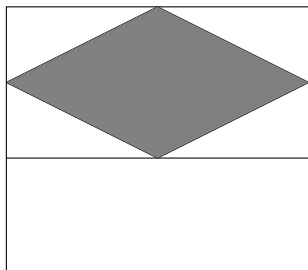


1 - Drapeau

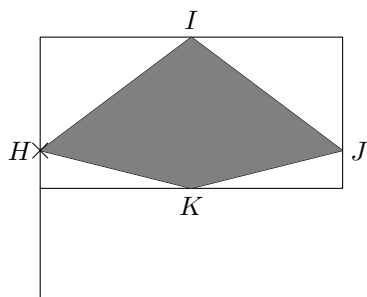
Réponses proposées :

Premier cas : aucun sommet n'est imposé :



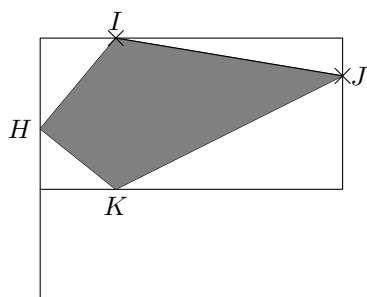
Une solution évidente consiste à relier les milieux des quatre côtés du rectangle.

Deuxième cas : un sommet H du quadrilatère est déjà placé :



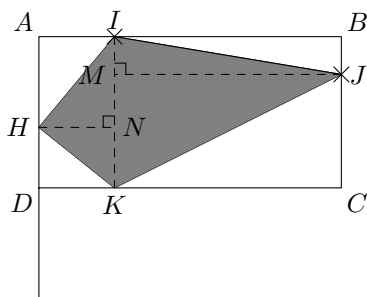
Une solution consiste à choisir J de façon à ce que (HJ) soit parallèle à une droite contenant un côté du drapeau.

Troisième cas : deux sommets I et J du quadrilatère sont déjà placés :



Une solution consiste à choisir K de façon à ce que (IK) soit parallèle à une droite contenant un côté du drapeau.

Dans les trois cas ci-dessus, les modèles de drapeaux proposés sont conformes aux vœux du club Lyrle. On peut le vérifier aisément, par exemple dans le troisième cas :



les aires des triangles rectangles gris IMJ , JMK , NHK , INH , sont respectivement égales aux aires des triangles rectangles blancs IBJ , JCK , DKH , IAH .

Comment obtenir toutes les solutions ?

• Méthode analytique

On nomme certaines longueurs, par exemple $AI = x$, $AH = y$, $DK = t$ et $BJ = h$.

On prend également $AB = L$ et $AD = \ell$.

On traduit alors que l'aire de la partie blanche doit être la moitié de l'aire du rectangle.

En multipliant tout par 2, on obtient :

$$L \times \ell = xy + (\ell - y)t + (L - t)(\ell - h) + h(L - x)$$

Puis, après développement :

$$xy - yt + th - hx = 0, \text{ soit } y(x - t) + h(t - x) = 0;$$

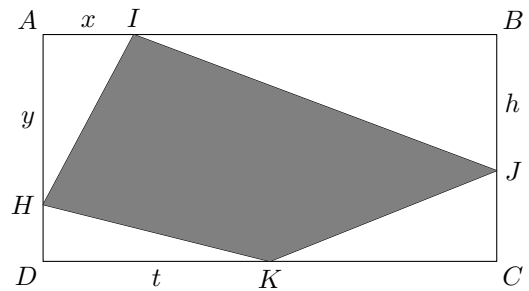
$$\text{d'où } (y - h)(x - t) = 0.$$

On en déduit que $y = h$ ou $x = t$.

Donc il faut que $AH = BJ$ ou que $AI = DK$.

Réciproquement, on vérifie comme précédemment, que si $AH = BJ$ ou que $AI = DK$, alors le modèle convient.

Conclusion : les modèles répondant aux contraintes du club Lyrale sont ceux tels que les droites (IK) et (BC) , ou les droites (HJ) et (AB) sont parallèles.



• Méthode géométrique (dans le cas de la disposition ci-dessous)

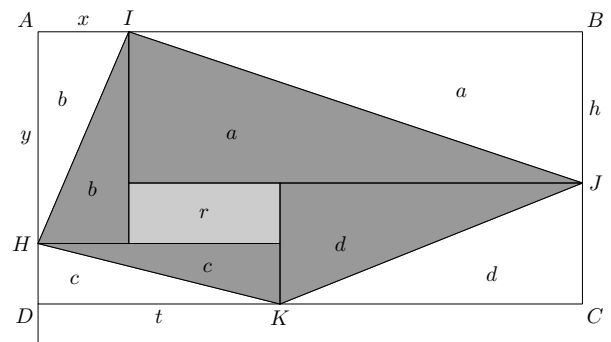
On partage le quadrilatère $HIJK$ par des segments parallèles aux côtés du rectangle.

Pour la configuration ci-contre :

$$Aire_{blanche} = a + b + c + d$$

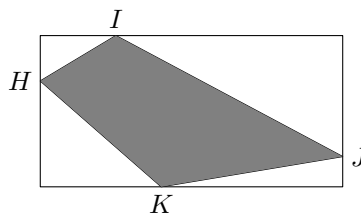
$$Aire_{grise} = a + b + c + d + r$$

Pour que les deux aires soient égales, il faut et il suffit que l'aire du petit rectangle intérieur soit nulle. Les droites (IK) et (BC) , ou les droites (HJ) et (AB) doivent être parallèles.



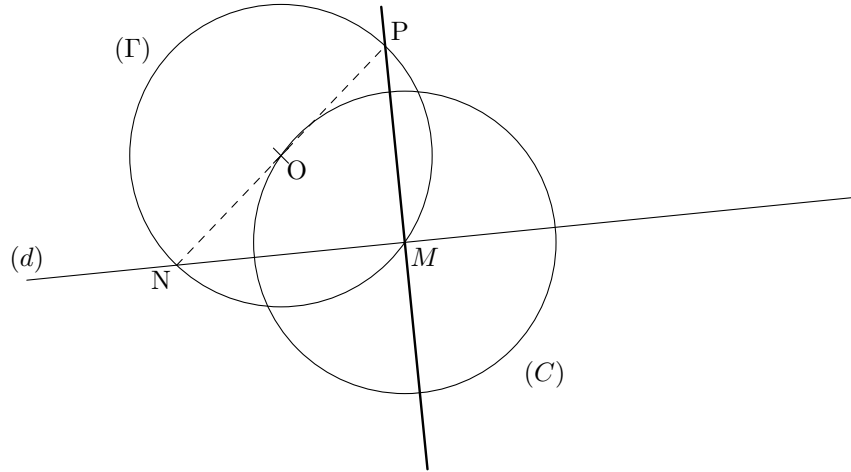
Remarque : l'ensemble de toutes les solutions n'était pas demandé aux élèves ; il leur était seulement demandé d'émettre une proposition de drapeau répondant aux vœux du club dans trois cas.

La méthode analytique proposée permet de déterminer l'ensemble des solutions. Par contre, dans la méthode géométrique, une disposition particulière est étudiée ici. Il reste à envisager la disposition ci-dessous :



2 - Problème de matériel

- Une solution avec deux cercles :



Soit (C) le cercle de centre M et de rayon r (r imposé par l'ouverture du compas).

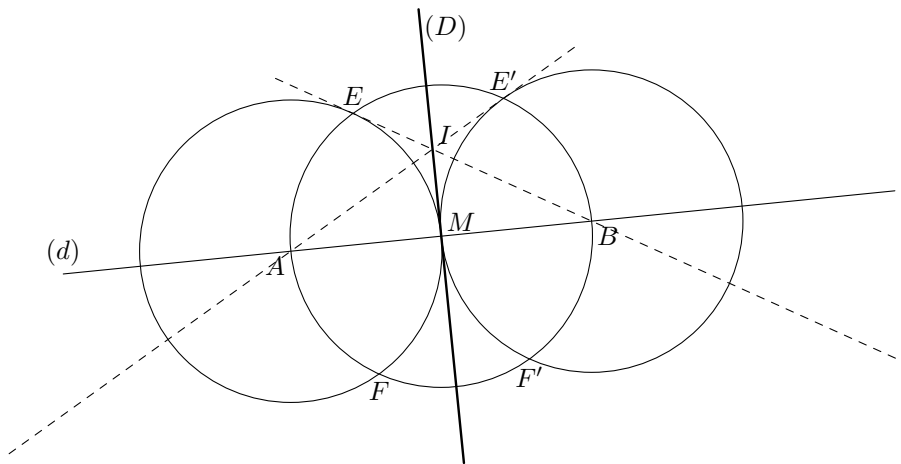
Soit O un point de (C) et (Γ) le cercle de centre O et de rayon r .

Le cercle (Γ) contient M , il coupe la droite (d) en M et en un deuxième point appelé N .

Soit P le point du cercle (Γ) diamétralement opposé à N . Le triangle MNP est alors rectangle en M , et par conséquent, la droite (MP) est perpendiculaire à la droite (d) .

La droite (MP) est la droite perpendiculaire à la droite (d) passant par le point M .

- Une solution avec trois cercles :



Notons (D) la droite cherchée, c'est-à-dire la droite perpendiculaire en M à la droite (d) .

Le cercle (C) de centre M et de rayon r , (r imposé par l'ouverture du compas), coupe la droite (d) en deux points A et B . Les points A et B sont symétriques par rapport à la droite (D) .

Soit (C_A) et (C_B) les cercles de rayon r et de centres respectifs A et B . Ces deux cercles sont symétriques par rapport à la droite (D) , et le cercle (C) est son propre symétrique par rapport à la droite (D) . On en déduit que les points d'intersection des cercles (C) et (C_A) (notés E et F) ont pour symétriques par rapport à (D) les points d'intersection des cercles (C) et (C_B) (notés E' et F'). Par conséquent, les droites $(E'A)$ et (EB) sont symétriques par rapport à (D) et se coupent donc en un point I de (D) .

La droite (IM) est la droite perpendiculaire à la droite (d) passant par le point M .

3 - Croix dans l'espace

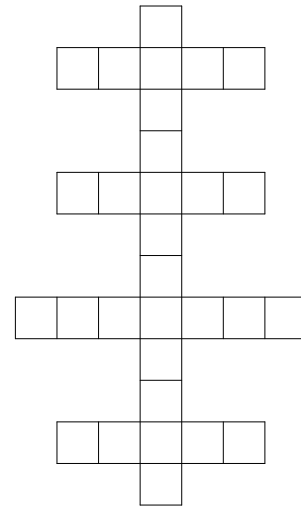
Voici un patron possible :

Les côtés de chaque carré mesurent 2,4 cm.

La largeur maximale est de $7 \times 2,4$, soit 16,8 cm.

La longueur maximale est de $12 \times 2,4$, soit 28,8 cm.

Ce patron tient bien dans une feuille de format A4.

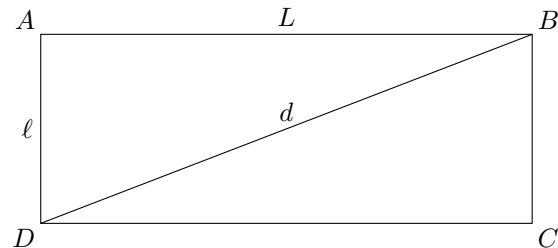


4 - Piscine

La propriété de Pythagore dans le triangle ABD rectangle en A permet d'écrire :

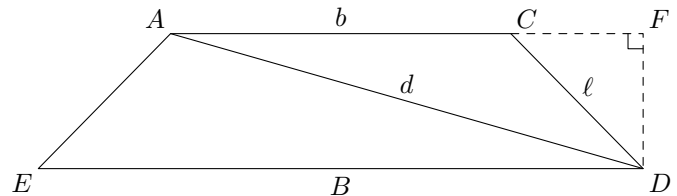
$$BD^2 = AB^2 + AD^2$$

D'où : $\boxed{L^2 = d^2 - \ell^2}$



La propriété de Pythagore utilisée dans les triangles AFD et CFD rectangles en F permet d'écrire :

$$\begin{cases} FD^2 = AD^2 - AF^2 \\ FD^2 = CD^2 - CF^2 \end{cases}$$



On en déduit successivement :

$$AD^2 - AF^2 = CD^2 - CF^2$$

$$AD^2 - (AC + CF)^2 = CD^2 - CF^2$$

$$AD^2 - AC^2 - 2 \times AC \times CF - CF^2 = CD^2 - CF^2$$

$$d^2 - b^2 - 2 \times b \times \frac{B-b}{2} = \ell^2$$

$$d^2 - b \times B = \ell^2, \text{ soit finalement : } \boxed{B \times b = d^2 - \ell^2}$$

Les deux formules utilisées sont donc exactes.

Un trapèze existe si et seulement si $\frac{B-b}{2} < \ell$, et sachant que $\ell = 5$, sa diagonale est égale à 13 si et seulement si $B \times b = 144$, B et b étant des entiers tels que $b \leq B$.

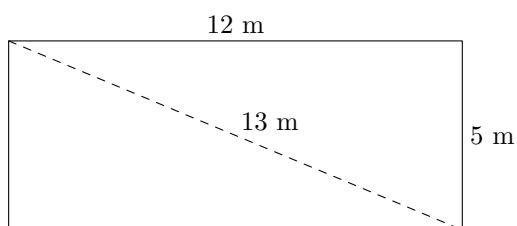
On trouve alors les valeurs possibles pour B et b en déterminant l'ensemble des diviseurs de 144 :

$$\left\{ \begin{array}{l} B = 144 \\ b = 1 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} B = 72 \\ b = 2 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} B = 48 \\ b = 3 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} B = 36 \\ b = 4 \end{array} \right. \quad \text{ou} \\ \left\{ \begin{array}{l} B = 24 \\ b = 6 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} B = 18 \\ b = 8 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} B = 16 \\ b = 9 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} B = 12 \\ b = 12 \end{array} \right.$$

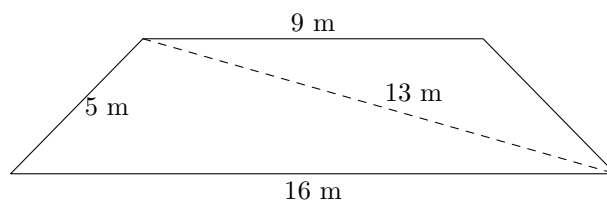
La condition $\frac{B-b}{2} < \ell$ nous donne comme seules solutions les couples (16; 9) et (12; 12).

Conclusion : François a le choix entre les deux piscines représentées ci-dessous :

Solution lorsque la surface est un rectangle :



Solution lorsque la surface est un trapèze isocèle :



5 - Boissons fraîches

Les hypothèses sont :

- (1) Freddy a plus de deux euros en poche;
- (2) Freddy ne peut réunir exactement la somme de deux euros;
- (3) Freddy a la plus grande somme permettant (2).

Recensons le nombre de pièces de chaque valeur que Freddy peut avoir en poche, en cherchant à obtenir la somme maximale.

- Pièces de 2 euros : Freddy n'en a aucune d'après (2).
- Pièces de 1 euro : Freddy en a au maximum une d'après (2).
- Pièces de 0,50 euro : Freddy en a une seule s'il a une pièce de un euro d'après (2), ou Freddy en a au maximum trois s'il n'a aucune pièce de un euro. Dans les deux cas, il possède déjà 1,5 euro.
- Pièces de 0,20 euro : Freddy en a au maximum quatre d'après (2). La condition (1) est alors réalisée puisque Freddy a maintenant 2,30 euros.
- Pièces de 0,10 euro : si Freddy en a une, il peut faire l'appoint avec 1,5 euro et deux pièces de 0,20 euro.
- Pièces de 0,05 euro : Freddy ne peut en avoir qu'une seule, puisqu'une seconde lui permettrait de faire l'appoint. Freddy a maintenant 2,35 euros.
- Pièces de 0,02 euro : Freddy en a au maximum quatre d'après (2). Il a maintenant 2,43 euros.
- Pièces de 0,01 euro : si Freddy en a une, il peut faire l'appoint avec 1,5 euro, deux pièces de 0,20 euro, la pièce de 0,05 euro et deux pièces de 0,02 euro. Freddy n'a donc aucune pièce de 0,01 euro.

La somme maximale que Freddy peut avoir en poche est 2,43 euros.

Il peut avoir : $1 + 0,50 + 4 \times 0,20 + 0,05 + 4 \times 0,02$ ou $3 \times 0,50 + 4 \times 0,20 + 0,05 + 4 \times 0,02$.

Il va donc payer sa cannette $1,5 + 2 \times 0,20 + 0,05 + 3 \times 0,02$, soit 2,01 euros.

Il restera donc à Freddy 0,42 euro.

6 - Un problème de robinet

Méthode 1 :

Rappelons les trois hypothèses :

1. En ouvrant le robinet n°1 pendant 1 h 20 min et le robinet n°2 pendant 2 h 20 min, il remplit entièrement son bassin.
 2. En ouvrant le robinet n°1 pendant 2 h 30 min et le robinet n°3 pendant 1 h 30 min, il remplit le bassin à moitié.
 3. En ouvrant le robinet n°2 pendant 1 h, il remplit entièrement le bassin au tiers.
- D'après l'hypothèse 3., le robinet n°2 remplit, en une heure, $\frac{1}{3}$ du bassin ; en 20 min, il en remplit donc $\frac{1}{9}$, et en 2h 20 min, $\frac{2}{3} + \frac{1}{9}$, soit $\frac{7}{9}$.
- On en déduit, d'après l'hypothèse 1., que le robinet n°1 remplit, en 1 h 20 min, $\frac{2}{9}$ du bassin, soit en 1 h, $\frac{2}{9} \times \frac{3}{4}$ ou $\frac{1}{6}$.
- En 2 h 30 min, Le robinet n°1 remplit donc $2,5 \times \frac{1}{6}$ du bassin, c'est-à-dire $\frac{5}{12}$ du bassin. L'hypothèse 2. permet alors de dire que le robinet n°3 remplit $\frac{1}{12}$ du bassin en 1 h 30 min, soit $\frac{1}{12} \times \frac{2}{3}$ ou $\frac{1}{18}$ en 1 h.

Récapitulons : en une heure, en ouvrant tous les robinets, le bassin se remplit de $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$, soit $\frac{10}{18}$. Pour le remplir entièrement, il faut donc : $\frac{18}{10} \times 1$ heure, soit 1 h 48 min.

Si Paul ouvre les trois robinets, le bassin sera rempli au bout de 1 h 48 min.

Méthode 2 :

Soit d_1 le débit du premier robinet, d_2 le débit du deuxième robinet, d_3 le débit du troisième robinet (ces débits étant exprimés en litres par minute), et V le volume du bassin (exprimé en litres).

Les durées sont exprimées en minutes.

$$\left\{ \begin{array}{l} 80d_1 + 140d_2 = V \\ 150d_1 + 90d_3 = \frac{V}{2} \\ 60d_2 = \frac{V}{3} \end{array} \right. \quad \text{soit} \quad \left\{ \begin{array}{l} 80d_1 + 140d_2 = V \\ 300d_1 + 180d_3 = V \\ 180d_2 = V \end{array} \right.$$

$$\text{D'où : } \left\{ \begin{array}{l} d_2 = \frac{V}{180} \\ d_1 = \frac{V}{360} \\ d_3 = \frac{V}{1080} \end{array} \right.$$

$$\text{Le temps mis pour remplir le bassin est : } t = \frac{V}{d_1 + d_2 + d_3}, \quad t = \frac{V}{\frac{V}{180} + \frac{V}{360} + \frac{V}{1080}}.$$

$$\text{On a } t = \frac{1080}{10}, \quad t = 108, \text{ soit 1 h 48 min.}$$

Si Paul ouvre les trois robinets, le bassin sera rempli au bout de 1 h 48 min.

7 - Météo

Notons a, b, c, d les nombres de jours où il est tombé respectivement 0, 1, 2, 5 mm de pluie.

Les hypothèses sont :

- Nous sommes en octobre, mois de 31 jours, donc $a + b + c + d = 31$
- les nombres $a, a + b, a + b + c$ forment une suite strictement croissante de nombres premiers (b, c et d ne sont pas nuls).
- La hauteur d'eau totale $b + 2c + 5d$ est un nombre impair.

Les nombres premiers sont tous impairs sauf le premier d'entre eux : 2

$a + b$ et $a + b + c$ sont donc des nombres impairs. Leur différence est c , donc c **est pair**.

Comme $a + b + c + d = 31$, $a + b + c + d$ est impair, et comme $a + b + c$ est également impair, on en déduit que d **est pair**.

c et d étant pairs, $2c + 5d$ est aussi pair, et comme $b + 2c + 5d$ est impair, on en déduit que b **est impair**.

Enfin, $a + b$ est impair et b est impair, donc a **est pair**. Par ailleurs a est premier. Donc $a = 2$.

Conclusion : le nombre de jours sans pluie est toujours égal à 2

Remarques :

On peut trouver plusieurs solutions, par exemple :

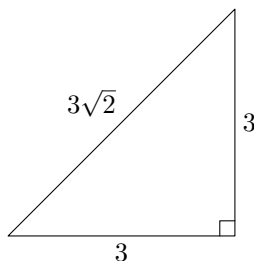
Hauteur (en mm)	0	1	2	5
Nombres de jours	2	3	18	8

La hauteur d'eau totale est alors de 79 mm

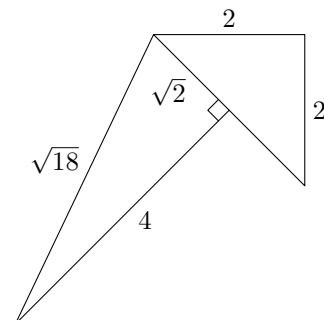
8 - Patron d'un solide

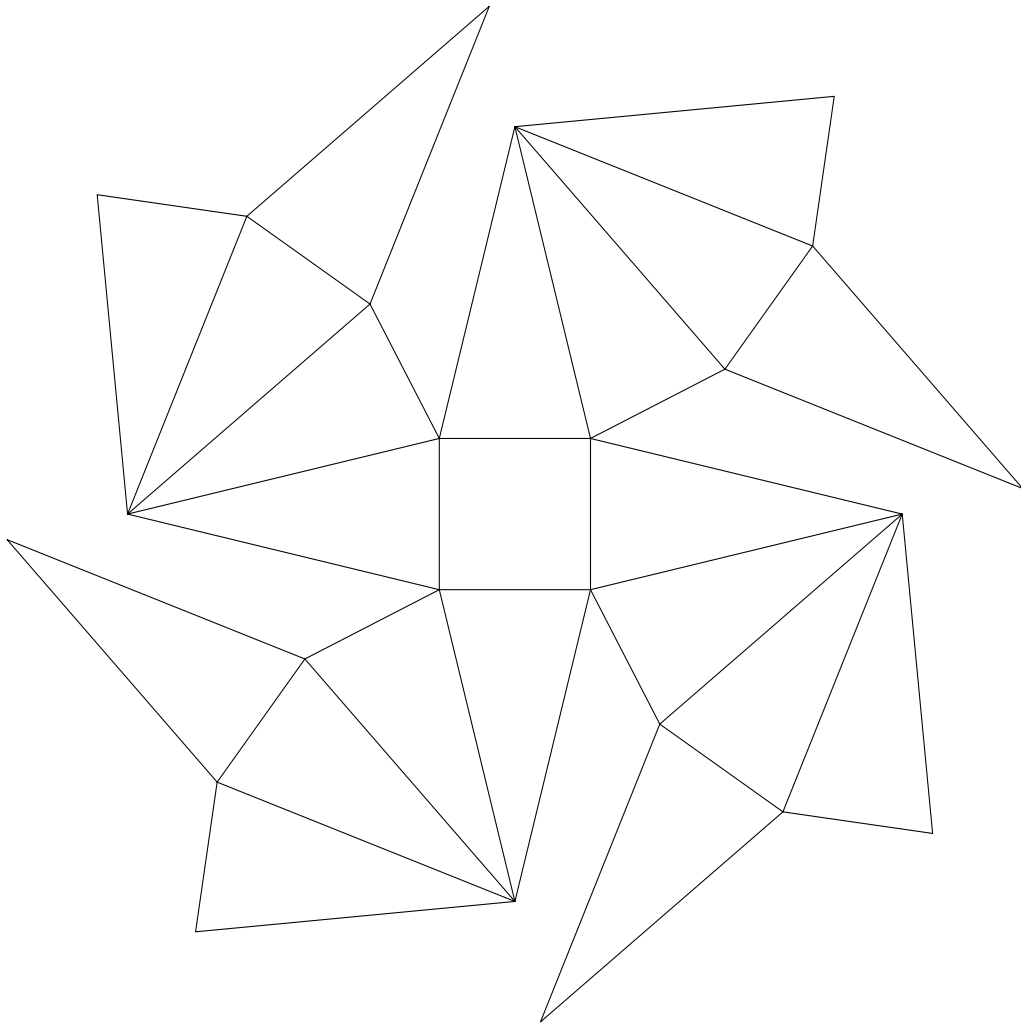
La base des pyramides est un carré de côté 2 cm et les quatre autres faces sont des triangles isocèles, les côtés de même longueur mesurant $3\sqrt{2}$ cm.

Un segment de longueur $3\sqrt{2}$ peut être construit comme ci-dessous :



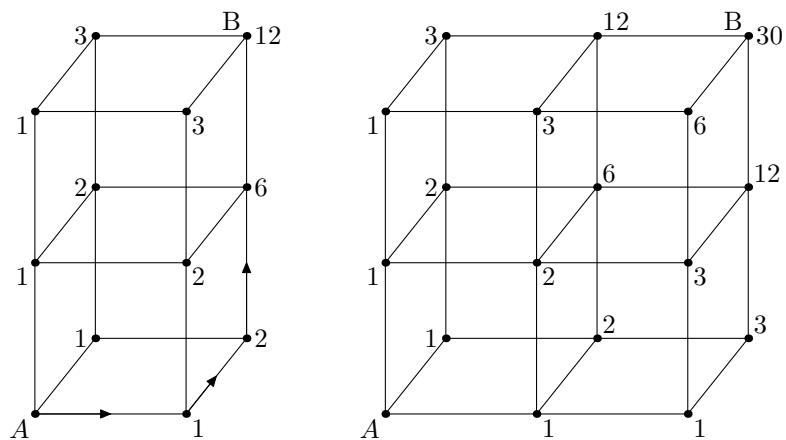
ou





9 - Tour SA PEUR

Pour la tour 1, on note à chaque « nœud » du réseau le nombre de chemins qui y arrivent. Pour la tour 2, on fait de même.



Il faudra donc à Tinmar 12 jours pour réaliser tous les chemins possibles sur la tour 1, et 30 jours pour réaliser tous les chemins possibles sur la tour 2.