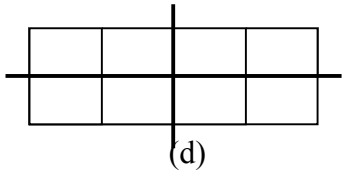
RALLYE MATHEMATIQUE DE FRANCHE-COMTE
Qualifications du Mardi 1 Février 2005. Eléments de solutions.

1- Symétries

Les chiffres utilisés

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

a. Les symétries axiales utilisées : $S_{(d)}$ et $S_{(\Delta)}$



b. Parmi les chiffres utilisés 0 1 2 5 8 sont les seuls qui soient transformés en un chiffre utilisé par la symétrie d'axe (d).

c. Les nombres à quatre chiffres ayant un axe de symétrie (d) sont :

1001 1111 1251 1881 1521

2005 2115 2255 2885 2525

5112 5252 5522 5882 5002

8008 8118 8258 8528 8888

d. Parmi les chiffres utilisés 0 1 2 3 5 8 sont les seuls qui sont transformés en un chiffre utilisé par la symétrie d'axe Δ.

e. Les chiffres utilisés 0 1 8 sont les seuls qui ont pour axe de symétrie (d) et Δ

<u>Conclusion</u> : les 6 nombres entiers de 4 chiffres possédant deux axes de symétrie sont :

1001 1111 1881

8008 8118 8888

2- Doseur à spaghetti

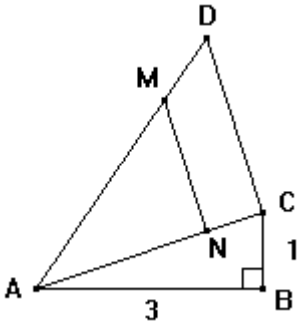
La quantité de spaghetti est proportionnelle à l'aire du disque doseur.

Pour une personne, le disque de rayon r est tel que : $\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi(1{,}5)^2$

Pour cinq personnes, le disque doseur a pour rayon R tel que : $\pi R^2 = 5 \times \frac{1}{2}\pi(1{,}5)^2$ soit $R = \frac{3}{4}\sqrt{10}$

Le disque doseur pour cinq personnes a pour rayon $\frac{3}{4}\sqrt{10}$ soit environ 2,37 cm.

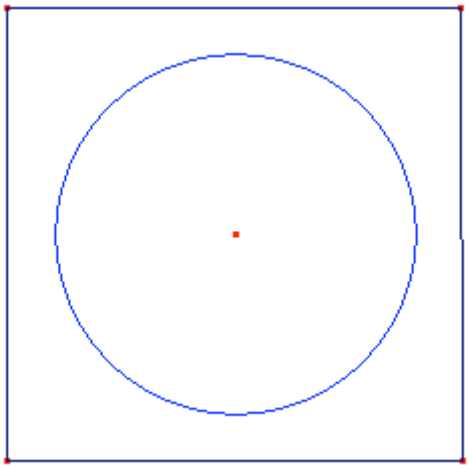
On trace à la règle et au compas



AC $= \sqrt{10}$

AD = 4

AM = 3 d'où AN = $\frac{3}{4}\sqrt{10}$ donc AN = R



3- Entraînement de tennis

Soit x le nombre de minutes de fonctionnement à la vitesse de 5 balles par minute, y le nombre de minutes de fonctionnement à la vitesse de 7 balles par minute.

Les conditions de l'énoncé permettent d'écrire : 5x +7y = 170

Soit 5x = 170 – 7y, y est un multiple de 5

y	0	5	10	15	20	25
x	34	27	20	13	6	~~-5~~
Durée en mn	34	32	30	28	26	

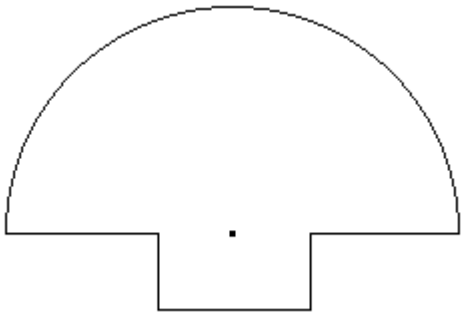
Philippe a cinq possibilités.

4- La figure manquante

a. La présence de π dans l'expression permet de dire que l'on est en présence de cercles ou d'arcs de cercle.

Périmètre 3 π + 8

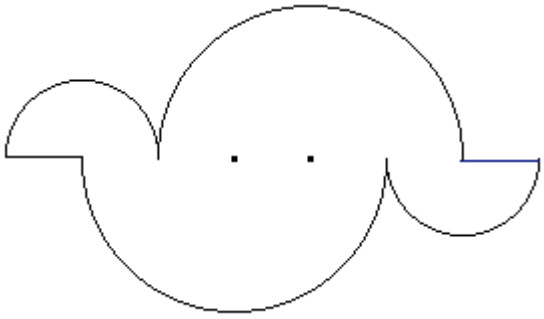
demi-cercle de rayon 3 cm , deux segments de 1 cm et trois segments de 2 cm



b. La présence de π dans l'expression permet de dire que l'on est en présence de disques ou d'arcs de disques.

Aire 5 π cm²

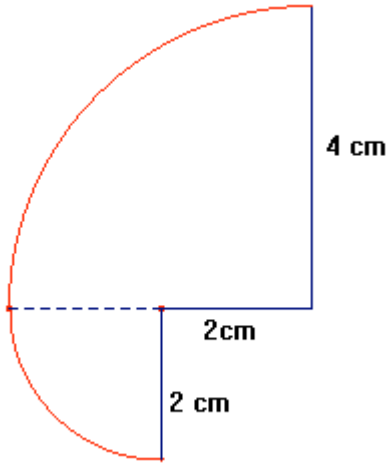
deux demi-disques de rayon 2 cm et deux demi-disques de rayon 1 cm



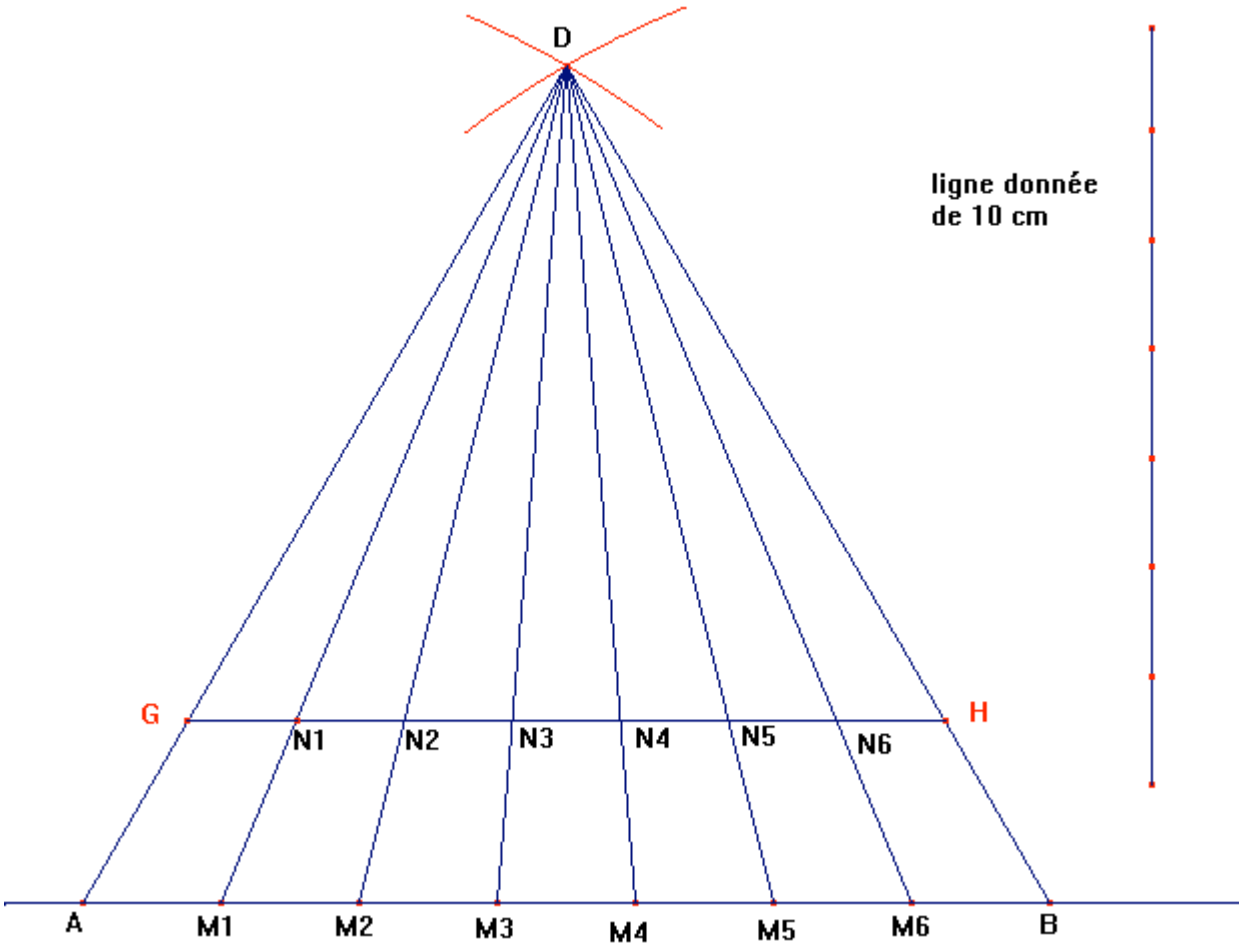
c. Figure manquante (une possibilité)

Aire 5 π
Périmètre 3 π + 8

un quart de disque de rayon 4 cm, un quart de disque de rayon 2 cm, deux segments de 2 cm et un segment de 4 cm.



5- Partage de segment



Sur une droite, on marque à partir de A, 7 segments consécutifs de même longueur.
De A et B comme centres, on trace deux arcs de cercles de rayon AB, ils se coupent en D.
Le triangle ABD est donc un triangle équilatéral.
De D comme centre, on trace un arc de cercle de rayon 10 cm. Il coupe [AD] en G et [BD] en H.
Le triangle DGH est isocèle en D. De plus, l'angle en D mesure 60° donc DGH est équilatéral d'où GH = 10 cm.
Les angles en G et H de ce triangle mesurent aussi 60°, on en déduit que les droites (GH) et (AB) sont parallèles.
[GH] est partagé en 7 segments par les droites (DM1), (DM2), ….

Dans les triangles DGH et DAB on a : $\frac{DG}{DA} = \frac{GH}{AB}$ (1)

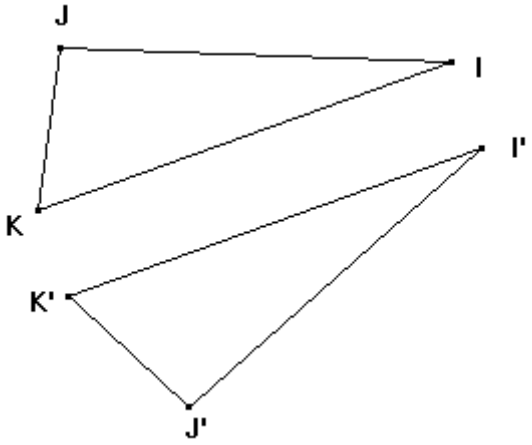
Dans les triangles DGN1 et DAM1, (GN1) // (AM1) donc $\frac{DG}{DA} = \frac{GN1}{AM1} = \frac{DN1}{DM1}$ (2)

(1) et (2) donnent : $GN1 = \frac{AM1}{AB} \times 10$ d'où $GN1 = \frac{10}{7}$

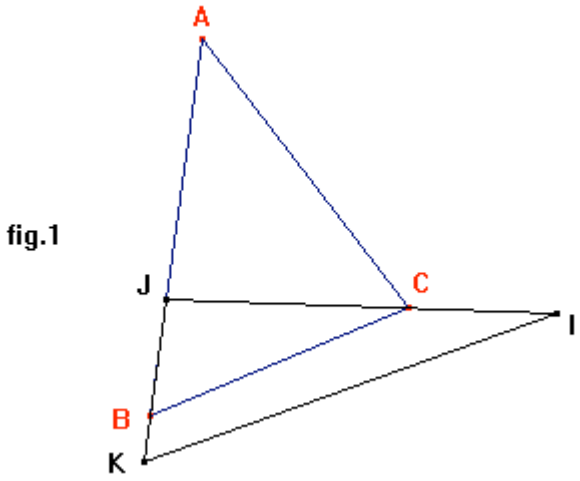
Même démonstration dans les triangles DN1N2 et DM1M2.

Le segment [GH] est partagé en 7 segments de même longueur, reportés sur la ligne donnée.

6- Instrument original



Le triangle gabarit peut avoir deux positions dans le plan : direct IJK ou retourné I'J'K'



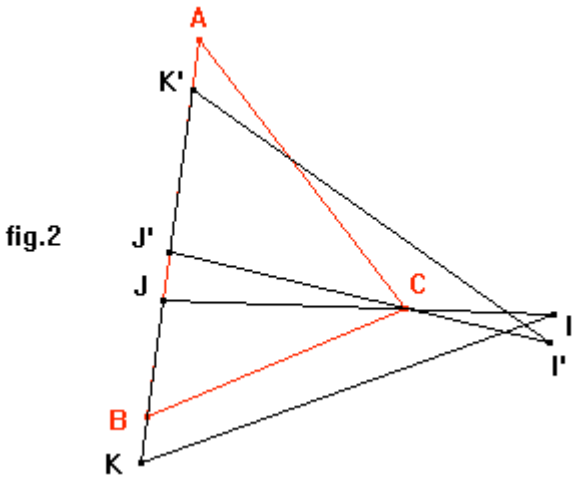


Fig.1 : (JK) coïncide avec (AB), [IJ] contient C. Fig.2 : (J'K') coïncide avec (AB), [I'J'] contient C.

Soit (Δ) la droite passant par C perpendiculaire à (AB).
L'image de (AB) est (AB) par la symétrie d'axe (Δ).

$\widehat{CJK} = \widehat{CJ'K'}$ d'où CJ = CJ'

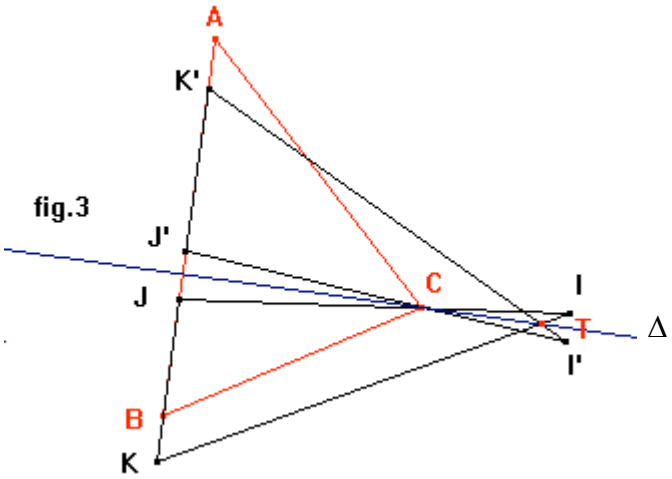
L'image de J est J' par $S_{(\Delta)}$

I'J'K' est le symétrique de IJK par rapport à (Δ)

d'où [KI] a pour image [K'I']

Les deux segments [KI] et [K'I'] se coupent sur (Δ) en T. (TC) est donc la droite (Δ).

(Δ) est la hauteur issue de C du triangle ABC.



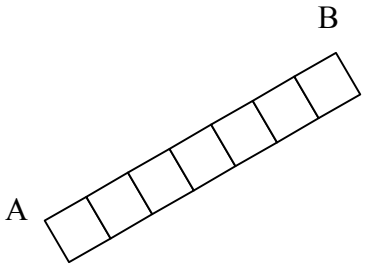
7- Jeu du cube

Le cube de un centimètre d'arête, lorsqu'il pivote autour de ses arêtes, laisse sur la table la trace d'un quadrillage.

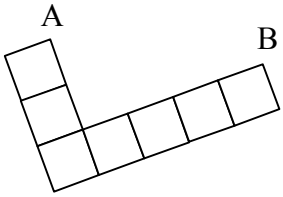
A est un sommet de ce quadrillage.

La position finale est réalisée si et seulement si B est un nœud du quadrillage.

* AB = $\sqrt{49}$ AB = 7



* AB = $\sqrt{29}$ 29 = 25 + 4. A et B sont les sommets d'un triangle rectangle ABC rectangle en C.



* AB = $\sqrt{23}$. Est-ce que 23 est la somme de deux carrés entiers ? 23 = $x^2 + y^2$

x	x^2	$23 - x^2$	y entier ?
0	0	23	non
1	1	22	non
2	4	19	non
3	9	14	non
4	16	7	non

Le problème posé n'a pas de solution.

8- Somme de nombres

Soit les chiffres 1, 2, 3, 4, 5. On forme des nombres à cinq chiffres avec ces cinq chiffres. Il existe 120 nombres à cinq chiffres distincts deux à deux.

Imaginons ces nombres écrits l'un en dessous de l'autre.

Effectuons la somme des unités, des dizaines, des centaines, des unités de mille et des dix milles

Chaque colonne est composée globalement des mêmes chiffres.

Somme des unités : cette colonne est rangée de telle sorte que le chiffre des unités soit respectivement 1, 2, 3, 4, 5.

Si le chiffre des unités est 1, on a 24 possibilités de placer 2, 3, 4, 5

Si le chiffre des unités est 2, on a 24 possibilités de placer les autres chiffres, de même pour 3, 4, 5.

La somme des unités est $24\times1 + 24\times2 + 24\times3 + 24\times4 + 24\times5$ soit 360

Somme des dizaines : en organisant les nombres d'une façon analogue, la somme de chiffres des dizaines est 360.

De même, la somme de chiffres des centaines est 360.

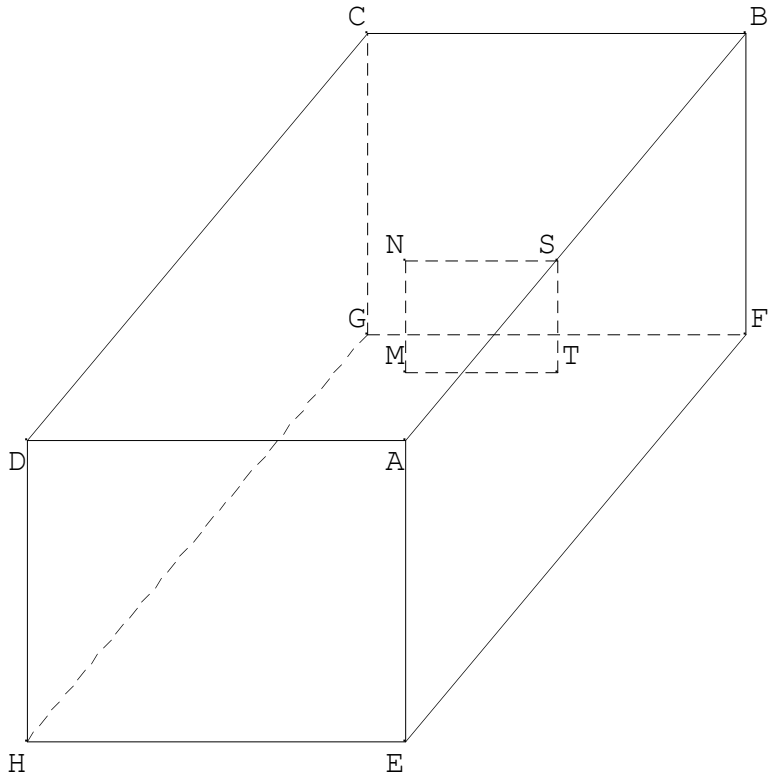
la somme de chiffres des unités de mille est 360.

la somme de chiffres des dix milles est 360.

Le nombre cherché est donc $360\times(10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1)$

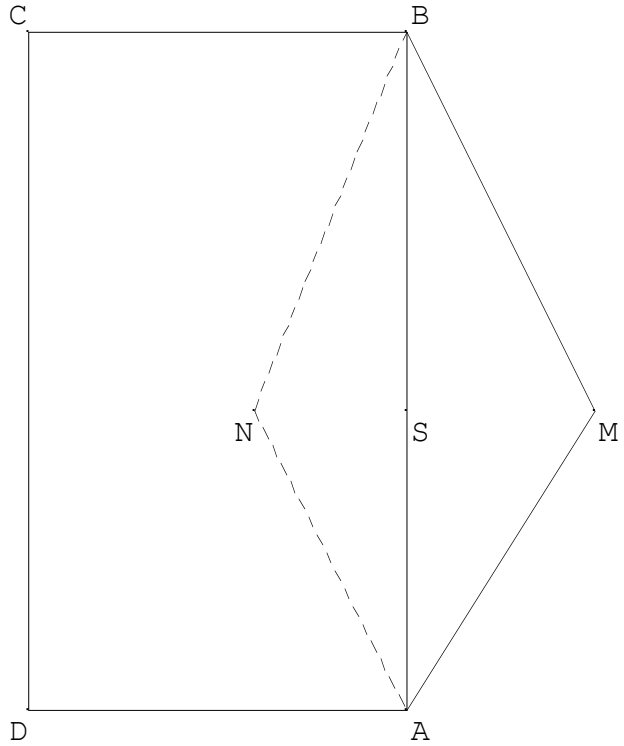
La somme de tous les nombres à cinq chiffres respectant la règle est 3 999 960.

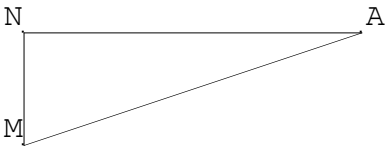
9- La mouche

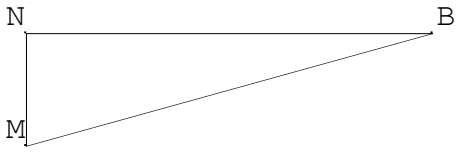


Méthode 1 : [MN] est représenté en vraie grandeur dans la perspective et les triangles AMN et BMN sont rectangles en N. On prend les distances AN et BN sur la face de dessus en vraie grandeur.
On trace les deux triangles rectangles AMN et BMN qui nous permettent d'obtenir les distances AM et BM et donc de tracer ABM.

Vue de dessus :







Méthode 2 : on peut démontrer que la hauteur issue de M dans le triangle AMB est la droite (MS) et on obtient directement la distance MS en vraie grandeur sur la perspective cavalière (plan frontal).
Il ne reste qu'a reporter cette distance sur la vue de dessus en vraie grandeur à l'aide de la position de S sur cette vue.