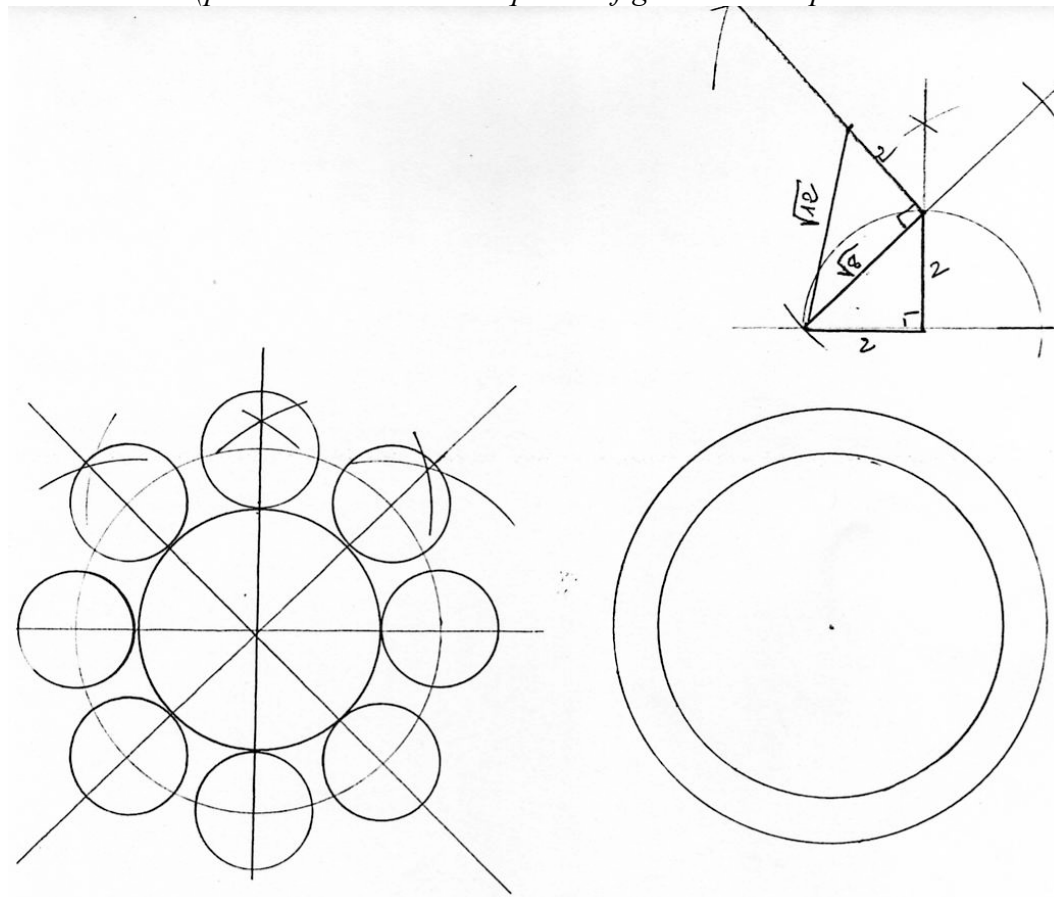
Aire du disque central : $\pi r^2 = 8\pi$ donc $r^2 = 8$

$$r = \sqrt{8} \quad d'où \quad r = 2\sqrt{2}$$

Aire de la couronne : $\pi(R^2 - r^2) = 4\pi$ donc $R^2 = 12$

$$R = \sqrt{12} \quad d'où \quad R = 2\sqrt{3}$$

construction : (pour des raisons techniques les figures ne sont pas à l'échelle demandée)



4- Demi-journée de sport

1) Oui, un élève peut être sélectionné à la fois comme basketteur et comme cavalier.

Exemple : s'il mesure 170 cm et que :

- dans sa ligne on trouve les tailles 169, 168, 165 : il sera le plus grand de la ligne.

- dans sa colonne, on trouve les tailles 171, 173, 175, 180 et 185 : il sera le plus petit de la colonne.

2) Non, un cavalier ne peut pas être plus grand qu'un basketteur.

Quel que soit le cavalier considéré :

- ce cavalier est plus petit que le basketteur de sa ligne ou il est le basketteur de sa ligne, mais il ne peut pas être plus grand que le basketteur de sa ligne.

- ce cavalier est plus petit que les cinq autres individus de sa colonne qui sont eux-mêmes soit les basketteurs de leur ligne soit plus petits que les basketteurs de leur ligne. Donc ce cavalier est nécessairement plus petit que les basketteurs des cinq autres lignes.

En conclusion : le cavalier est, soit plus petit que les six basketteurs, soit, au mieux, il est le basketteur de sa ligne.

On en déduit qu'il ne peut être plus grand qu'un basketteur.

5- Les nombres palindromes

S'agissant d'un palindrome (se lisant dans les deux sens) composé de 3 symboles, le premier et le dernier chiffre seront donc identiques. Les symboles V, L, D ne pouvant apparaître qu'une seule fois, ceux-ci ne conviennent pas. Il ne nous reste donc que quatre possibilités : I, X, C, M.

Entre deux symboles identiques, il est possible

- de placer le même symbole ce qui nous amène les réponses suivantes :
III (3) ; XXX (30) ; CCC (300) et MMM (3 000).
- de placer un symbole de valeur inférieure pour autant que l'écriture soit autorisée :
XIX (convient) ; XVX (ne convient pas) ; CIC (ne convient pas) ; CVC (ne convient pas) ; CXC (convient) ; CLC (ne convient pas) ; MIM (ne convient pas) ; MVM (ne convient pas) ; MXM (ne convient pas) ; MLM (ne convient pas) ; MCM (convient) ; MDM (ne convient pas) .

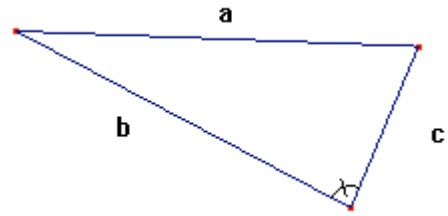
Il existe donc sept possibilités d'écritures de palindromes avec trois chiffres romains.

III (3) ; XIX (19) ; XXX (30) ; CXC (190) ; CCC (300) ; MCM (1 900) et MMM (3 000)

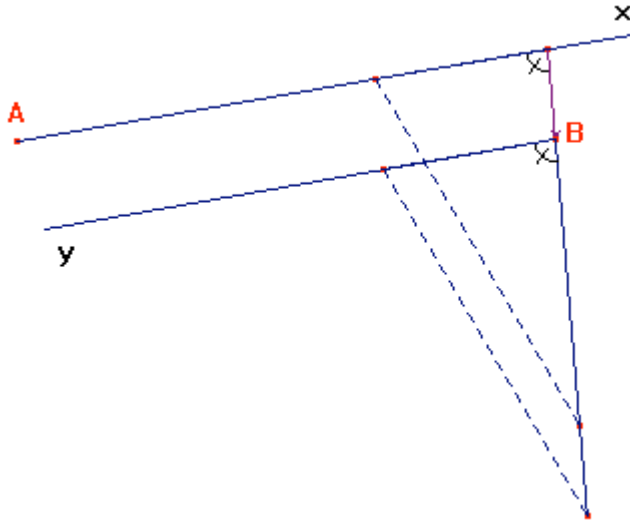
6- Instrument original : le retour !

$$c < b < a$$

$$a < AB < 2a$$

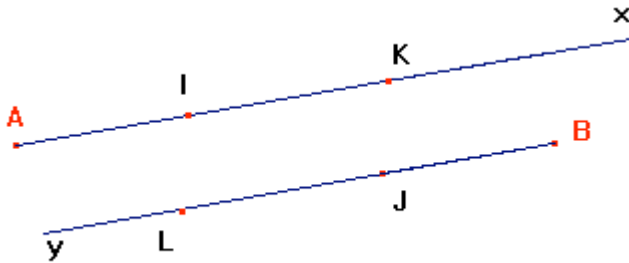


Le triangle gabarit permet de tracer des segments, des droites.



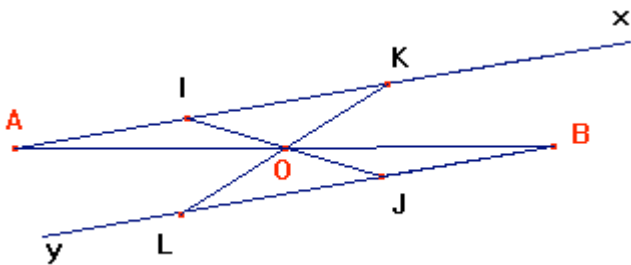
- Tracer une demi-droite $[Ax)$.
- Tracer une demi-droite $[By)$ parallèle à $[Ax)$ et de sens contraire.

→ Elles sont symétriques par rapport au milieu O de $[AB]$



- Placer I sur $[Ax)$ et J sur $[By)$ tel que $AI = BJ = c$
- I et J sont symétriques par rapport à O

- Placer K sur $[Ax)$ et L sur $[By)$ tel que $AK = BL = b$
- K et L sont symétriques par rapport à O



- Joindre I et J puis K et L .
 $[IJ]$ et $[KL]$ se coupent en O milieu de $[AB]$.
- Joindre A et O puis B et O .

7- La touche étoile

Soit n l'entier naturel que tape Jules.

$$0*n = (0+n) + 0 \times n \text{ d'où } 0*n = n$$

Il y a donc une seule façon de gagner en une seule fois : **taper 2005**.

Soit a et b les deux entiers que tapent successivement Jim.

$$0*a = a \text{ et } a*b = a + b + ab$$

La machine affiche 2005 lorsque : $a + b + ab = 2005$ soit $(a + 1).(b + 1) = 2006$.

a et b étant des entiers naturels non nuls, $(a + 1)$ et $(b + 1)$ sont des diviseurs de 2006 supérieurs ou égaux à 2.

$$\text{Or } 2006 = 2 \times 17 \times 59.$$

En écrivant les différentes possibilités, on obtient six façons de gagner en deux fois :

Taper 1 puis 1002, ou 1002 puis 1.

Taper 16 puis 117, ou 117 puis 16.

Taper 33 puis 58, ou 58 puis 33.

8- Rallye randonnée

La mise à plat des deux pentes permet de repérer la position de B pour que le chemin soit le plus court.

Le trajet le plus court correspond au segment $[MD]$ qui coupe (HK) en B .

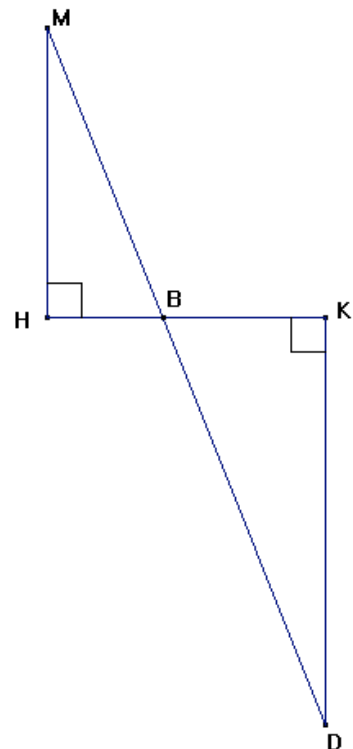
$$(HM) \parallel (DK)$$

La situation de Thalès nous permet d'écrire :

$$\frac{HM}{KD} = \frac{BH}{BK} \text{ soit } \frac{6}{9} = \frac{5 - BK}{BK}$$

D'où **BK = 3**.

Une figure, à l'échelle, permet une vérification.



9- Repérage de trésor

Le croquis proposé nous permet de faire l'hypothèse que le trésor se situe en dessous du rectangle formé par les barges.

Soit H le projeté orthogonal de T sur le plan (ABCD).

On partage le rectangle ABCD en quatre rectangles comme l'indique le croquis.

On pose : $BL = a$; $BI = c$; $L_A = AT$; $L_C = CT$

$LC = b$; $AI = d$; $L_B = BT$; $L_D = DT$

On a : $AK = a$, $DK = b$, $CJ = c$, $DJ = d$

L'utilisation du théorème de Pythagore dans différents triangles rectangles permet d'écrire quatre égalités :

$$(1) L_A^2 = HT^2 + a^2 + d^2 \quad (2) L_B^2 = HT^2 + a^2 + c^2$$

$$(3) L_C^2 = HT^2 + b^2 + c^2 \quad (4) L_D^2 = HT^2 + b^2 + d^2$$

$$(1)+(3) : L_A^2 + L_C^2 = 2HT^2 + a^2 + c^2 + b^2 + d^2$$

$$(2)+(4) : L_B^2 + L_D^2 = 2HT^2 + a^2 + c^2 + b^2 + d^2$$

$$\text{On a : } L_A^2 + L_C^2 = L_B^2 + L_D^2$$

L_A, L_B, L_C étant des longueurs connues, on peut déduire $L_D^2 = L_A^2 + L_C^2 - L_B^2$

Application numérique :

$$L_A = 1160 \quad L_B = 1524 \quad L_C = 1600$$

$$L_D^2 = 1160^2 + 1600^2 - 1524^2 = 1583024 \text{ donc } L_D = \sqrt{1583024}$$

$$L_D \approx 1258$$

