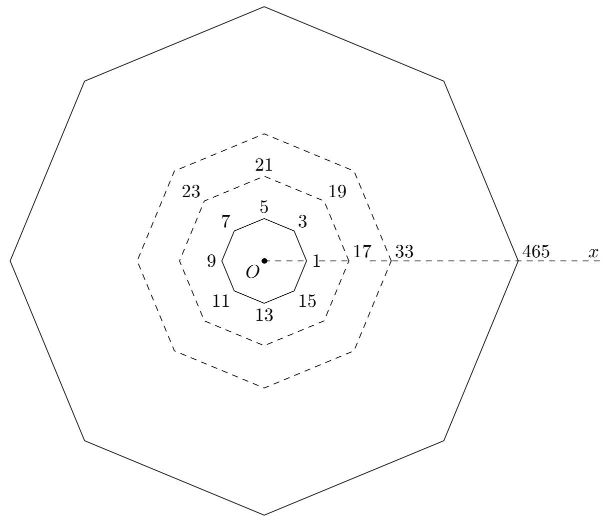
1 - Toile de nombres

Les nombres peuvent être placés à chaque sommet des octogones en deux étapes :

Première étape :

Sur chaque sommet, on place les nombres impairs successifs tels que, à chaque passage d'octogone, les plus petits nombres impairs de chaque octogone soient situés sur la même demi-droite $[Ox)$.

$\boxed{1}$, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, $\boxed{17}$, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, $\boxed{33}$, ...



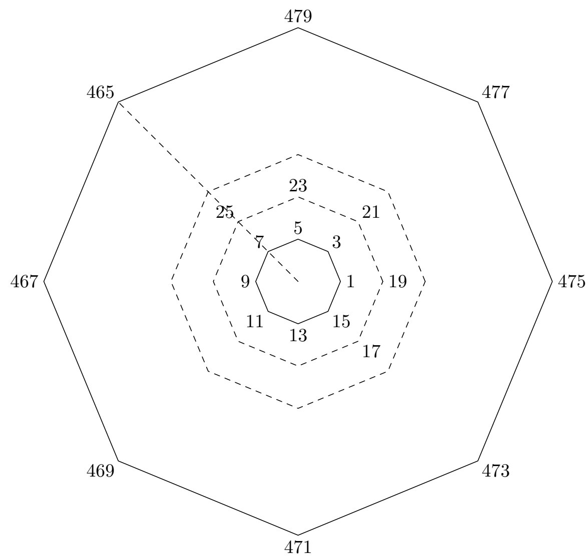
Sur la demi-droite $[Ox)$, on lira successivement 1, 17, 33, ... :

- Entre deux nombres impairs consécutifs, la distance est 2 ;
- Entre deux nombres impairs consécutifs situés sur la demi-droite $[Ox)$, la distance est 16.

Sur $[Ox)$, on a donc : 1, $1+16$, $1+2\times16$, $1+3\times16$, ..., $1+29\times16$.

À la fin de cette première étape, le nombre de la demi-droite $[Ox)$ situé sur le trentième octogone est $1+29\times16$, soit 465. C'est le plus petit des entiers situés sur le trentième octogone.

Deuxième étape :



En passant d'un octogone au suivant, pour placer le plus petit entier de l'octogone, on tourne de 45° dans le sens négatif.

Au trentième octogone, on aura donc tourné de $29\times45°$, soit 1305°.

Or, $1305 = 360\times3+225$, on aura donc tourné de trois tours complets et 225° dans le sens négatif.

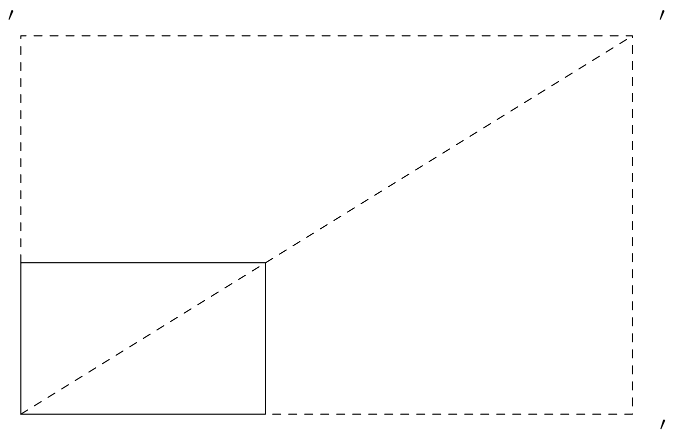
Le nombre 465 sera donc inscrit sur le sommet du trentième octogone aligné avec les sommets correspondant à 7 et 25.

On peut alors placer les autres nombres aux sommets de l'octogone.

2 - Rectangle d'or

Soit $ABCD$ le rectangle donné, $[AC]$ la diagonale, $[AB]$ la longueur, $[AD]$ la largeur.
Soit :

- D' le point de la demi-droite $[AD)$ tel que $AD' = \ell$
- C' le point d'intersection de la droite parallèle à (DC) passant par D' et de (AC)
- B' le point d'intersection de la droite parallèle à (BC) passant par C' et de (AB)



- On montre que $A'B'C'D'$ est un rectangle (il possède trois angles droits).
- En utilisant la propriété de Thalès, d'abord avec les triangles ADC et $AD'C'$, puis avec les triangles ABC et $AB'C'$, on obtient successivement : $\dfrac{D'C'}{DC} = \dfrac{AC'}{AC}$ et $\dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{AC'}{AC}$.
  On en déduit que $\dfrac{D'C'}{DC} = \dfrac{B'C'}{BC}$, puis que $\dfrac{D'C'}{B'C'} = \dfrac{DC}{BC}$.
  Or, par hypothèse, $ABCD$ est un rectangle d'or, donc $\dfrac{DC}{BC} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, d'où $\dfrac{D'C'}{B'C'} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Le rectangle $A'B'C'D'$ ainsi construit est bien un rectangle d'or.

On utilise une démarche analogue pour la deuxième question.

3 - La montre

On travaille par disjonction de cas :

1. Le premier chiffre est 0 : 1, 2, 3 doivent apparaître une fois chacun, donc on a 6 affichages (permutations de 1, 2 et 3).
2. Le premier chiffre est 1 :
   (a) Le deuxième chiffre est 2 : la montre peut indiquer 30, 31, …, 39 minutes (10 choix), mais également 03, 13, 23, 43, 53 minutes, donc 5 nouveaux choix (attention au cas 33 déjà recensé). On a donc finalement 15 affichages.
   (b) Le deuxième chiffre est 3 : on obtient également 15 affichages (même dénombrement).
   (c) Le deuxième chiffre n'est ni 2 ni 3 : la montre peut indiquer 23 ou 32 minutes, il y a 2 choix. On obtient donc 8×2, soit 16 affichages.

   Le deuxième cas permet finalement 46 affichages.
3. Le premier chiffre est 2 :
   (a) Le deuxième chiffre est 1 ou 3 : on obtient également 15 affichages (voir dénombrement précédent).
   (b) Le deuxième chiffre est différent de 1 ou 3 : il est alors égal à 0 ou à 2. La montre peut indiquer 13 ou 31 minutes, il y a 2 choix. On obtient donc 4 affichages.

   Le troisième cas permet finalement $2 \times 15 + 2 \times 2$, soit 34 affichages.

Il y a 86 $(6 + 46 + 34 = 86)$ **affichages où les chiffres 1, 2 et 3 apparaissent simultanément.**

4 - Dé dodécaèdrique

1. Pour gagner en un coup, la seule possibilité est d'obtenir 1.

2. Pour gagner en deux coups, il s'agit d'obtenir deux résultats r_1 et r_2 tels que $\dfrac{1}{r_2}+\dfrac{1}{r_1}=1$.

   On suppose par exemple que $r_1 \leqslant r_2$.
   - r_1 ne peut être strictement supérieur à 2, sinon on aurait $\dfrac{1}{r_2} \leqslant \dfrac{1}{r_1} < \dfrac{1}{2}$, et la somme $\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}$ ne pourrait être égale à 1.
   - On envisage alors les deux cas :
     a) $r_1 = 1$: aucune solution pour r_2.
     b) $r_1 = 2$: $r_2 = 2$

   Pour gagner en deux coups, la seule possibilité est la série (2 ; 2).

3. Pour gagner en trois coups, il s'agit d'obtenir trois résultats r_1, r_2 et r_3 tels que $\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}+\dfrac{1}{r_3}=1$.

   On suppose par exemple que $r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3$.
   - On montre comme précédemment que r_1 ne peut être strictement supérieur à 3.
   - On envisage alors les trois cas :
     a) $r_1 = 1$: aucune solution pour r_2 et r_3.
     b) $r_1 = 2$: r_2 et r_3 vérifient $\begin{cases} \dfrac{1}{r_2} + \dfrac{1}{r_3} = \dfrac{1}{2} \\ 2 \leqslant r_2 \leqslant r_3 \end{cases}$
     Par un raisonnement analogue à celui du 2., on montre que $r_2 \leqslant 4$, puis on étudie les différents cas :
     – $r_2 = 2$: aucune solution pour r_3.
     – $r_2 = 3$: $r_3 = 6$
     – $r_2 = 4$: $r_3 = 4$
     c) $r_1 = 3$: r_2 et r_3 vérifient $\begin{cases} \dfrac{1}{r_2} + \dfrac{1}{r_3} = \dfrac{2}{3} \\ 3 \leqslant r_2 \leqslant r_3 \end{cases}$
     On montre que $r_2 \leqslant 3$, on en déduit que $r_3 = 3$.
     La série (3 ; 3 ; 3) est éliminée à cause de la deuxième condition de la règle du jeu.

   Il y a deux possibilités pour gagner en trois coups, les séries (2 ; 3 ; 6) et (2 ; 4 ; 4).

4. On raisonne de manière analogue pour gagner en quatre coups. En notant r_1, r_2, r_3 et r_4 les résultats par ordre croissant, on obtient successivement :
   $r_1 \leqslant 4$, puis :
   – pour $r_1 = 2$, $r_2 \leqslant 6$, etc...
   – pour $r_1 = 3$, $r_2 \leqslant 4$, etc...
   – pour $r_1 = 4$, $r_2 \leqslant 4$, etc...

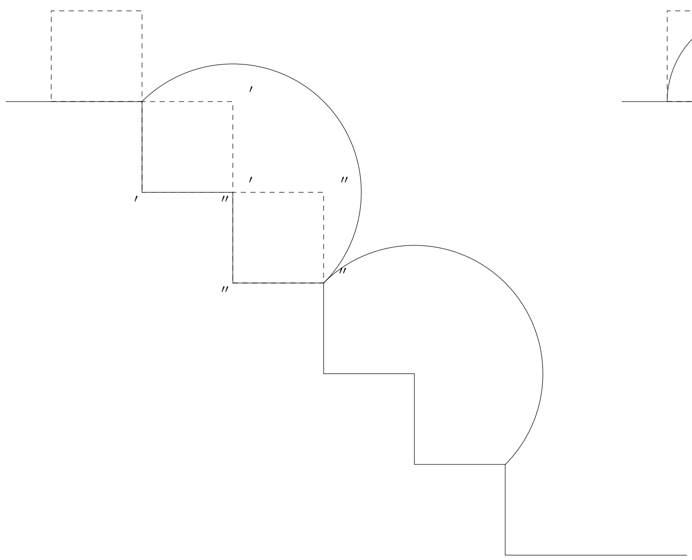
   Il y a sept possibilités pour gagner en quatre coups, les séries (2 ; 3 ; 12 ; 12), (2 ; 4 ; 6 ; 12), (2 ; 4 ; 8 ; 8), (2 ; 5 ; 5 ; 10), (3 ; 3 ; 4 ; 12), (3 ; 3 ; 6 ; 6) et (3 ; 4 ; 4 ; 6).

5 - Escalator

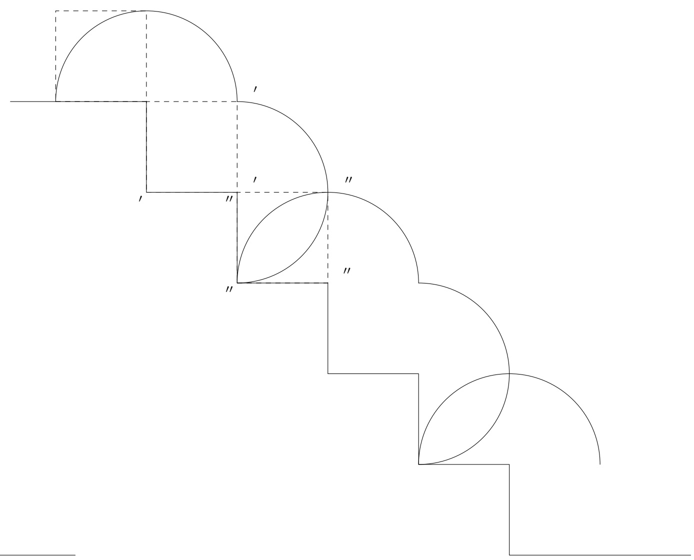
Il suffit de s'intéresser aux trajectoires des sommets qui sont visibles sur le schéma en coupe, les trajectoires des sommets « cachés » étant des images par translation de celles-ci.

Représentons les trajectoires de chacun des sommets :

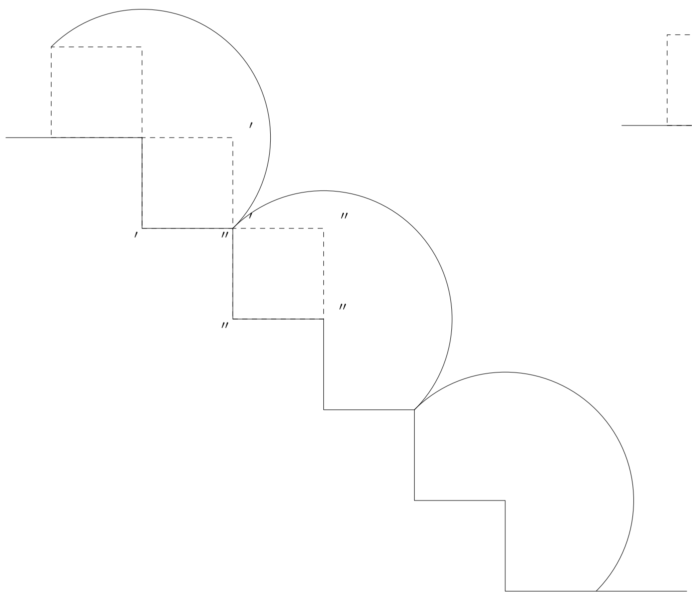
Sommet A



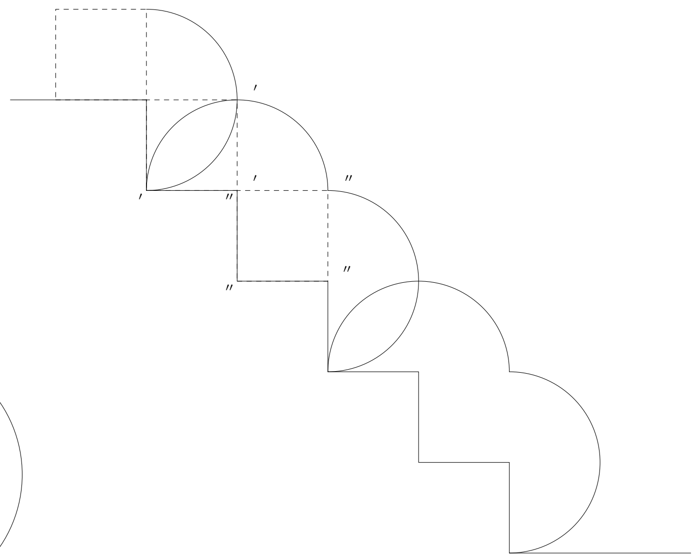
Sommet B



Sommet C



Sommet D



Le sommet A décrit deux demi-cercles de rayon $2\sqrt{2}$ dm, soit $4\sqrt{2}\pi$ dm, les sommets B et D décrivent cinq demi-cercles de rayon 2 dm, soit 10π dm, et le point C décrit trois demi-cercles de rayon $2\sqrt{2}$ dm, soit $6\sqrt{2}\pi$ dm.

Il suffit de remarquer que les sommets A et C parcourent des trajectoires de longueurs différentes pour conclure que **tous les sommets ne parcourent pas la même distance**.

6 - Jeu de dés

Remarquons qu'à la fin de chaque partie, les « gagnants » (c'est-à-dire tous les joueurs sauf le perdant), doublent la somme qu'ils ont devant eux.

Appelons Aline, Bruno, Cédric et Delphine les quatre joueurs, et supposons qu'ils ont perdu une partie tour à tour, dans cet ordre.

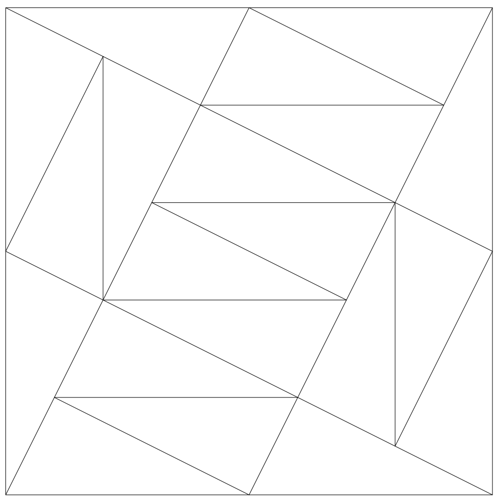
- Delphine a perdu la quatrième partie : or, après cette quatrième partie, Aline, Bruno et Cédric ont chacun 80 €. C'est donc qu'ils avaient 40 € au début de la partie. Delphine, elle, a du payer 40 € à chacun, c'est donc qu'elle possédait auparavant $80 + 3 \times 40$, soit 200 €.
- Cédric a perdu la troisième partie : or, après cette troisième partie, Aline, Bruno et Delphine possédaient respectivement 40 €, 40 € et 200 €. C'est donc qu'ils avaient respectivement 20 €, 20 € et 100 € au début de la partie. Cédric, lui, a du payer $20 \times 2 + 100$, soit 140 €. Il possédait donc auparavant $40 + 140$, soit 180 €.
- Ainsi de suite ...

La répartition des sommes que chacun a devant lui selon les parties est récapitulée dans le tableau ci-dessous. On remplit ce tableau en commençant par la dernière colonne.

	Départ	Après la 1ère partie où Aline perd	Après la 2ème partie où Bruno perd	Après la 3ème partie où Cédric perd	Après la 4ème partie où Delphine perd
Aline	165 €	10 €	20 €	40 €	80 €
Bruno	85 €	170 €	20 €	40 €	80 €
Cédric	45 €	90 €	180 €	40 €	80 €
Delphine	25 €	50 €	100 €	200 €	80 €

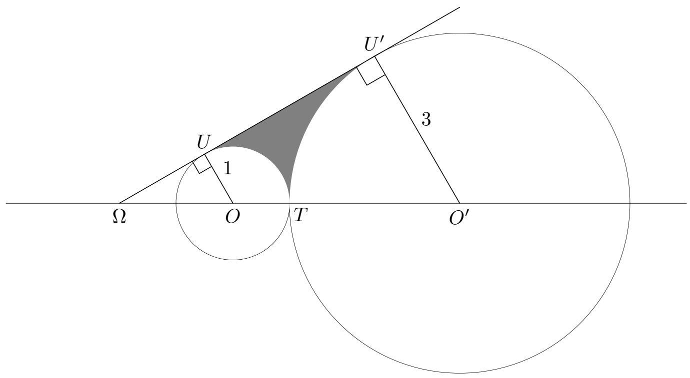
7 - Pavage

Un pavage possible : les longueurs des côtés de chacun des triangles rectangles sont 3 cm, 6 cm et $3\sqrt{5}$ cm.



8 - Rosace

La rosace est constituée de douze figures isométriques à la figure grisée $(\mathcal{F})$. L'aire de la rosace est donc douze fois celle de $(\mathcal{F})$.



- Analyse de la figure

  Notons $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O et $(\mathcal{C}')$ celui de centre O'.

  Les deux cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ sont tangents en T. La droite (UU'), tangente commune aux deux cercles, coupe la droite (OO') en Ω centre de la rosace.

  L'aire de $(\mathcal{F})$ est égale à l'aire du trapèze $OO'U'U$ moins l'aire de deux secteurs angulaires. Le premier secteur, noté $(\mathcal{A})$ est celui d'angle $\widehat{TOU}$ de frontière $(\mathcal{C})$, l'autre, noté $(\mathcal{A}')$ est celui d'angle $\widehat{TO'U'}$ de frontière $(\mathcal{C}')$.

  La droite (OU) est parallèle à $(O'U')$, donc $\dfrac{\Omega O'}{\Omega O} = \dfrac{O'U'}{OU}$. On en déduit que $\Omega O = 2$.

  Dans le triangle rectangle $O\Omega U$, $\sin(\widehat{O\Omega U}) = \dfrac{1}{2}$, d'où $\widehat{O\Omega U} = 30^\circ$.

  Par suite, $\widehat{TOU} = 120^\circ$ $(120 = \dfrac{1}{3} \times 360)$.

  La droite (OU) est parallèle à $(O'U')$, donc $\widehat{TO'U'} = 60^\circ$ $(60 = \dfrac{1}{6} \times 360)$.
- Calculs

  Soit H le projeté orthogonal de O sur $(O'U')$. On a : aire$(OUU'O')$=$\dfrac{1}{2}(O'U' + OU) \times OH$.

  Dans le triangle rectangle $OO'H$, $\cos(\widehat{O'OH}) = \dfrac{1}{2}\sqrt{3}$, donc $OH = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$.

  D'où aire$(OUU'O') = 4\sqrt{3}$. Or, aire$(\mathcal{A}) = \dfrac{1}{3}\pi \times 1^2$, et aire$(\mathcal{A}') = \dfrac{1}{6}\pi \times 3^2$.

  Donc : aire$(\mathcal{F}) = 4\sqrt{3} - \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{3\pi}{2}$.

L'aire de la partie grisée est $48\sqrt{3} - 22\pi$ unités d'aire.

9 - Skate

Le terrain de 15 mètres sur 8 mètres est amputé d'une bande de largeur d'au moins 3 mètres.

Pour construire cette piste on dispose alors au maximum d'un rectangle de 9 mètres par 2 mètres.

Si on occupe toute la largeur, le coefficient de réduction est 0,8. Dans ce cas la longueur de la piste est de 8 mètres. Il reste une bande de 2 mètres par 1 mètre.

Si on occupe toute la longueur, le coefficient de réduction est 0,9. Dans ce cas la largeur de la piste est de 2,25 mètres. Cette dernière proposition est à rejeter, car on ne dispose que de 2 mètres de largeur. les dimensions de la piste à construire sont celles du croquis multipliées par 0,8.

Pour calculer le volume de béton nécessaire, on est amené à calculer des volumes de deux pavés et celui d'un demi-cylindre droit. $V = 2 \times 8 \times 2,24 - 2,4 \times 2 \times 2 - 0,5 \times 2^2 \times 2 \times \pi$.

Le volume de béton nécessaire pour construire cette piste est égal à $(26,24 - 4\pi)$ m^3, soit environ 13,67 m^3.