Eléments de solutions de l'épreuve de la finale du RMFC 2006-2007

1. Crésus

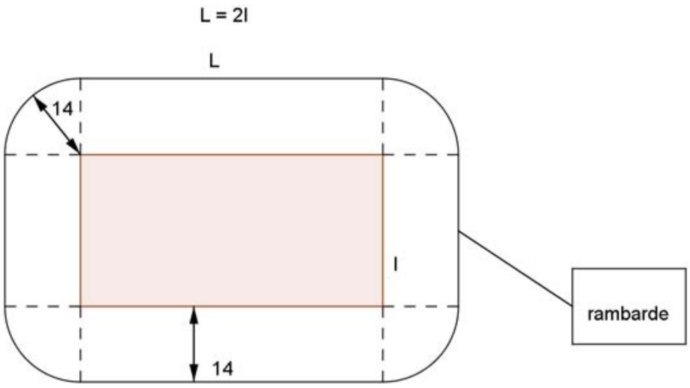


Schéma correspondant à la description du texte

Notons *l* la largeur du rectangle et *L* sa longueur (exprimées en décimètres).
La rambarde est constituée de quatre quarts de cercle de même rayon, de deux segments de longueur 2*l* et de deux segments de longueur *l*. Cela nous permet d'écrire : $28\pi + 6l = 196$

En résolvant cette équation, on trouve : $l = \dfrac{196 - 28\pi}{6}$ d'où l ≈ 18,006.

L'aire de la table est : $L \times l \approx 648{,}42$ à 5×10^{-3} près.

$L \times l \times 3 \approx 1\,945{,}27$ à 5×10^{-3} près, puisqu'il y a en moyenne trois pierres par mètre carré.

M.Crésus a donc exposé 1945 pierres.

Remarque : la valeur approchée à *5×10^{-3} près est 1 946,88 si on utilise 3,14 comme valeur approchée de π.*

2 Numismath

1. *12* est le produit de *1* par *12*, de *2* par *6* et de *3* par *4*.
   24 est le produit de *2* par *12*, de 3 par *8* et de *4* par *6*.
   30 est le produit de *2* par *15*, de 3 par *10* et de *5* par *6*.
   60 est le produit de *4* par *15*, de *6* par *10* et de *5* par *12*.
   Il y a donc trois billets différents pour former *12*, *24*, *30* et *60* borduros.

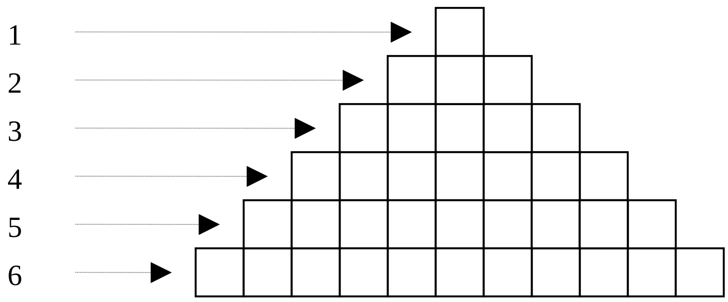
2. La somme des valeurs des billets dont un carré du domino a 1 point est :
   $S_1 = 1 \times 15 + 1 \times 14 + 1 \times 13 + 1 \times 12 + 1 \times 11 + 1 \times 10 + 1 \times 9 + 1 \times 8 + 1 \times 7 + 1 \times 6 + 1 \times 5 + 1 \times 4 + 1 \times 3 + 1 \times 2 + \mathbf{1 \times 1}$
   La somme des valeurs des billets dont un carré du domino a 2 points est :
   $S_2 = 2 \times 15 + 2 \times 14 + 2 \times 13 + \ldots \qquad + 2 \times 3 + \mathbf{2 \times 2} + 2 \times 1$
   La somme des valeurs des billets dont un carré du domino a 3 points est :
   $S_3 = 3 \times 15 + 3 \times 14 + 3 \times 13 + \ldots \qquad + \mathbf{3 \times 3} + 3 \times 2 + 3 \times 1$
   On procède ainsi jusqu'à S_{15} .
   La somme des valeurs des billets dont un carré du domino a 15 points est :
   $S_{15} = \mathbf{15 \times 15} + 15 \times 14 + 15 \times 13 + \ldots + 15 \times 3 + 15 \times 2 + 15 \times 1$
   Dans les 15 sommes précédentes, on remarque que les billets doubles (domino avec deux carrés identiques) apparaissent une fois. Ils sont écrits en gras dans les sommes précédentes.
   Tous les autres produits apparaissent deux fois chacun (sous la forme $a \times b$ et sous la forme $b \times a$).

   Considérons maintenant le produit $(1+2+3+\ldots+15) \times (1+2+3+\ldots+15)$:
   En développant ce produit terme à terme, on trouve :
   $(1+2+3+\ldots+15) \times (1+2+3+\ldots+15) = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_{15}$
   D'après la remarque précédente, on a aussi :
   $S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_{15} = 2N + D$, où N représente la somme cumulée des valeurs des billets non doubles et D représente la somme des valeurs des billets doubles.
   La calculatrice nous donne : $1+2+3+\ldots+15 = 120$ et $D = 1^2 + 2^2 + \ldots + 15^2 = 1240.$
   On obtient alors : $2N + 1320 = 120^2$ or $120^2 = 14\,400.$
   D'où $N = (14\,400 - 1\,240)/2 = 6\,580.$
   La somme cumulée inscrite sur les *120* billets est donc de $6\,580 + 1\,240 = 7\,820$.
   Or *48* borduros valent *1* euro, il ne nous reste plus qu'à diviser *7 820* par *48*.et à arrondir le résultat au centime.

   Le coût de la collection intégrale est comprise entre 162,91 et 162,92.

3. Tour de plus

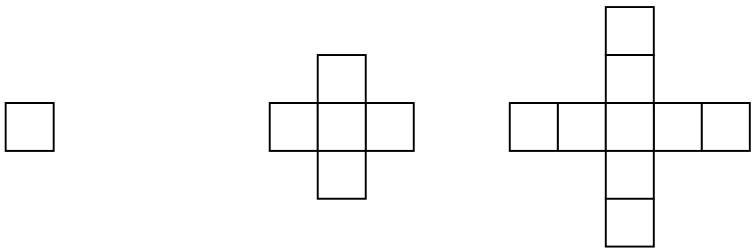
Numérotons les différents niveaux à partir du dessus de la tour



Vue de face d'une tour de six niveaux

Déterminons le nombre de cubes à chaque niveau

Niveau 1 | Niveau 2 | Niveau 3



1 cube | 5 cubes | 9 cubes

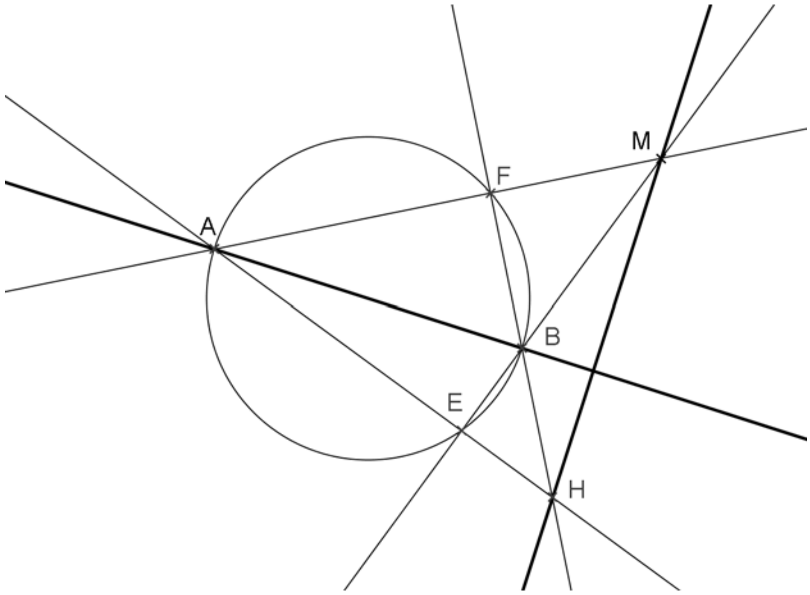
Le nombre de cubes d’un niveau est donc égal au nombre de cubes du niveau précédent auquel on ajoute 4.
Résumons dans un tableau le nombre de cubes par niveau et le nombre total de cubes d'une tour

Niveau	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Nombre de cubes par niveau	1	5	9	13	17	21	25	29	33	37	41
Nombre de cubes de la tour	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190	231

En conclusion, avec 200 cubes, Julie peut construire une tour de 10 étages et il reste 10 cubes.

4. Sans équerre, ni compas

On trace d'abord les droites (AM) et (BM). Ces droites coupent respectivement le cercle (C) en deux nouveaux points F et E.
Le segment [AB] est un diamètre du cercle, donc le triangle AEB est un triangle rectangle en E . De même, AFB est un triangle rectangle en F.
Les droites (AE) et (BF) sont donc deux hauteurs du triangle ABM. Ces deux hauteurs se coupent en H qui n'est autre que l'orthocentre du triangle ABM.
Il ne reste qu'à tracer la droite (HM) qui est la troisième hauteur de ce triangle et (HM) coupe donc perpendiculairement la droite (AB).



La droite (HM) est la perpendiculaire à (AB) passant par M.

5. Jeu de l'oie

Faisons quelques essais :
Si l'anneau compte 21 cases, les cases seront coloriées de la façon suivante (dans l'ordre de leur coloriage) : *1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 11 ; 1 .*
Si l'anneau compte 22 cases : *1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 10 ; 20 ; 18 ; 14 ; 6 ; 12 ; 1.*
Si l'anneau compte 23 cases : *1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 9 ; 18 ; 13 ; 3 ; 6 ; 12 ; 1.*
Si l'anneau compte 27 cases, toutes les cases sont coloriées sauf la case 27.
Cela nous permet de préciser quelques points utiles :
(a) Toutes les parties commencent par la suite : *1 – 2 – 4 – 8 – 16.*
(b) Lorsque l'on est sur la case N, on avance de N cases, donc on arrive sur la case numéro $2N$ (nombre pair) sauf lorsqu'on est repassé par la case n°1.
On en déduit que le seul moyen d'atteindre les nombres impairs est d'effectuer un passage par la case n°1.

La présentation suivante n'est pas attendue des élèves.

Par convention, on appellera case k la case portant le numéro k.
On peut alors distinguer deux cas :

- **Si le nombre de cases est pair:**
  Notons $2p$ le nombre de cases.
  Dans ce cas, parmi les cases de numéro impair, seul la case 1 sera coloriée.
  En effet, si le numéro k de la case sur laquelle on se trouve est inférieur ou égal à p, on se rend ensuite sur la case $2k$. Par contre, si k est supérieur à p, on se rend sur la case $2k – 2p$.
  Dans tous les cas, on se rend sur une case paire.
  Dans ce cas, il y aura au minimum $p – 1$ cases non coloriées.

- **Si le nombre de cases est impair:**
  Notons $2p + 1$ ce nombre.
  Dans ce cas, si le numéro k de la case sur laquelle on se trouve est inférieur ou égal à p, on se rend sur la case $2k$ et s'il est supérieur à p, on se rend sur la case $2k – 2p – 1$.
  On constate alors qu'à chaque fois qu'on franchit la case 1, on coloriera une case de numéro impair.
  Montrons désormais qu'on ne peut pas colorier la case (2p + 1)
  Ce nombre est impair, il ne peut donc être atteint en partant d'une case de numéro inférieur ou égal à p. Supposons alors qu'on atteigne cette case en ayant préalablement colorié la case k telle que $p + 1 \le k \le 2p$. La case qui sera coloriée après la case k porte le numéro $2k – 2p – 1$ qui vérifie :
  $2 (p + 1) – 2p – 1 \le 2k – 2p – 1 \le 2(2p) – 2p – 1$, soit encore $1 \le 2k – 2p – 1 \le 2p – 1$.

  Cela prouve qu'en partant de n'importe quelle case du jeu autre que la case $2p + 1$, il est impossible d'atteindre cette case.

-
  Le seul moyen de colorier la case *(2p + 1)* aurait été de démarrer le jeu sur cette case.
  Par conséquent, pour un nombre de cases impair, il restera toujours au minimum cette case blanche.

En testant dans l'ordre les nombres impairs de cases, on arrive rapidement à une solution.
Pour 29 cases, les cases coloriées sont, dans l'ordre :
1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 3 ; 6 ; 12 ; 24 ; 19 ; 9 ; 18 ; 7 ; 14 ; 28 ; 27 ; 25 ; 21 ; 13 ; 26 ; 23 ; 17 ; 5 ; 10 ; 20 ; 11 ; 22 ; 15 ; 1.
On a alors colorié *28* cases (toutes les cases sauf la case *29*).

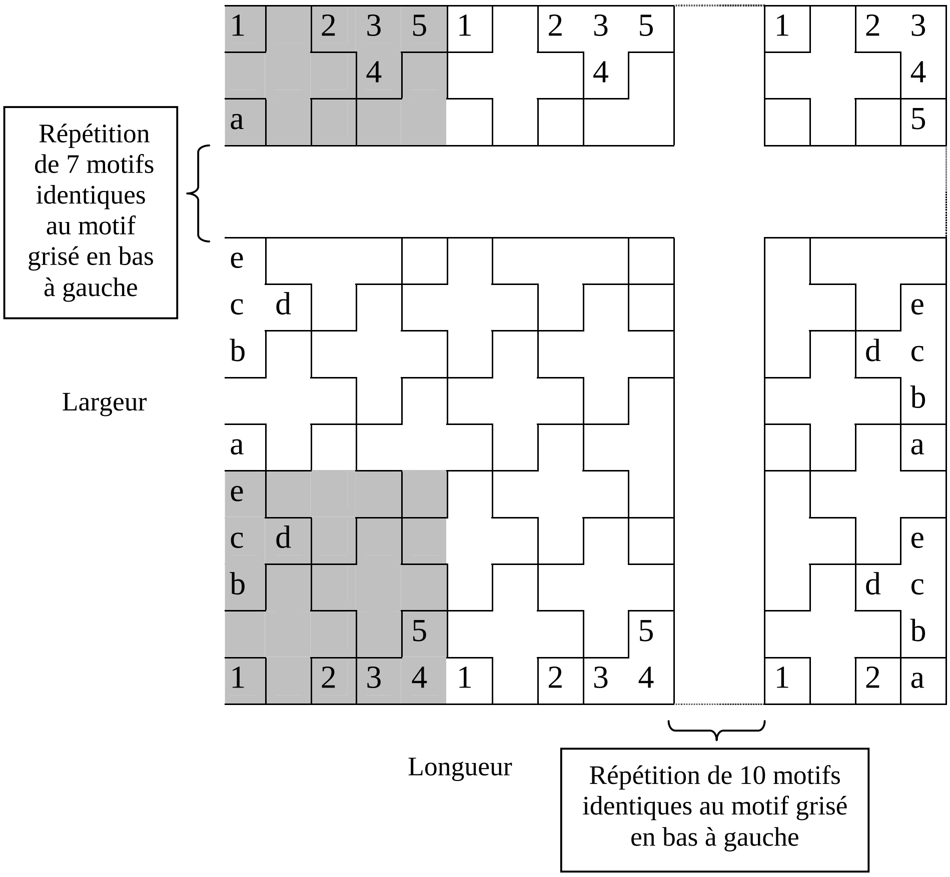
En dessinant un anneau de 29 cases, il restera à Juliette une seule case non coloriée.

Remarque : un anneau de 37 cases permet aussi de colorier toutes les cases de 1 à 36.

6. La couverture

La couverture mesure 320 cm de long et 240 cm de large et est constituée d'un assemblage de carrés de 5 cm de côté. On peut représenter cette couverture par un rectangle de dimensions 64 × 48, l'unité étant le côté d'un carré.
Pour simplifier les calculs, on peut remarquer qu'un motif de 5 × 5 partant du coin gauche permet, par translations "verticales" et "horizontales", de recouvrir presque entièrement la couverture.
On obtient alors un découpage plus simple :
Dans le sens de la longueur : 12 motifs complets + 4 carreaux (car 12 × 5 + 4 = 64)
Dans le sens de la largeur : 9 motifs complets + 3 carreaux (car 9 × 5 + 3 = 48).

On obtient le schéma ci-dessous.
On peut alors compter les carrés qui n'appartiendront pas à des croix complètes.
Le motif de base est grisé en bas à gauche et permet de numéroter les carrés que l'on veut compter.



La difficulté réside dans le fait qu'il ne faut pas compter deux fois le même carré.
On compte alors les carrés appartenant à des croix incomplètes :
Horizontalement (on compte les cases numérotées 1, 2, 3, 4 et 5) :

- en bas de couverture : 5 × 12 + 2 = 62
- en haut de couverture : 5 × 12 + 5 = 65

Verticalement (on compte les cases numérotées a, b,, c, d et e) :

- à gauche : 4 + 5 × 8 + 1 = 45
- à droite : 5 × 9 = 45

On obtient donc un total de 217 carrés n'appartenant pas à des croix complètes.
Au total, la couverture contient 3 072 carrés (64 × 48).
Il reste donc 2 855 carrés pour former des croix complètes, soit 571 croix complètes (2 855 / 5).

La couverture de la mamie d'Héloïse comptera donc 571 croix entières.

7. Les boulets de la citadelle

Soit x le nombre de lots contenant 1 paquet de boulets de la citadelle.
Soit y le nombre de lots contenant 2 paquets.
Soit z le nombre de lots contenant 3 paquets.
Par ailleurs, on appelle V le prix de vente de l'ensemble des lots.
Nous pouvons alors constituer le système de deux équations à trois inconnues suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 67 \\ 1x + 2y + 3z = 100 \end{cases}$$

D'autre part, $5x + 9y + 13z = V$
Le système peut être résolu par substitution.
Mais en observant que

$$\begin{aligned} 4(x + 2y + 3z) + x + y + z &= 4x + 8y + 12z + x + y + z \\ &= 5x + 9y + 13z \end{aligned}$$

on peut écrire que $5x + 9y + 13z = 4 \times 100 + 67$
soit encore $V = 467$.

Le prix d'achat des 100 paquets étant égal à 300 euros, le bénéfice s'élève donc à 167 euros.

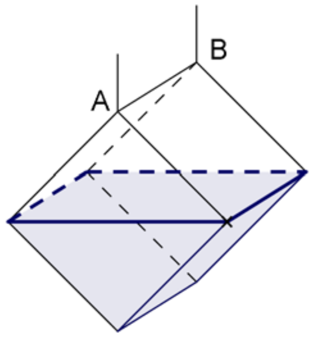
Remarque : En soustrayant membre à membre les deux équations obtenues ci-dessus, on obtient :
$y + 2z = 33$, d'où l'on déduit que y est un nombre impair inférieur ou égal à 33.
Pour montrer que ce bénéfice ne dépend pas de la façon dont les lots sont composés, on peut faire un inventaire de toutes les répartitions possibles, ainsi que l'indique le tableau suivant.
Dans la deuxième colonne y, impair, varie de 33 à 1 ce qui permet de calculer z placé dans la troisième colonne et x dans la première colonne.

Nombre de lots de			Recette V
1 paquet	2 paquets	3 paquets	
34	33	0	467
35	31	1	467
36	29	2	467
37	27	3	467
38	25	4	467
39	23	5	467
40	21	6	467
41	19	7	467
42	17	8	467
43	15	9	467
44	13	10	467
45	11	11	467
46	9	12	467
47	7	13	467
48	5	14	467
49	3	15	467
50	1	16	467

Toutes ces répartitions ont effectivement conduit à la même recette et induiront donc le même bénéfice.

8. Cube et niveau

1. Le volume du cube étant égal à 216 cm^3, il est aisé de remarquer que le cube doit être rempli à moitié pour qu'il contienne 108 cm^3. Ce qui donne le prisme à base triangulaire de la figure suivante



2. Pour que le volume soit égal à 54 cm^3, il faut et il suffit que le prisme à base triangulaire (défini par le demi cube inférieur) soit lui-même rempli à moitié. Il s'agit donc comme l'indique la figure 1 d'obtenir un triangle dont l'aire soit exactement la moitié de celle du triangle CDE. Cette aire doit donc être la même que celle du triangle CHD, H étant le milieu du segment [DE]. Il ne nous reste plus qu'à reporter la longueur CH sur les deux segments [CE] et [CD]. Les points I et J ainsi obtenus permettront d'obtenir le niveau du liquide sur la face de devant et on complètera la surface en traçant des segments parallèles à ceux obtenus dans la question 1 (voir figure 2).

3. Pour obtenir 162 cm^3 de liquide, il suffit de remarquer que 162 = 216 – 54 et de construire la surface symétrique de celle obtenue dans la question 2 par rapport à celle obtenue dans la question 1. (Voir la figure 3).

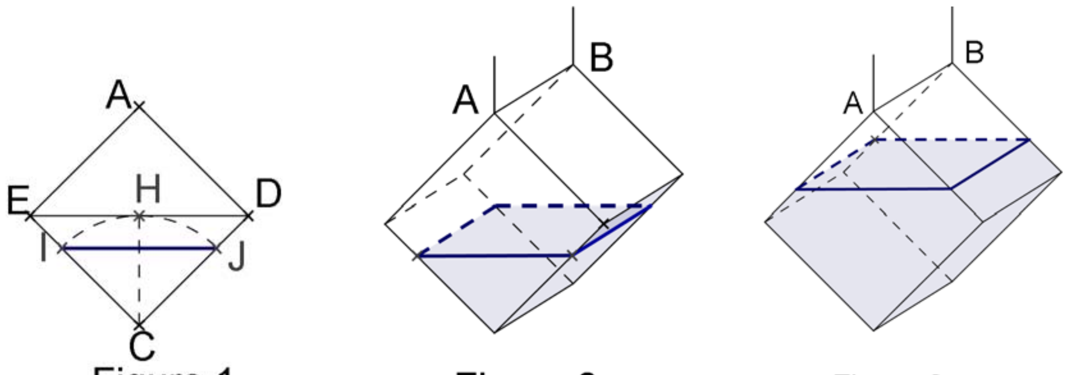


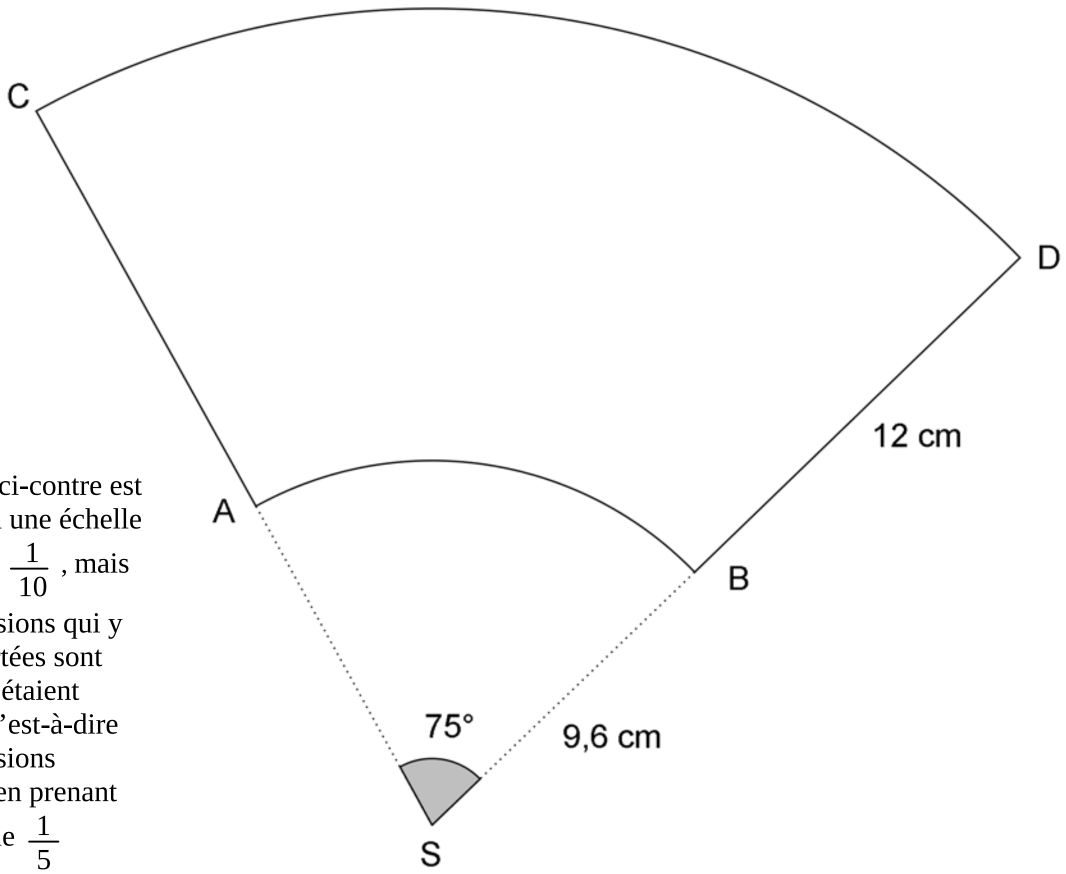
Figure 1 Figure 2 Figure 3

9. La hotte du père Joël

Pour réaliser ce patron, nous avons besoin de connaître les rayons SB et SD des deux cercles concentriques.
Ils se calculent en utilisant la configuration de Thalès dans les triangles SOB et SO'D :
$\frac{SB}{SD} = \frac{OB}{O'D'}$, soit $\frac{SB}{SB + 60} = \frac{20}{45}$ d'où 45 SB = 20 SB + 1200, soit SB = $\frac{1\,200}{25}$.
Finalement, on trouve SB = 48 et SD = 108.
Les rayons des deux cercles sont donc respectivement 48 cm et 108 cm en taille réelle et 9,6 cm et 21,6 cm à l'échelle $\frac{1}{5}$.
Remarquons que la mesure des angles est indépendante de l'échelle choisie.
La mesure de l'angle au centre $\widehat{ASB}$ est proportionnelle à la longueur de l'arc d'extrémités A et B .
Pour un angle au centre de 360°, nous avons un cercle complet de périmètre $2 \times \pi \times 9{,}6$; pour l'angle au centre $\widehat{ASB}$ cherché, nous avons une longueur d'arc de $\frac{2 \times \pi \times 4}{2}$, et l'on obtient alors

$$\widehat{ASB} = \frac{4 \times \pi \times 360}{2 \times \pi \times 9{,}6} \quad \text{soit} \quad \widehat{ASB} = 75° .$$

Il reste alors à élaborer le patron de la hotte en utilisant les mesures précédentes.



La figure ci-contre est élaborée à une échelle d'environ $\frac{1}{10}$, mais les dimensions qui y sont reportées sont celles qui étaient exigées, c'est-à-dire les dimensions obtenues en prenant une échelle $\frac{1}{5}$