

ANALYSE A PRIORI

L'objectif de l'exercice est de déterminer des entiers dont la somme des inverses est égale à 1 : il s'agit de résoudre successivement les équations :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1, \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 1.$$

où a , b et c sont des entiers naturels compris entre 1 et 12.

L'exercice a été présenté sous la forme d'un jeu pour le rendre plus attractif, et surtout plus concret pour les élèves. De tels dés dodécaédriques existent d'ailleurs dans le commerce, et les élèves pourraient jouer réellement.

La présentation sous forme d'équations, outre son aspect un peu austère, aurait sans doute incité les élèves à tenter une résolution des équations ; la présentation retenue incite à faire des essais, et la première difficulté rencontrée est le calcul avec des fractions. Par la suite, obtenir toutes les possibilités exige la mise en place d'une méthode (d'un algorithme ?) : c'est là que se situe la difficulté essentielle.

PROLONGEMENTS

La résolution de ce type d'équations se retrouve dans les deux problèmes suivants :

• Recherche des pavages réguliers du plan avec des polygones réguliers.

On cherche à paver le plan avec des polygones réguliers. On appelle n le nombre de côtés du polygone, et p le nombre de polygones assemblés à chaque « coin ».

L'angle entre deux côtés consécutifs du polygone mesure, en degrés, $180 - \frac{360}{n}$, et comme p polygones sont assemblés, on a $p(180 - \frac{360}{n}) = 360$, soit $\frac{1}{p} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$.

La résolution de cette équation prouve que les seuls polygones réguliers permettant de paver le plan sont les triangles équilatéraux ($n = 3$ et $p = 6$), les carrés ($n = p = 4$) et les hexagones réguliers ($n = 6$ et $p = 3$).

Référence : Science illustrée, édition spéciale du Kangourou, 1998

• Recherche des polyèdres réguliers convexes.

On appelle S le nombre de sommets du polyèdre, F le nombre de faces, A le nombre d'arêtes.

On appelle n le nombre de côtés d'une face.

– On admet qu'à chaque sommet du polyèdre arrivent le même nombre d'arêtes, on note a ce nombre.

On a : $A = \frac{a \times S}{2}$, d'où $S = \frac{2A}{a}$.

– Chaque face a le même nombre d'arêtes, et chaque arête est commune à deux faces, on a donc : $A = \frac{F \times n}{2}$, d'où $F = \frac{2A}{n}$.

– La formule d'Euler, relation entre S , F et A : $S + F = A + 2$, permet d'écrire : $\frac{2A}{a} + \frac{2A}{n} = A + 2$, et d'en déduire : $\frac{1}{a} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A}$.

La résolution de cette équation prouve qu'il n'existe que cinq polyèdres convexes réguliers.

Ces cinq polyèdres sont appelés **les cinq solides de Platon**.

Références : Le Timée de Platon, les manuels scolaires de seconde, thème « Les solides de Platon ».

ANALYSE DE PRODUCTIONS

La grande majorité des classes a abordé ce problème.

On note une importante différence de score entre les classes de troisième et celles de seconde. Au niveau troisième apparaissent encore de grosses erreurs de calcul, alors qu'elles sont quasiment inexistantes en seconde.

- Les élèves ont généralement cherché les réponses dans l'ordre logique : un lancer, puis deux, puis trois ...

Dans cet exercice nous allons calculer quelles sont les solutions dont les séries de résultats permettant de gagner pour un nombre de lancer inférieur ou égal à 4.

$$1 \text{ lancer: } \frac{1}{4} = 1.$$

$$2 \text{ lancers: } \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

$$3 \text{ lancers: } * \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1.$$

$$* \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

$$4 \text{ lancers: } * \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1.$$

$$* \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{2} = \frac{2}{10} + \frac{2}{10} + \frac{1}{10} + \frac{5}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

$$* \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} + \frac{4}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

$$* \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12} + \frac{2}{12} + \frac{6}{12} + \frac{3}{12} = \frac{12}{12} = 1.$$

$$* \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12} + \frac{3}{12} = \frac{12}{12} = 1.$$

$$* \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12} + \frac{6}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{12}{12} = 1$$

$$* \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{4}{8} + \frac{2}{8} = \frac{8}{8} = 1.$$

- Une copie de troisième a retenu notre attention car elle sortait de l'ordinaire : les élèves ont pris chaque fraction et ont cherché à la compléter de façon très systématique pour obtenir 1.

* On prend $\frac{1}{4}$, il ne manque rien pour aller à un. Donc la série : 4 fonctionne.

* On prend $\frac{1}{2}$, il manque $\frac{1}{2}$ pour aller à un. Et $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$;
 $\frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12}$; $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$; $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$; $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$; $\frac{1}{6} + \frac{1}{3}$; $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$;
 $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4}$; ... Donc les séries suivantes fonctionnent : 2+2 ;
 2+3+6 ; 2+3+4+2+2 ; 2+4+4 ; 2+4+8+8 ; 2+5+5+10 ;
 2+6+3 ; 2+6+6+6 ; 2+8+8+4 .

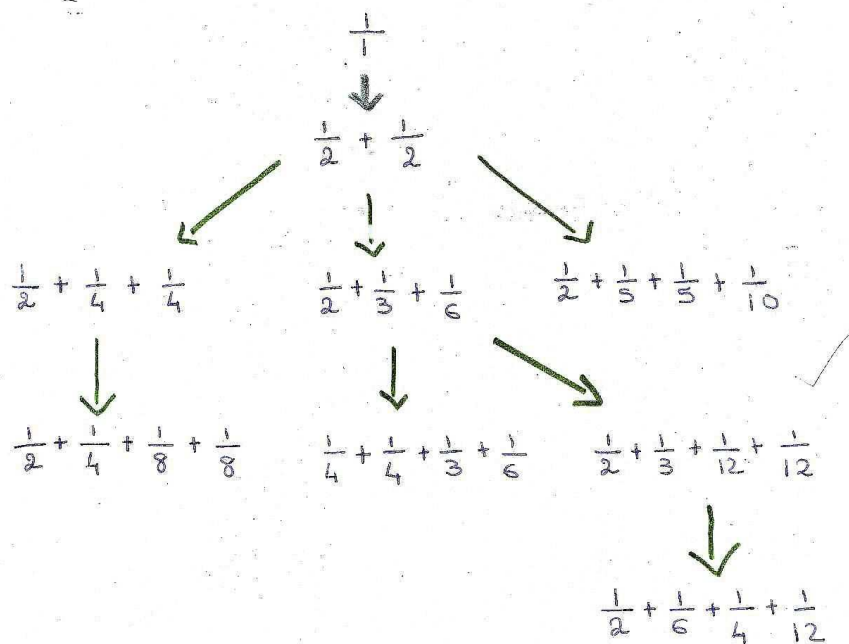
* On prend $\frac{1}{3}$ il manque $\frac{2}{3}$ pour arriver à 1. Et $\frac{2}{3}$ est égal à : $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$;
 Donc la série : 3+2+6 fonctionne

* On prend $\frac{1}{4}$ il manque $\frac{3}{4}$ pour aller à 1. Et $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$. Donc la
 série : 4+2+4 fonctionne.

* on prend $\frac{1}{6}$ il manque $\frac{5}{6}$ pour aller à 1. Et $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$; $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$;
 $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$. Donc les séries suivantes fonctionnent : 6+3+2 ; 6+6+3+3

- Dans une autre copie de seconde, les élèves se sont aidés d'un arbre pour arriver aux différentes possibilités.

Nous sommes partis de la fraction $\frac{1}{2}$ que nous avons divisé de différentes manières. Nous l'indiquons ci-dessous. Il y a 10 solutions



et nous n'avons pas pu classer $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$

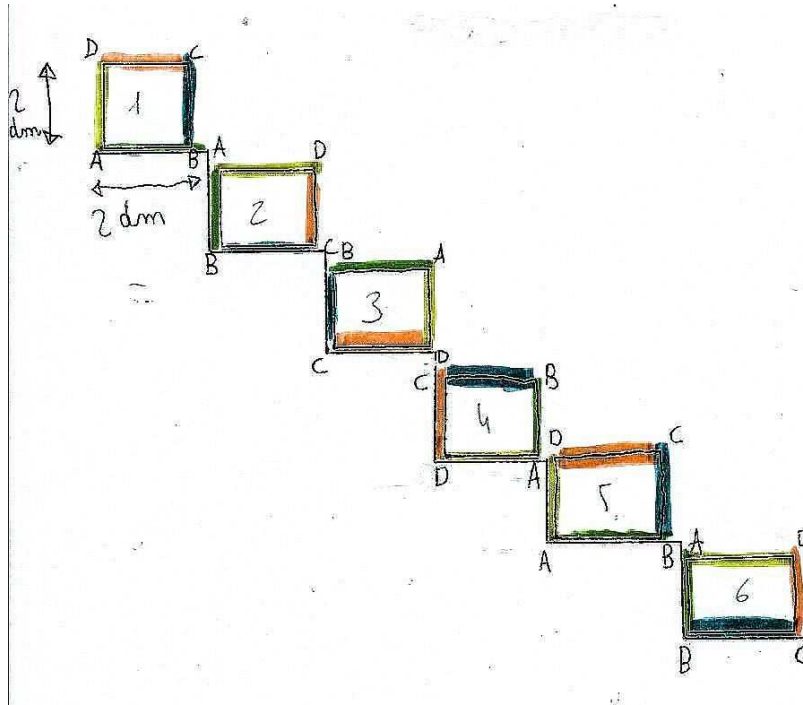
ESCALATOR

ANALYSE DES PRODUCTIONS

- La situation a été bien comprise en général aussi bien au lycée qu'au collège. Les résultats par contre sont bons en lycée, beaucoup plus mitigés en collège où, bien qu'ayant compris la situation, les élèves n'ont pas reconnu les trajectoires des différents sommets du cube.

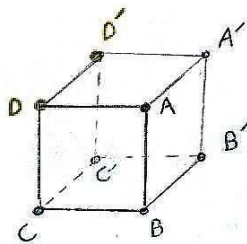
Malgré une bonne compréhension en général, on peut noter l'interprétation erronée de l'énoncé (peut-être due à une lecture trop rapide?) dans certains cas :

Un exemple en lycée : le cube tourne seulement d'un quart de tour, puis glisse le long de la contre-marche.



- Le passage d'un problème de l'espace à un problème dans le plan ne semble pas avoir posé de difficultés. Il s'est fait de manière implicite en général, néanmoins quelques (rares) groupes l'ont explicité :

Un exemple en lycée :



On admet que AA', BB', CC', DD' parcourent la même distance dans l'escalier.

- Des groupes ont répondu sans calcul et sans argumentation correcte :

« Les sommets n'ont pas parcouru la même distance car à l'arrivée ils n'ont pas la même position qu'au départ ».

« Je sais que les arêtes du cube mesurent 2 dm, alors ces côtés sont équidistants (d'après la propriété du carré) et sachant que la hauteur des marches est de 2 dm : les sommets auront tous le même parcours ».

- La plupart des productions commencent par un schéma de la situation, parfois même un carré a été découpé, pour expérimenter.

Les différentes positions des sommets ont été représentées, souvent en couleur.

Les trajectoires sont dessinées dans la grande majorité des classes de seconde, mais en collège, de nombreux groupes n'ont pas reconnu que les sommets décrivaient des arcs de cercles.

Un exemple en collège où les sommets sont bien dessinés, mais les trajectoires non reconnues.

2 cm représente 2 dm

Non, les sommets n'ont pas tous parcouru la même distance.

1^o angle vert et l'angle bleu font tous deux cinq fois 90° .

2^o angle vert plus fait deux fois 270° .

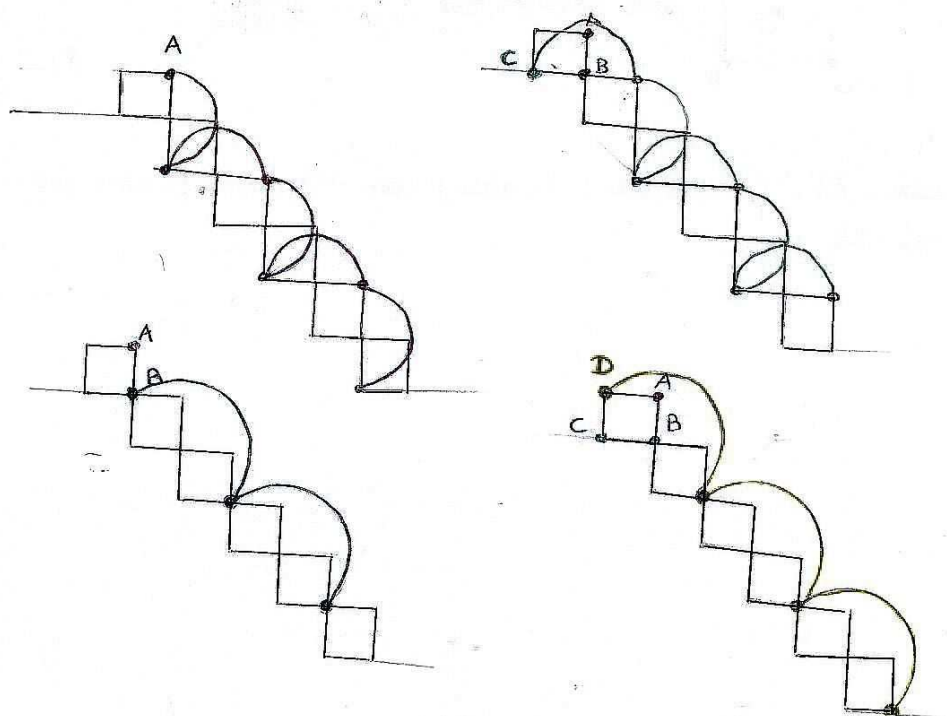
3^o angle rouge fait trois fois 270° .

Donc l'angle vert parcourt 450° , l'angle bleu parcourt 450° , l'angle vert plus parcourt 540° et l'angle rouge parcourt 810° .

Conclusion

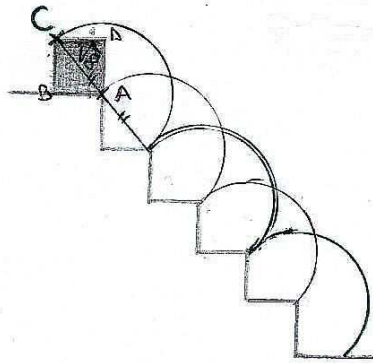
Le sommet vert plus a parcouru la plus petite distance.
 Le sommet rouge a parcouru la plus longue distance.
 Les sommets vert et bleu ont parcouru une distance intermédiaire.

Un exemple en lycée avec toutes les trajectoires.



- Lorsque les calculs sont faits, ils le sont en général avec les valeurs exactes, et la démarche est clairement explicitée. Souvent les longueurs des quatre trajectoires sont calculées. Un groupe cependant en a calculé deux et a compris que cela suffisait pour répondre :

Un exemple en lycée :



— = C'
— = A'

- Si on note les 4 sommets qui apparaissent sur le schéma en coupe de l'escalier (sachant que les 4 autres effectuent les mêmes trajets) par A, B, C et D.
- On note le trajet du sommet C : C' et le trajet du sommet A : A'.
- On cherche à calculer C' et A' :
 - * C' est formé de 3 demi-cercles de rayon $\sqrt{8}$ (diagonale du cube). La longueur de l'arc d'un demi-cercle se calcule avec la formule $\pi \times R$. Donc $C' = 3 (\pi \times \sqrt{8})$.
 - * A' est formé de 2 demi-cercles de rayon $\sqrt{8}$ (diagonale du cube). La longueur de l'arc d'un demi-cercle se calcule avec la formule $\pi \times R$. Donc $A' = 2 (\pi \times R)$.
- $C' \neq A'$ donc les sommets n'auront pas tous parcouru la même distance.
- Cela s'explique par :
Quand C fait une rotation, A tourne autour de lui-même.
C'est pour cela que $A' < C'$.

Les élèves auraient pu aller plus loin dans leur raisonnement en comparant seulement le nombre de demi-cercles parcourus, sans faire de calcul.

PATRON D'UN SOLIDE

ANALYSE A PRIORI

Objectifs :

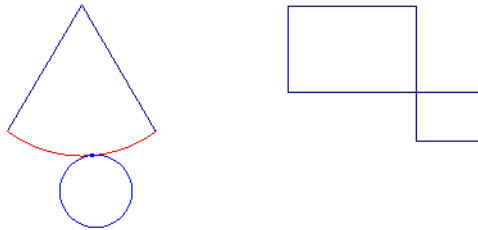
- Le premier objectif est l'étude d'un solide composé d'un cube et de cinq pyramides pour en fabriquer un patron
- Le second est la construction de $3\sqrt{2}$

Difficultés rencontrées :

La principale difficulté est de répondre à la question : « Qu'est-ce qu'un patron ? »

- chaque face doit être entière ;
- deux faces sont reliées par un segment ;
- les figures ne doivent pas se superposer.

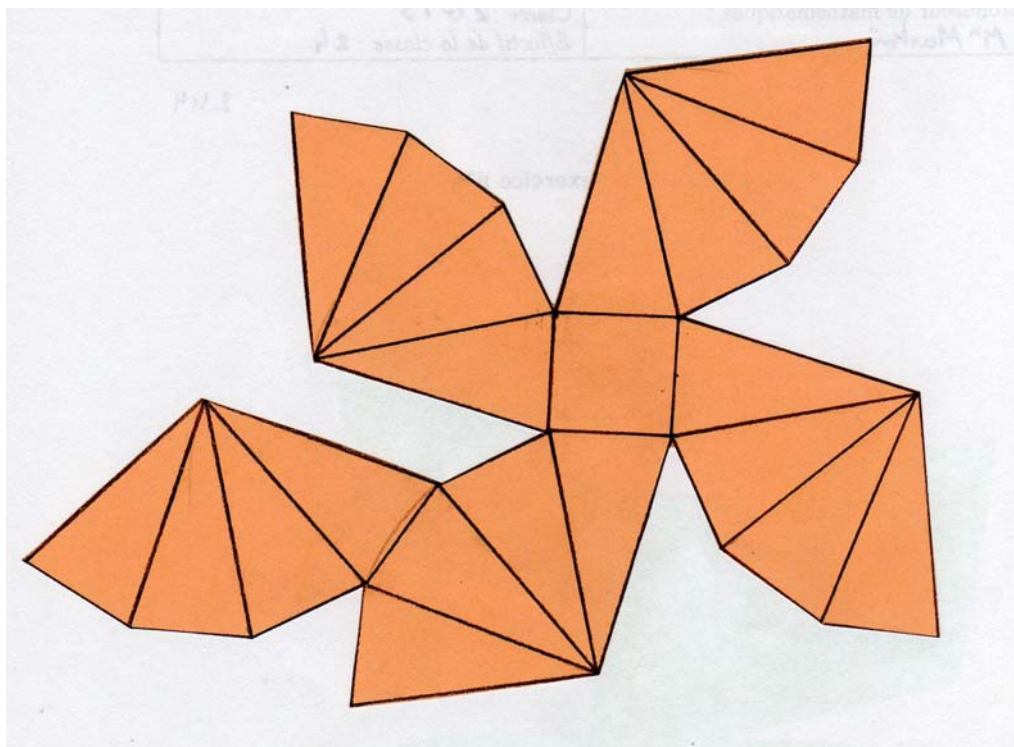
Les situations où les faces ne sont reliées que par un point ne sont pas acceptables :
Exemple :



ANALYSES DES PRODUCTIONS

Les élèves ont en général bien réussi cet exercice.

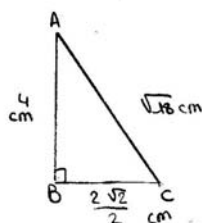
Certains ont réalisé un patron différent de celui proposé en solution (la 5^{ème} pyramide est reliée à une autre par une arête de la base) :



Le calcul et la construction de $3\sqrt{2}$ ont été faits de manière correcte :

Le sommet de la diagonale forme avec le point d'intersection des diagonales d'un des carrés formant le cube et un sommet de ce carré un triangle rectangle .

$BC = \frac{2\sqrt{2}}{2}$ car BC est la moitié de la diagonale d'un carré .



Pour trouver AC on utilise le théorème de Pythagore :

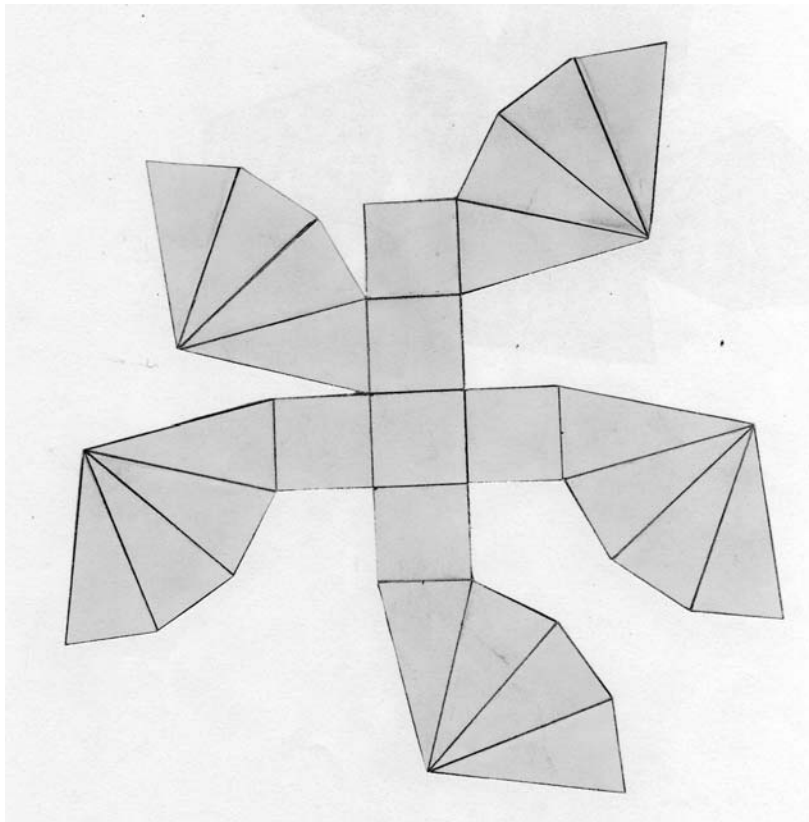
$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ &= 4^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ &= 16 + 2 \\ &= 18 \end{aligned}$$

$$AC = \sqrt{18} \text{ cm}$$

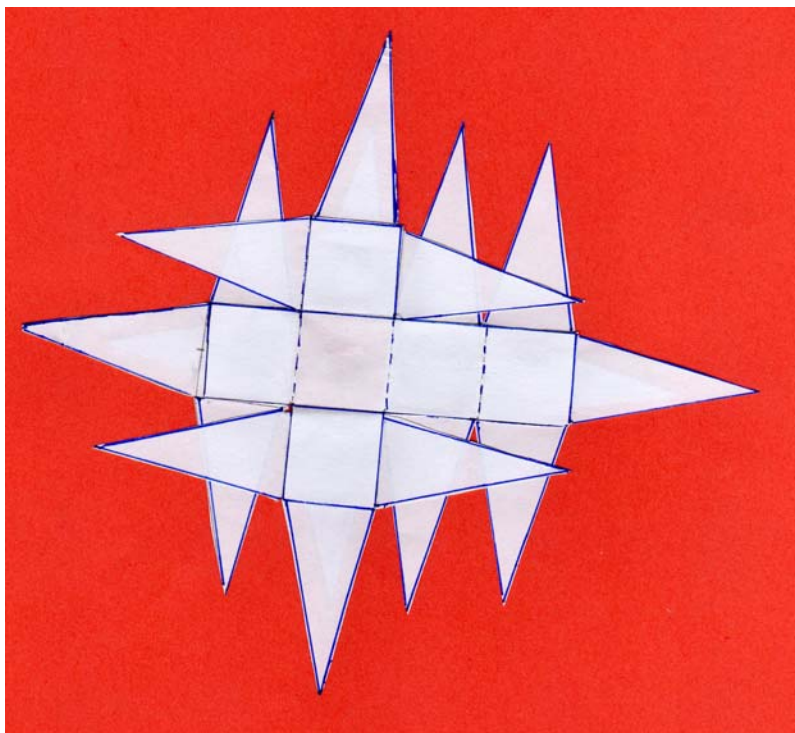
Les triangles formant une pyramide régulière sont isocèles donc chaque triangle mesure 2 cm de base et $\sqrt{18}$ cm pour les deux autres côtés.

Les erreurs ont été celles attendues :

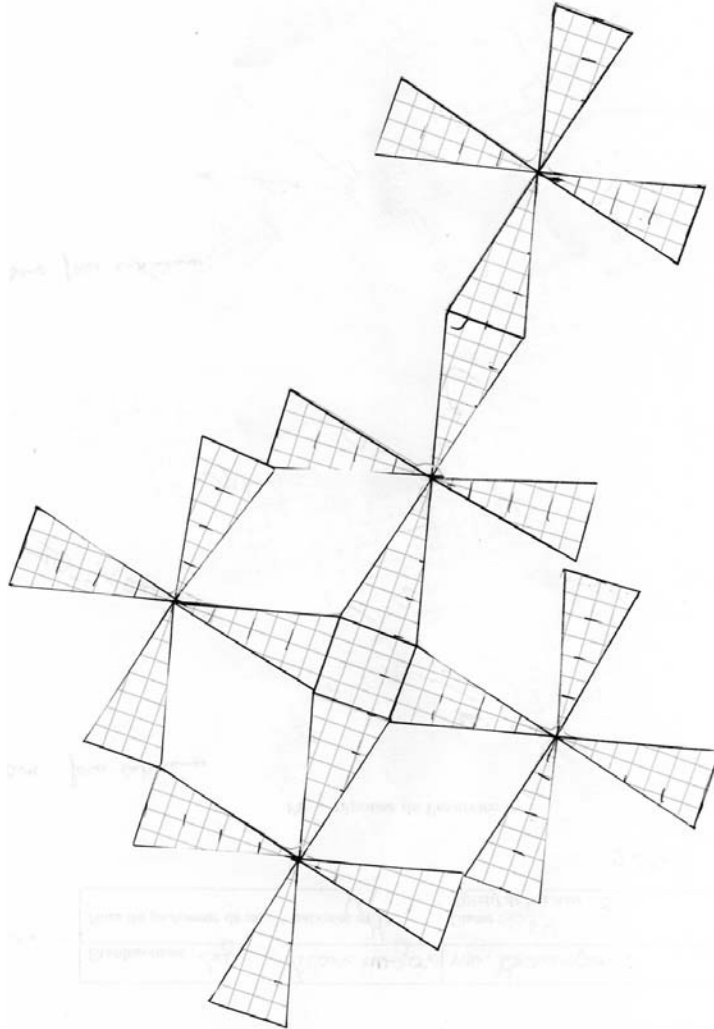
- La base carrée de chaque pyramide est doublée :



- Il y a superposition de certaines faces des pyramides

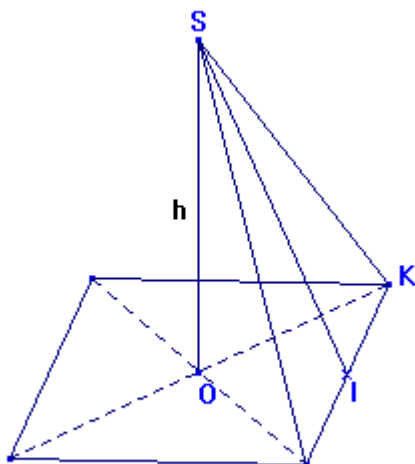


- Les seules attaches sont les sommets des pyramides :



PROLONGEMENTS

- Est-ce que le patron donné convient pour toutes les valeurs de h ?
- Exemples : - pour $h = 1$, on peut s'apercevoir que les patrons proposés ne sont pas satisfaisants. En effet, on peut démontrer que deux triangles ayant un côté du cube en commun sont plans.
- si $h > 4$, n'y a-t-il pas superposition de triangles isocèles sur le patron ?
- On peut exploiter la situation pour faire des calculs avec des mesures d'angles :



$$\begin{aligned} \widehat{S\hat{O}I} &= 90^\circ \\ \widehat{S\hat{I}O} &= \alpha \\ \widehat{S\hat{K}I} &= \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= h \\ SI &= \sqrt{1+h^2} \\ \tan \beta &= \sqrt{1+h^2} \end{aligned}$$

PROBLEME DE MATERIEL

ANALYSE A PRIORI

Objectifs

Le principal objectif est de savoir reconnaître et exploiter des configurations géométriques dans lesquelles figurent des angles droits. La construction des diagonales d'un losange permet d'obtenir l'angle droit à construire.

Quelques figures-clefs peuvent être utilisées : le demi-cercle et son diamètre, la médiatrice d'un segment, la notion de symétrie.

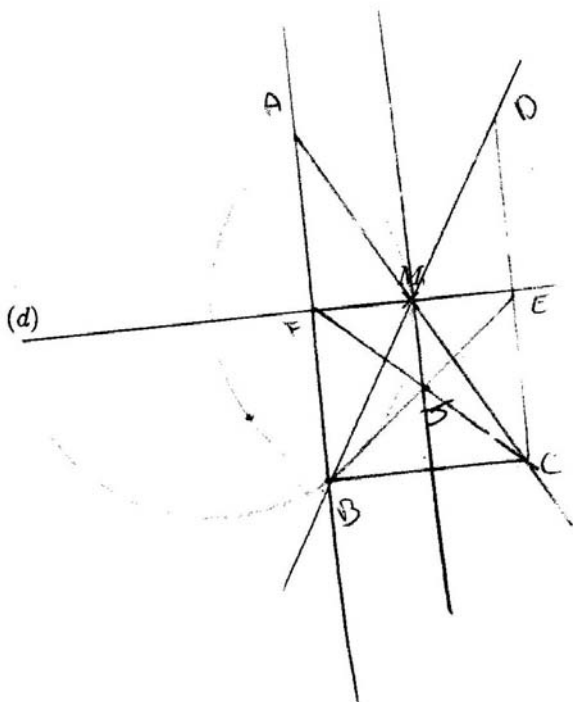
Difficultés rencontrées

- Le fait d'avoir un compas « coincé » impose l'utilisation de cercles de rayon fixé.
- Le compas ne peut être utilisé que trois fois, ce qui minimise le nombre de cercles utilisés.
- Les élèves sont amenés à traiter un problème de construction : il faut également justifier les tracés...

ANALYSES DES PRODUCTIONS

Sur les 19 productions, aucune classe n'a rendu de page blanche ce qui montre la facilité d'aborder cet exercice. Neuf de ces classes ont réalisé des tracés corrects parmi lesquelles certaines ont utilisé :

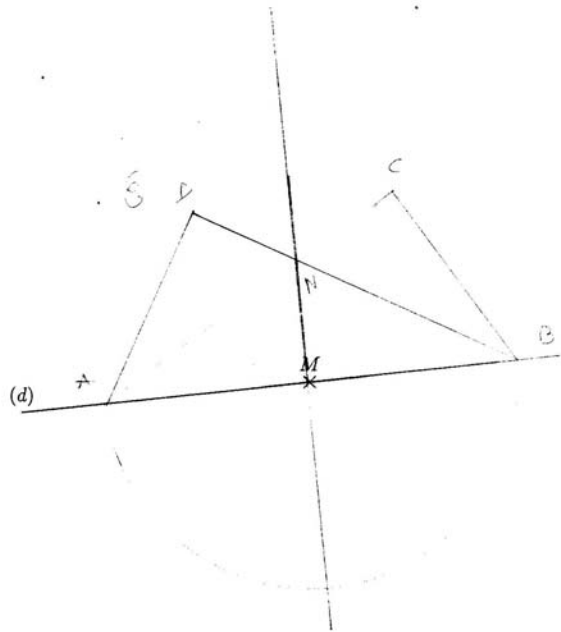
Deux cercles :



Nous avons tracé un cercle de centre M puis un 2^{ème} cercle de centre l'intersection entre le cercle de centre M et la droite (d) . Ils ont le même rayon. Les deux cercles se coupent en deux points A et B équidistants et perpendiculaire à la droite (d) . Ensuite j'ai tracé deux droites passant par les points d'intersection et le point M . Ces droites coupent le 1^{er} cercle en deux points C et D . Les segments $[BD]$ et $[AC]$ sont de même mesure et se coupent en leur milieu M donc c'est un rectangle. F et E sont les milieux de $[AD]$ et $[CD]$. Je trace les diagonales du rectangle $FEBC$. Je sais que M est le milieu de $[FE]$. Dans le rectangle $FEBC$: si un quadrilatère est un rectangle alors ses diagonales sont de même mesure et se coupent en leur milieu. Donc $FJ = JE$. Dans le triangle FJE isocèle en J , M appartient à $[FE]$. Une médiatrice est une droite qui passe par le milieu d'un côté d'un triangle et le point opposé. Donc (MJ) est la médiatrice de $[FE]$. Je sais que FEJ est isocèle donc la médiatrice issue du sommet principal est aussi hauteur. Donc $[JM]$ est perpendiculaire à (d) .

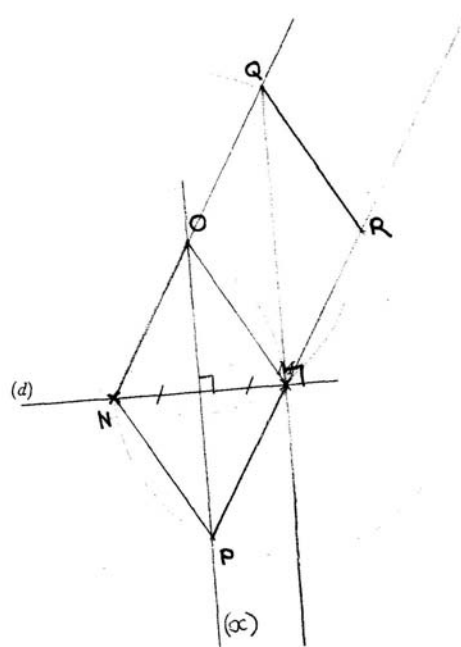
Trois cercles :

- avec exploitation des propriétés de la symétrie par rapport à une droite mais avec une confusion avec la symétrie centrale.



On trace un cercle \mathcal{C} de centre M. Ce cercle coupe la droite (d) en A et B. C et D coupent le cercle \mathcal{C} . Pour cela on a pointé le compas sur A et on a tracé D, puis sur B pour tracer C. On a ensuite construit les triangles ABD et ABC. Ils sont rectangles d'après la propriété du triangle rectangle et du cercle (hypoténuse extrémités du triangle). Ces 2 triangles se coupent au point M. AD M et CB M sont symétriques par rapport au point N. On trace $[NM]$. $[NM]$ est perpendiculaire en M.

- avec un losange et ses diagonales perpendiculaires (à rapprocher de la solution « experte » avec 3 cercles)



Je prend un quelconque écartement de compas avec lequel je trace un 1^{er} cercle de centre N. J'appelle N, le point d'intersection du 1^{er} cercle et de la droite (d).

Je construis un 2^e cercle de centre N, je trace une droite (oc) passant par les points d'intersection O et P de ces 2 cercles. Cette droite est la médiatrice du segment (NP) car elle passe par le milieu (M) et est perpendiculaire à ce même segment.

Je trace le losange NONP puis je prolonge la droite (NO) et (PN). O est le centre du 3^e cercle et Q le point d'intersection de (NO) et de ce même cercle.

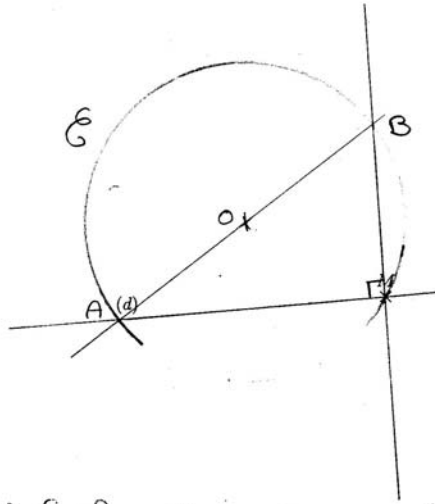
R le point d'intersection du 1^{er} cercle et de (PN).

Je construis le losange OQNR et je trace la diagonale QN qui est parallèle à (OP). ↘

Je sais que (OP) est perpendiculaire à (d) et si deux droites sont parallèles toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

Donc (QN) est la perpendiculaire à (d) passant par N.

Un cercle (si l'utilisation de la pointe sèche du compas n'est pas comptabilisée) :



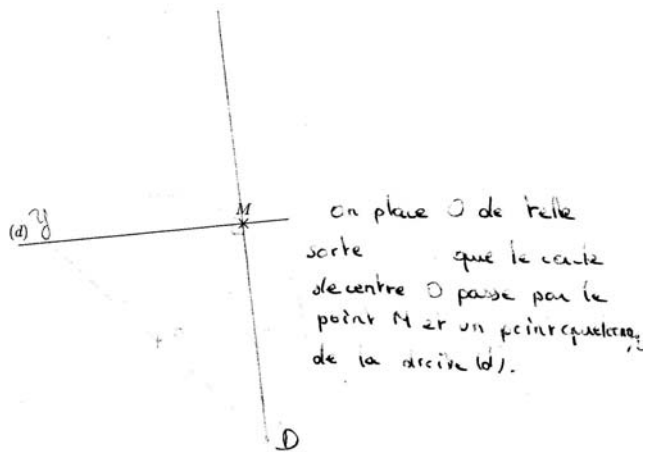
On trace le cercle \mathcal{C} tel que M appartienne au cercle de centre O . La droite (d) coupe \mathcal{C} en A . On trace le diamètre $[AB]$ à partir du point O et A .

La droite (AB) coupe \mathcal{C} en B , on trace (BM) .

D'après la propriété : Un triangle inscrit dans un cercle, qui a pour diamètre un côté du triangle, est rectangle. Or le triangle ABM est inscrit dans le cercle \mathcal{C} de diamètre $[AB]$ donc ABM est un triangle rectangle.

$(BM) \perp (AM)$ $(BM) \perp (d)$

Beaucoup d'erreurs ont été dues au non-respect de l'écartement imposé pour le compas :



Afin de tracer la perpendiculaire de (d) passant par M , on utilise la propriété suivante :

Un triangle est rectangle si son plus grand côté est le diamètre de son cercle circonscrit.

L'angle droit devant être opposé à l'hypoténuse. L'hypoténuse doit passer par le centre du cercle et par le point de (d) par lequel le cercle coupe (d) . On nomme ce point y . Le point diamétralement opposé à y sera S . Pour trouver la perpendiculaire à (d) passant par M , il suffit de tracer la droite passant par M et D .

On obtient alors la droite désirée.

PROLONGEMENTS

- La première possibilité est l'étude d'une production où une consigne n'a pas été respectée, par exemple l'écartement fixe du compas.
- Cet exercice peut aussi permettre la mise en place progressive des problèmes de construction qui restent au stade de l'initiation en 3^{ème} et 2^{nde}.

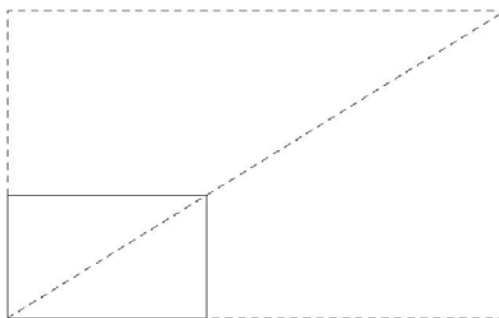
RECTANGLE D'OR

ANALYSE A PRIORI

Il s'agit ici de construire deux rectangles de mêmes proportions qu'un rectangle d'or donné.

Il est nécessaire de bien maîtriser les notions d'agrandissement et de réduction et penser à utiliser les « figures-clés » du théorème de Thalès. L'absence de règle graduée empêche toute mesure de longueur. Signalons également que le nombre d'or est un nombre algébrique ce qui montre que le rectangle d'or est constructible à la règle et au compas sans modèle.

La reconnaissance d'une configuration « prototypique »



est essentielle pour profiter de la donnée du rectangle d'or construit.

ANALYSE DE PRODUCTION

Cet exercice a été mal réussi.

La première remarque est que nombre de groupes ont tenté de faire les constructions sans avoir recours au modèle donné par l'énoncé. Il semble que l'expression « exemple de rectangle d'or » les a rendus méfiants (ils n'ont pas estimé que la figure donnée était exacte).

Ils ont alors préféré chercher une valeur numérique approchée du nombre d'or et se sont lancés dans des constructions approximatives (nécessitant d'ailleurs le plus souvent une règle graduée) sans pour autant que les recherches n'aboutissent à la construction de « rectangle d'or » ...

Ceux qui ont respecté la consigne ont au contraire souvent obtenu des constructions précises, mais ils ne représentent que 15% environ des groupes. A noter un groupe ayant proposé une construction correcte d'un rectangle d'or à partir d'un carré, sans doute vue dans un exercice préalable, mais hélas non justifiée.

PROLONGEMENT

Pour une utilisation en classe, il semble qu'une formulation plus précise soit nécessaire. L'occasion est sans doute parfaite pour distinguer figure donnée « à main levée » et modèle.

La définition d'un rectangle d'or peut aussi être donnée par une note à la fin de l'exercice afin que les élèves ne soient pas tentés d'utiliser une valeur approchée du nombre d'or.

Une question possible : un rectangle dont la largeur et la longueur sont somme respectivement de deux largeurs et de deux longueurs de deux rectangles d'or est-il un rectangle d'or ?

TOUR SA PEUR

ANALYSE A PRIORI

L'exercice a été choisi afin que les élèves réalisent un problème de dénombrement dans le cadre d'une situation de l'espace. Le premier objet de l'espace choisi fut un cube d'arête 2, très vite nous avons trouvé la situation compliquée tant au niveau de la situation spatiale que du comptage. C'est pourquoi nous avons choisi la tour à deux cubes, configuration simple de l'espace, pour initialiser le procédé à mettre en œuvre. La deuxième tour étant proposée, pour que l'élève réinvestisse sa démarche dans une situation plus complexe (mais c'est peut-être un piège !).

Dans un premier temps, il convient que l'élève sache se repérer dans l'espace, puis comment se déplacer dans l'espace pour réaliser le chemin le plus court. Il s'agit de constater que tous les chemins, respectant le sens indiqué ont la même longueur, c'est-à-dire le même nombre d'arêtes.

Lorsque l'élève a compris ce qu'est un plus court chemin, il doit mettre en œuvre un algorithme de comptage. Différentes procédures peuvent être utilisées : faire un comptage du nombre de chemins arrivant à chaque nœud, réaliser un arbre des différents chemins en désignant le point de départ et le point d'arrivée, résoudre les équations du type $x + y + z = 4$ dans l'ensemble des entiers naturels, compter le nombre de codes que l'on peut écrire avec deux lettres V une lettre H et une lettre P, par exemple VVHP pour la première tour. V, H, P désignant les trois directions de l'espace.

ANALYSES DES PRODUCTIONS

Cet exercice a été globalement bien réussi.

Une réponse est donnée dans les vingt quatre productions de classes. Sept donnent une bonne réponse, quatorze donnent une bonne réponse pour la première tour.

Deux stratégies apparaissent : méthode de l'arbre en désignant les différents sommets utilisés et comptage direct avec schéma des chemins. Aucune n'utilise un codage du type VVHP.

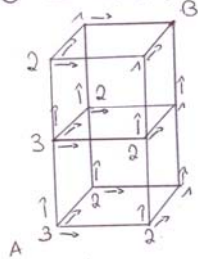
Un exemple de comptage qui n'aboutit pas

⊗ On a représenté la tour 1 et 2 avec à chaque arête le nombre de possibilités. Puis nous les avons additionnées pour trouver le nombre total de ces possibilités et donc le nombre de jours.

- Pour la tour 1, le chemin le plus court pour le pompier est de 4 arrêtes.

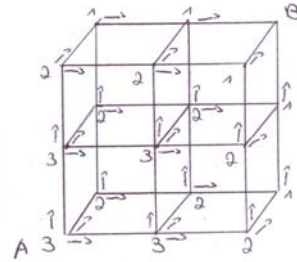
- Pour la tour 2, le chemin le plus court pour le pompier est de 5 arrêtes.

⊗ Schéma :



On additionne le nombre total de possibilités. Ce qui nous donne :
 $3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20$

Donc le sapeur pompier empruntera 20 chemins différents donc il mettra 20 jours pour la tour 1.



On additionne le nombre total possibilités. Ce qui nous donne
 $3 + 3 + 2 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 = 33$

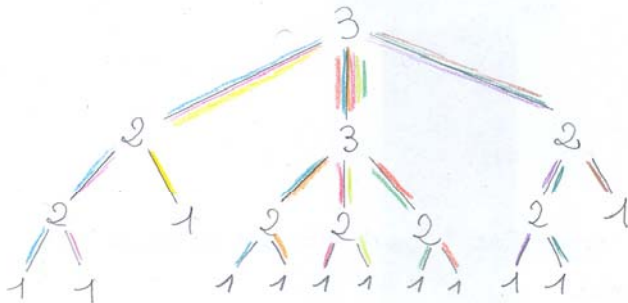
Donc le sapeur pompier empruntera 33 chemins différents donc il mettra 33 jours pour la tour 2.

Le nombre de possibilités = le nombre d'arrêtes

Un exemple de comptage qui donne une bonne réponse :

Tour 1 :

Nous déclinons à chaque sommet le nombre de possibilités du sapeur. On en déduit l'arbre suivant :

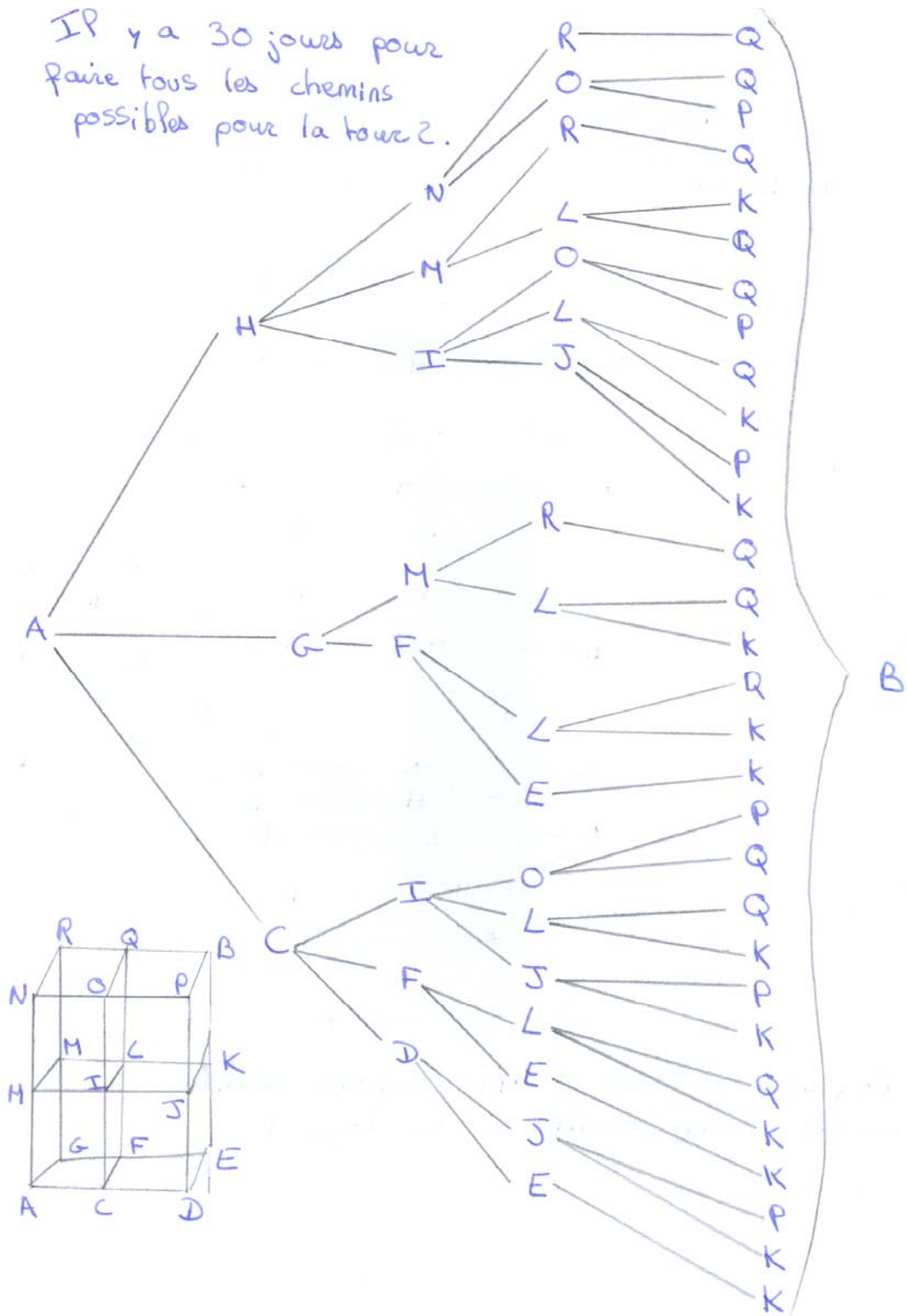


Comme il y a 12 sorties "1", représentant le point B.

On peut en déduire 12 possibilités pour le sapeur Timmas.

Il lui faudra donc 12 jours pour réaliser tous les chemins les plus courts possibles sur la tour 1.

Un exemple d'utilisation d'arbre avec indication des sommets :



PROLONGEMENT

L'étude d'objets de l'espace est réalisée dès la classe de sixième. En seconde, on est amené à mettre en évidence les différents axiomes, permettant de réaliser des démonstrations de propriétés.

Cette vision de l'espace n'est pas évidente pour certains élèves, c'est pourquoi il est souhaitable de réaliser de tels objets de l'espace en utilisant des tiges et de la pâte à modeler (par exemple). Il est possible de transposer un problème en autre problème, par exemple comment passer d'un chemin de l'espace à un code et réciproquement ? Ce qui nous amène à déterminer le nombre de codes dans différentes situations.

Ce travail peut être complété en utilisant d'autres configurations de l'espace, par exemple déterminer le nombre de chemins sur les arêtes d'un cube composé de huit petits cubes.

Cet exercice peut donner l'occasion de travailler sur les liens logiques rencontrés en mathématique (et, ou, ou bien).

Dans le domaine de résolution d'équations, il est possible de déterminer l'ensemble des entiers naturels vérifiant certaines relations : $x + y = n$, $x + y + z = n$ où n désigne un entier naturel.