Rallye Mathématique de Franche-Comté
Eléments de solutions des exercices de la finale 2008

Exercice 1 : L'auberge espagnole

Une année non bissextile compte 365 jours. Puisque 365 = 52 x 7 + 1, elle compte 52 semaines entières et un jour.
Le 1 janvier 2008 étant un mardi, et les années 2007 et 2006 n'étant pas bissextiles, nous pouvons affirmer que le 1 janvier 2007 était un lundi et que le 1 janvier 2006 était un dimanche.
L'année 2006 compte alors 53 dimanches, 52 lundis, 52 mardis, …et enfin 52 samedis.
Pour que les quatre amis locataires achètent chacun deux hebdomadaires, il faut un cycle de 8 semaines, donc 8 dimanches.
Or 53 = 6 x 8 + 5, donc en 2006, il y a eu 6 cycles complets de 8 semaines et un cycle partiel de 5 semaines.
On peut en conclure qu'Andy et Betty auront acheté l'hebdomadaire 14 fois (6 x 2 + 2=14), que Connie l'aura acheté 13 fois (6 x 2 + 1 = 13) et Danny l'aura acheté 12 fois.

Réponse
Andy et Betty ont achetés 14 hebdomadaires, Connie 13 et Danny 12.

Exercice 2 : Carré cube

Soit x le nombre recherché, le nombre de chiffres utilisés pour écrire le carré et le cube de ce nombre augmente avec ce nombre.
- Si x s'écrit avec un chiffre alors, x^2 a un ou deux chiffres et x^3 a deux ou trois chiffres.
C'est insuffisant pour obtenir les dix chiffres de notre système décimal.
- Si x s'écrit avec trois chiffres, alors x^2 a plus de cinq chiffres et x^3 a plus de sept chiffres.
C'est trop pour obtenir les dix chiffres souhaités. On en déduit que x s'écrit avec deux chiffres.
Dans ce cas, x^2 a trois ou quatre chiffres et x^3 a entre quatre et six chiffres.
Nous obtenons donc les dix chiffres souhaités quand x^3 a six chiffres.
Or $46^3 = 97\,336$ et $47^3 = 103\,823$ donc x est strictement supérieur à 46.
On a $99^2 = 9\,801$, $99^3 = 970\,299$ et $100^2 = 10\,000$, $100^3 = 1\,000\,000$.
Le nombre x est alors compris entre 47 et 99. De cette liste, nous pouvons supprimer tous les naturels se terminant par 0 ; 1 ; 5 et 6 car leur carré et leur cube ont le même chiffre des unités 0 ; 1 ; 5 ou 6. Il reste alors 33 entiers à tester.
Les nombres à tester peuvent être disposés en tableau. Lorsque le carré comporte deux chiffres identiques, il est inutile de calculer le cube. Si le carré comporte des chiffres distincts deux à deux, on calcule le cube.
Seuls les nombres dont le carré et le cube sont écrits avec dix chiffres distincts deux à deux sont retenus. On constate que seul 69 vérifie cette condition.
En effet $69^2 = 4\,761$ et $69^3 = 328\,501$.
Il existe donc un entier et un seul vérifiant les conditions de l'énoncé.

Réponse
Seul le nombre 69 est tel que le carré et le cube s'écrivent en utilisant les dix chiffres du système décimal, distincts deux à deux.

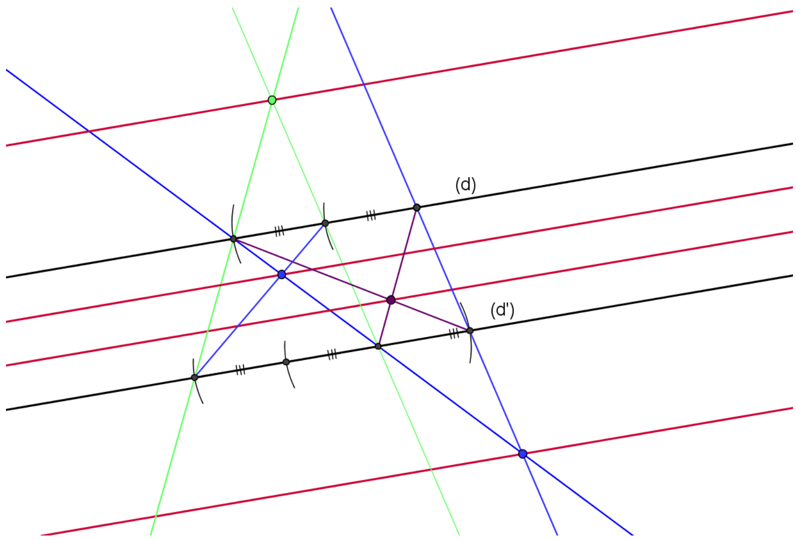
Exercice 3 : Cherchez les points

Le réel a désigne la distance entre les deux droites parallèles données.
Un point est deux fois plus près de l'une que de l'autre peut se traduire par la distance de l'une est deux fois la distance à l'autre.

Lorsque le point n'est pas dans la bande déterminée par les deux droites parallèles données, la distance de l'une est a, la distance à l'autre est $2a$.

Lorsque le point est dans la bande, la distance de ce point à l'une est $\frac{a}{3}$, la distance de ce point à l'autre est $\frac{2a}{3}$.

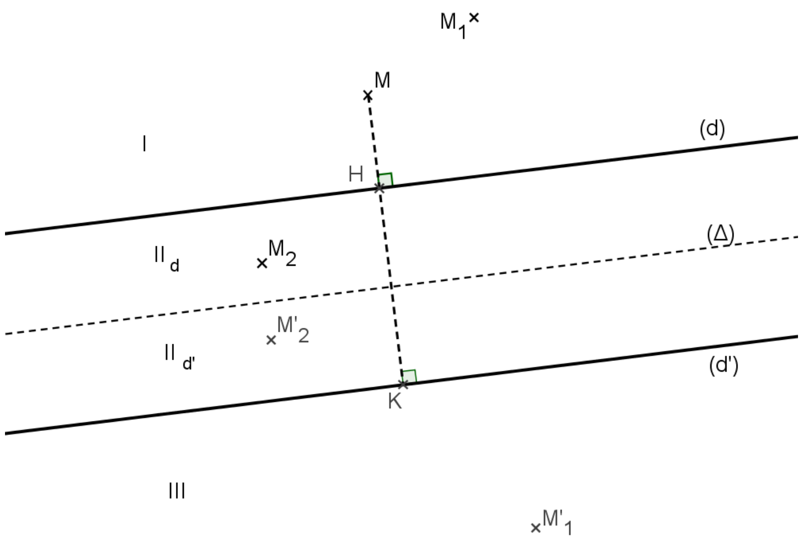
Dessin



A partir de ce dessin, il est possible de préciser l'ordre des différents tracés et justifier que nous obtenons les droites ayant les propriétés demandées.

Une autre proposition de solution, non attendu des élèves de troisième.

Deux droites parallèles (d) et (d') sont données, la distance entre celles-ci est notée a.
Elles partagent le plan en trois régions, notées I, II et III.
Dire que le point M est deux fois plus près de l'une que de l'autre signifie que la distance de M à (d') est deux fois celle de M à (d) ou alors que la distance de M à (d) est deux fois celle de M à (d').
Si (Δ) désigne la droite équidistante de (d) et (d'), la partie II est partagée en II_d (bande de bords (d) et (Δ)) et $II_{d'}$ (bande de bords (Δ) et (d'). L'ensemble recherché est symétrique par rapport à la droite (Δ).



Recherchons les points de la région I:

MH est la distance non nulle de M à (d) (H $\in$ (d) et (MH) perpendiculaire à (d))
MK est la distance non nulle de M à (d') (K $\in$ (d') et MK perpendiculaire à (d'))
La propriété se traduit par MK= 2MH, or MK = MH + HK avec HK = a.
MK= 2MH se traduit par MH= a.
L'ensemble des points M de la région I est la droite (d_1) parallèle à (d) située à la distance a de celle-ci.
Recherchons les points de la région II $_d$:
En utilisant les mêmes notations que ci-dessus.
La propriété se traduit par MK= 2MH, or MK = HK- MH avec HK = a.

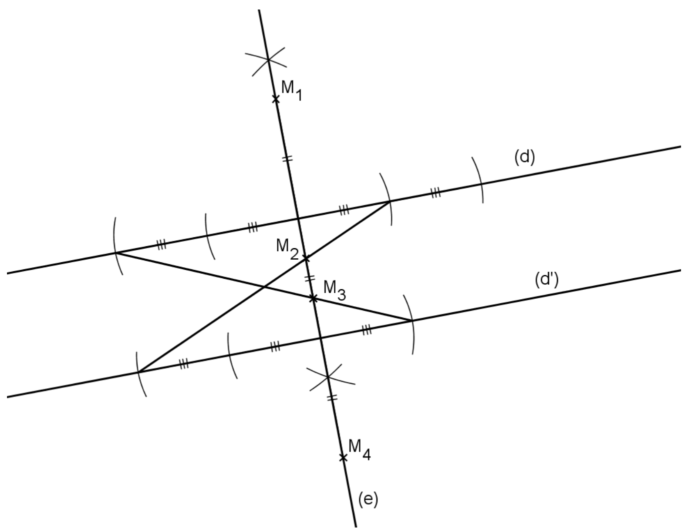
MK = 2 MH se traduit par MH = $\frac{a}{3}$.

L'ensemble des points de la région II $_d$ est la droite (d_2) située à la distance $\frac{a}{3}$ de (d).

Les points recherchés de la région II $_{d'}$ est la droite (d'_2) symétrique de la droite (d_2) par rapport à la droite (Δ).
Les points recherchés de la région III est la droite (d'_1) symétrique de la droite (d_1) par rapport à la droite (Δ).

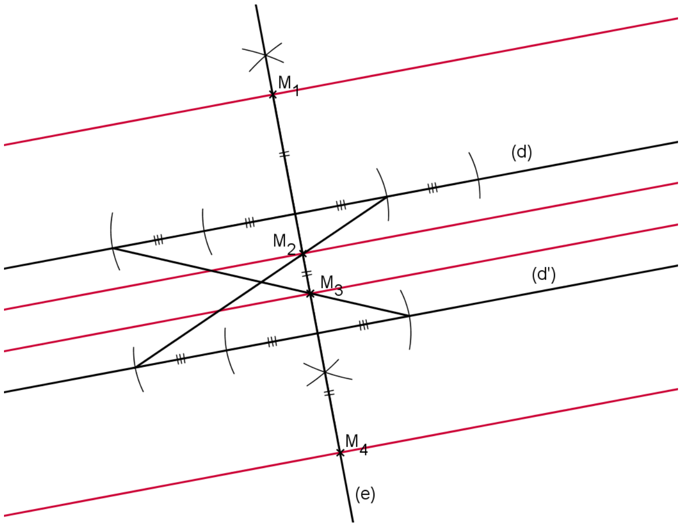
Le tracé est réalisé en utilisant compas, règle non graduée et équerre.

A partir d'un point de la droite (d), deux arcs de cercles de rayon r permettent de tracer la médiatrice (e) du segment ainsi déterminé. Sur (d), on met en évidence quatre segments de même longueur, et trois sur la droite (d'), comme l'indique le dessin. Les segments tracés entre ces deux droites parallèles permettent de placer M_2 et M_3 sur (e). La situation de Thalès permet d'affirmer que ces points possèdent la propriété énoncée ci-dessus. Le point M_1 est tracé sur (e) à la distance a de (d), le point M_4 est tracé sur (e) à la distance a de (d').



A l'aide de l'équerre, on trace la droite (d_1) perpendiculaire à (e) en M_1, donc parallèle à (d) passant par M_1. Tracé analogue pour les droites (d_2), (d'_2) et (d'_1).

Réponse

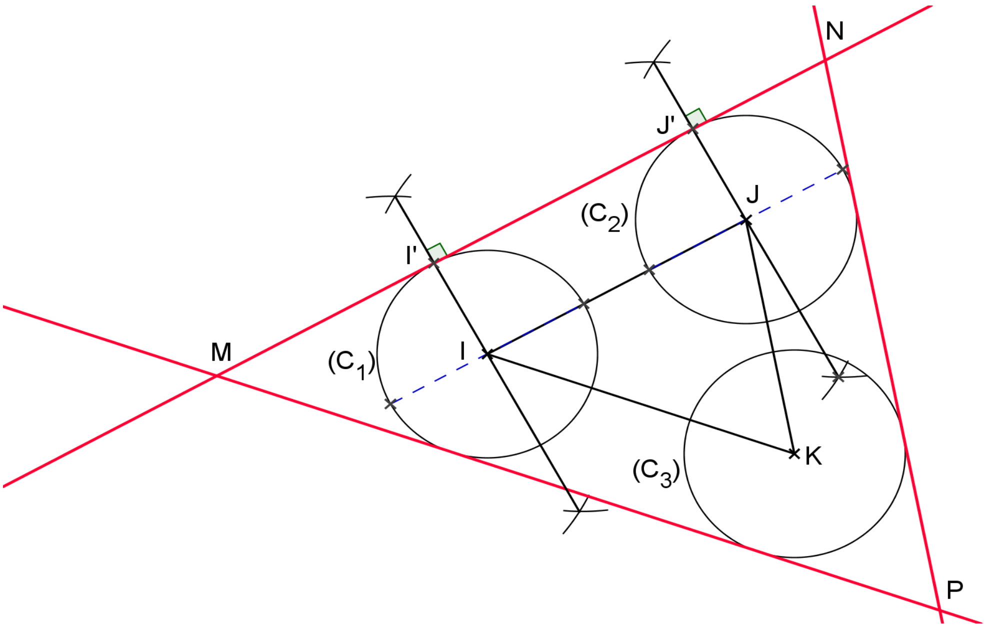


Exercice 4 : Cercles prisonniers

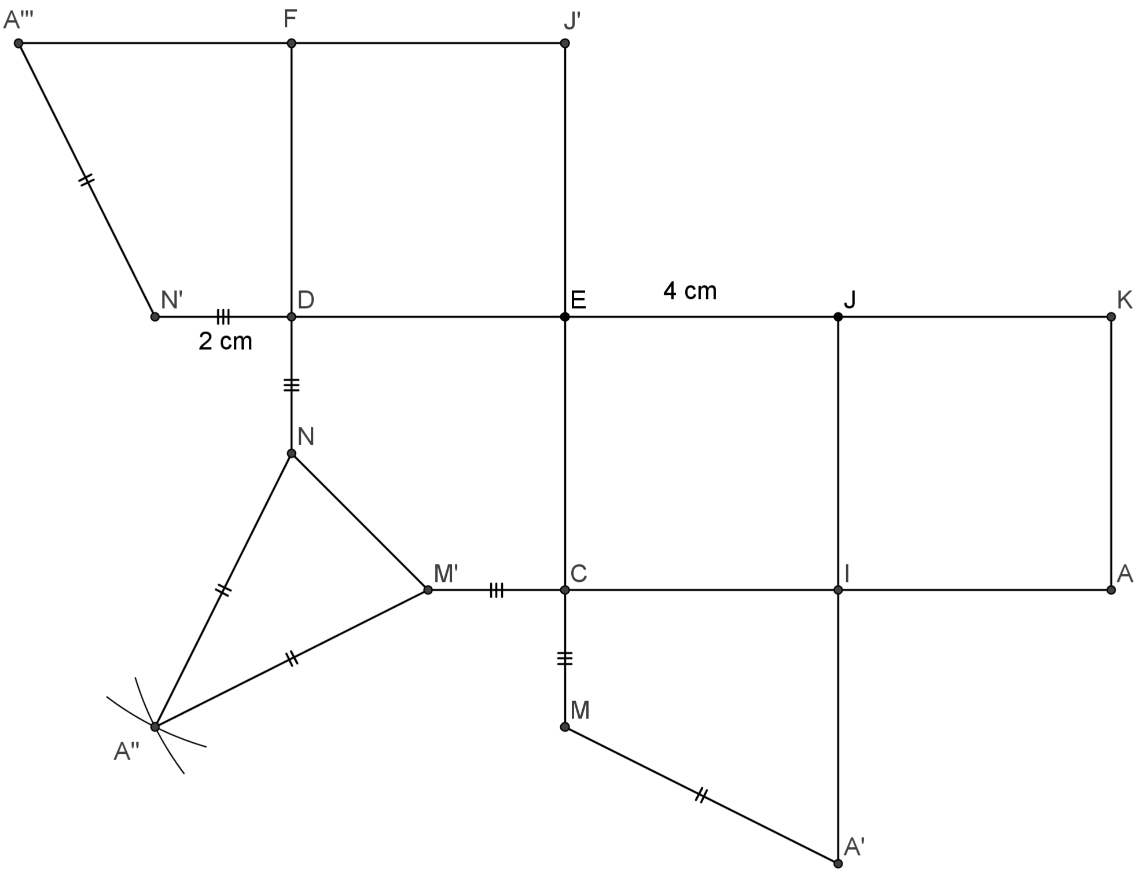
La tangente en un point d'un cercle est la perpendiculaire au rayon en ce point.
Soit I, J et K les centres respectifs des cercles (C_1), (C_2) et (C_3) donnés. (IJ) coupe (C_1) suivant un diamètre, la médiatrice de ce diamètre coupe (C_1) en I' comme indiqué sur le dessin.
(IJ) coupe (C_2) suivant un diamètre, la médiatrice de ce diamètre coupe (C_2) en J' comme indiqué sur le dessin.
Le quadrilatère IJJ'I' est un rectangle. (I'J') est la tangente commune à (C_1) et à (C_2), laissant les trois cercles du même côté.
Les traits de construction sont laissés en évidence pour la première tangente.
Même procédé pour les deux autres tangentes. Ces tangentes se coupent en M, N et P.

Réponse

Le triangle MNP est le triangle dont chaque côté est tangent à deux de ces trois cercles et les contenant.



Exercice 5 : Patron



Exercice 6 : Gamme

Chaque récipient donné est un parallélépipède rectangle.
L'unité de distance est le centimètre, d'aire le centimètre carré, de volume le centimètre cube.
Calculons le volume d'eau pour chaque récipient donné : V= B × h avec B = 16.
V_{DO}= 180 ; V_{RE}= 160 ; V_{MI}= 128 ; V_{FA} = 96 ; V_{LA}= 38,5 ; V_{SI} = 20,48.
Pour faire une note, il faut conserver le même volume d'eau.
Le DO ne peut être fabriqué avec un des pavés car il faudrait 20 cm de hauteur, on utilise donc le cylindre. La hauteur d'eau est $h_{DO} = \dfrac{45}{\pi}$.
Les autres notes sont réalisées à l'aide des pavés.
$h_{RE} = \dfrac{160}{9}$, $h_{MI} = \dfrac{128}{9}$, $h_{FA} = \dfrac{96}{9}$, $h_{SOL} = \dfrac{64}{9}$, $h_{LA} = \dfrac{38,4}{9}$, $h_{SI} = \dfrac{20,48}{9}$.

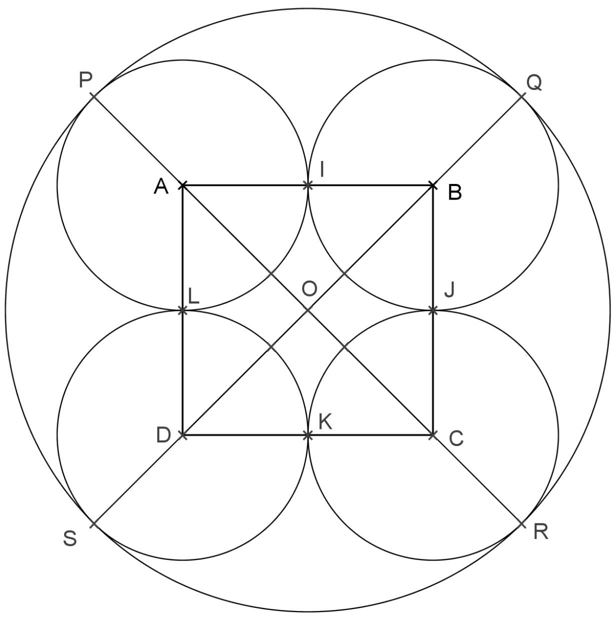
Réponse
Les hauteurs d'eau, arrondies au millimètre près, sont respectivement :
Pour le Do 14,3 cm ; le Ré 17,7 cm ; le Mi 14,2 cm ; le Fa 10,7 cm ; le Sol 7,1 cm, le La 4,3 cm ; le Si 2,3 cm.

Exercice 7 : Bijoux

L'unité de distance est le centimètre. Le rayon d'un petit disque est noté *r*.
Les centres A, B, C et D des quatre petits disques tangents au grand disque sont les sommets d'un carré de côté 2*r*. Les petits disques sont tangents deux à deux en I, J, K et L.
Ces petits disques sont tangents au grand disque respectivement en P, Q, R et S.

Dessin illustrant la situation

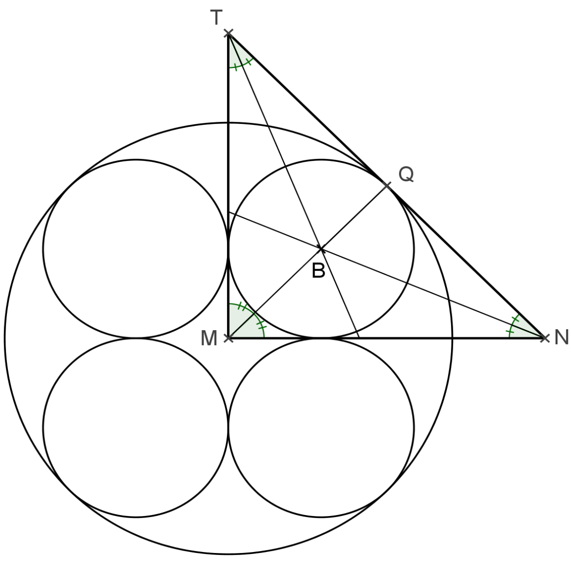
(IK) et (LJ) sont des axes de symétrie de la figure, de même que les droites (PR) et (QS).



Le triangle ABC est rectangle isocèle, donc $AC^2 = AB^2 + BC^2$ d'où $AC^2 = (2r)^2 + (2r)^2$
PR = PA + AC + CR, or AC = $2r\sqrt{2}$ donc PR = $2r + 2r \times \sqrt{2}$
Les hypothèses se traduisent par : $2r + 2r \times \sqrt{2} = 5$ soit $r = \dfrac{2,5}{1 + \sqrt{2}}$

Réponse
Une valeur approchée du rayon est de 1,04 cm.

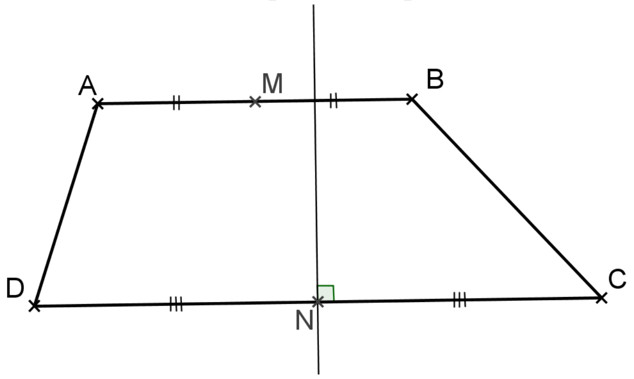
Autre méthode



(TN) est la tangente au grand cercle en Q.
Un petit cercle est le cercle inscrit dans le triangle isocèle rectangle TMN. Dans ce triangle l'angle en N mesure 45°. $[NB)$ est donc la bissectrice de l'angle en N du triangle TMN .
MQ = 2,5 et MQ = QN. On en déduit que : $r = 2{,}5\tan(22{,}5^\circ)$
Cette méthode permet de tracer le bijou en vraie grandeur.

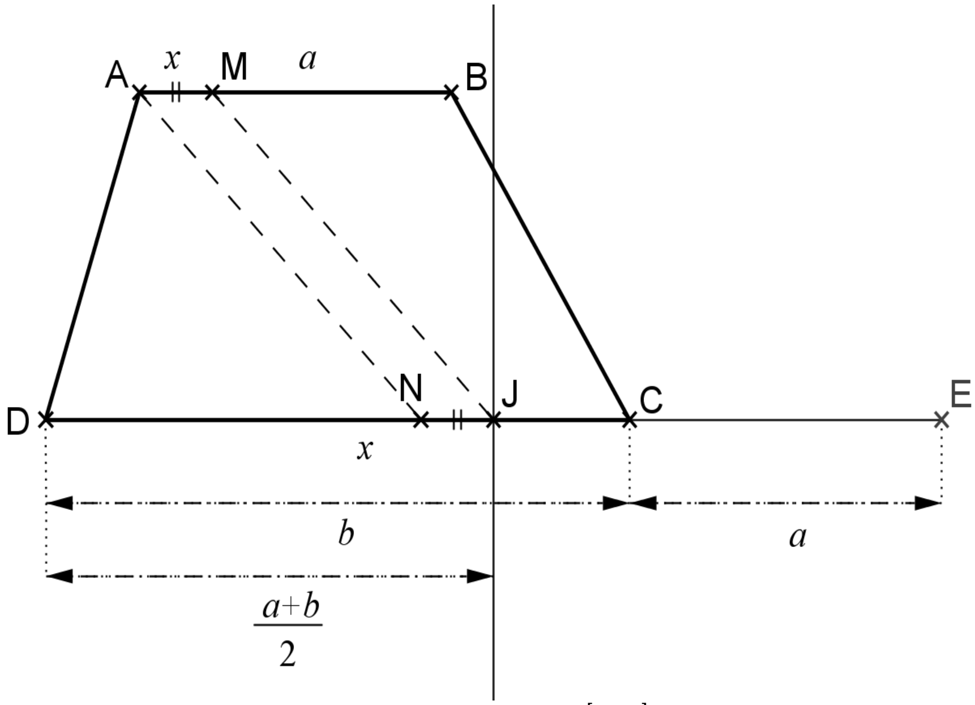
Exercice 8 : Trapèze

<u>Etude des cas 1, 2 et 4.</u>
Soit ABCD un trapèze de hauteur *h*, de bases AB = *a*, DC = *b* et M un point de $[AB]$, N un point de $[DC]$.
Désignons par *x* la longueur AM, $0 \le x \le a$, par y la longueur DN $0 \le y \le b$.
Donnons les aires des différents trapèzes :
Aire (ABCD) = $\frac{1}{2}(a+b)h$,
Aire (AMND) = $\frac{1}{2}(x+y)h$,
Aire (MBCD) = $\frac{1}{2}((a-x)+(b-y))h$.
La propriété demandée se traduit ainsi :
Aire (AMND) = Aire (MBCD) si et seulement si Aire (AMND) = $\frac{1}{2}$ Aire (ABCD)
Ce qui équivaut à $\frac{1}{2}(x+y)\times h = \frac{1}{2}\times(\frac{1}{2}(a+b)\times h)$ soit $x+y = \frac{1}{2}(a+b)$
1° cas : $x = \frac{a}{2}$ ce qui donne $y = \frac{b}{2}$
Conclusion : Si M est le milieu de $[AB]$ alors N est le milieu de $[CD]$.
Le tracé de la médiatrice de $[CD]$ permet de placer N.



2° cas : M étant placé sur $[AB]$, x = AM donne $y = \frac{a+b}{2} - x$
Le point N peut alors être tracé à l'aide du compas comme l'indique la figure.
On trace un segment de longueur *a*+*b* (CE = *a*, DC = *b*, les points D, C et E sont alignés dans cet ordre), le milieu du segment $[DE]$ est obtenu en traçant la médiatrice de celui-ci, pour obtenir un segment de longueur $\frac{a+b}{2}$ d'où l'on retire un segment de longueur x, pour mettre en évidence un segment de longueur y.
Sachant que x est compris entre 0 et *a*, on vérifie que y est compris entre 0 et *b*, en étudiant le signe de $b - (\frac{a+b}{2} - x)$. Cette expression est égale à $(\frac{b-a}{2} + x)$ qui est la somme de deux quantités positives, celle-ci est donc positive.

4° cas : c'est un cas particulier du 2° cas, avec x = 0, ce qui donne $y = \frac{a+b}{2}$



Si M est en A alors N est confondu avec le milieu J de $[DE]$.

<u>Etude du cas numéro 3.</u>

Méthode analogue à la précédente en remplaçant x par y.

$x + y = \frac{a+b}{2}$ donne $y = \frac{a+b}{2} - x$.

Sachant que x est compris entre 0 et b, est-ce que y est compris entre 0 et a ?

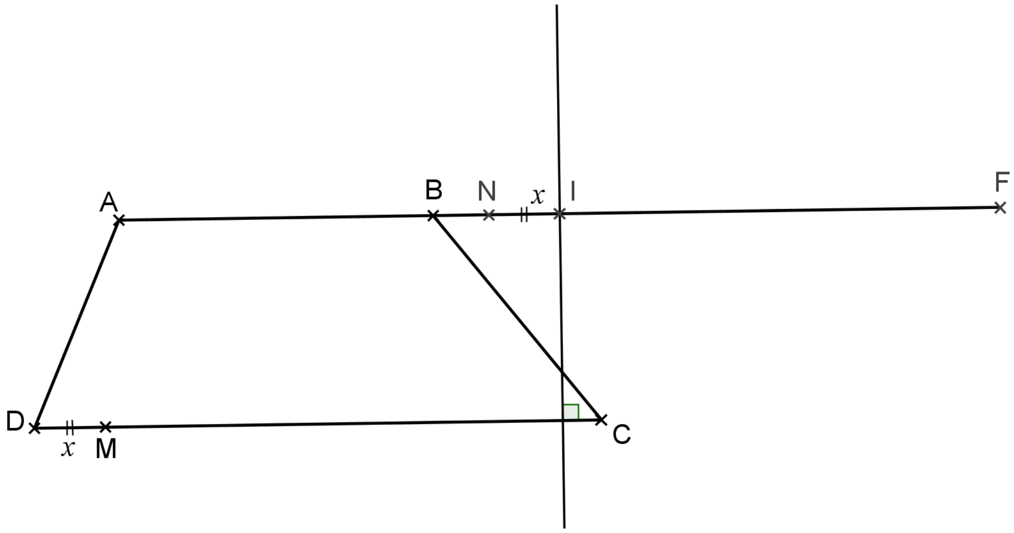
Soit $\delta = a - (\frac{a+b}{2} - x)$ on a $\delta = x - \frac{b-a}{2}$. Or dans ce cas $x \leq \frac{b-a}{2}$ d'où $\delta \leq 0$.

Remarque : Si $x = \frac{b-a}{2}$ alors y = a, le point N est en B.

Dans le cas du dessin x est dans l'intervalle $\left]0; \frac{b-a}{2}\right[$

La figure illustre cette situation, le point N est en dehors de $[AB]$.

Le troisième cas n'admet pas de solution.



Exercice 9 : la toute puissance de trois

On constatera tout d'abord que $3^4 = 81$ et que $3^3 + 3^3 = 54$.
D'autre part, il est évident qu'une somme contenant trois fois le terme 3^n pourra être écrite avec moins de termes en remplaçant $3^n + 3^n + 3^n$ par 3^{n+1}.
Les nombres compris entre 50 et 80 s'écriront tous comme des sommes d'au plus huit termes.
Chaque terme 3^k avec $k \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$ ne pourra apparaître au maximum que deux fois.
Les nombres non troyens seront donc ceux qui s'écriront avec plus de six termes de cette forme.
Ainsi :
$3^3 + 3^3 + 3^2 + 3^2 + 3^1 + 3^1 + 3^0 + 3^0 = \mathbf{80}$ $\quad 3^3 + 3^3 + 3^2 + 3^2 + 3^1 + 3^1 + 3^0 = \mathbf{79}$
$3^3 + 3^3 + 3^2 + 3^2 + 3^1 + 3^0 + 3^0 = \mathbf{77}$ $\quad 3^3 + 3^3 + 3^2 + 3^1 + 3^1 + 3^0 + 3^0 = \mathbf{71}$
$3^3 + 3^2 + 3^2 + 3^1 + 3^1 + 3^0 + 3^0 = \mathbf{53}$

Réponse
Les nombres non troyens compris entre 50 et 80 sont dans l'ordre décroissant :
80 ; 79 ; 77 ; 71 et 53.