RALLYE MATHÉMATIQUE DE FRANCHE-COMTÉ

Éléments de corrections

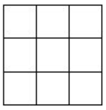
Épreuves de qualifications du mardi 29 janvier 2008

---

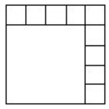
1 Carrément

1.1 Énoncé

Un carré peut être découpé en neuf autres carrés :



Il peut aussi être découpé, avec un peu de réflexion, en dix carrés :

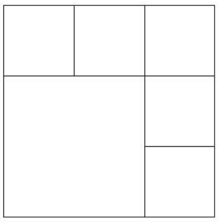


Pouvez-vous faire un découpage d'un carré en 6 carrés ? En 7 ? En 8 ? En 11 ? En 12 ? En 13 ?
Est-il possible (avec beaucoup de patience) d'obtenir 67 ou 68 carrés ?
Expliquez votre raisonnement.

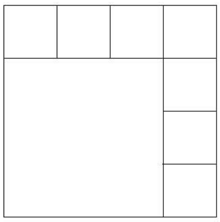
1.2 Éléments de réponse

Voici quelques idées...

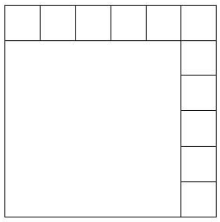
Pour les nombres pairs



6 carrés

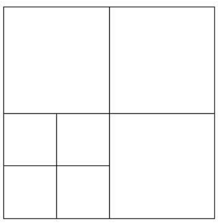


8 carrés

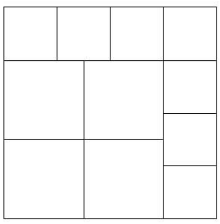


12 carrés

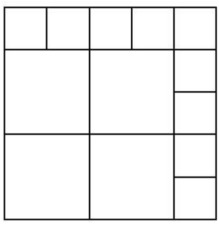
Pour les nombres impairs



7 carrés



11 carrés



13 carrés

Il y a bien d'autres possibilités, mais en procédant ainsi, cela permet d'établir une méthode générale pour les deux questions suivantes.

Pour obtenir 68 carrés :
On répartit d'abord 67 carrés sur deux côtés consécutifs (donc on divise le côté du carré par 34), et le dernier carré est formé par l'espace restant.

Pour obtenir 67 carrés :
On répartit d'abord 63 carrés sur deux côtés consécutifs (donc on divise le côté du carré par 32), et on partage l'espace restant en quatre carrés identiques.

2 Puissance 2008

2.1 Énoncé

Elsa et Jean aiment les jeux mathématiques et se posent mutuellement des petits problèmes :
Elsa dit à Jean : « Choisis un nombre entier, je te dirai quel est le dernier chiffre de sa puissance 2008. »
Jean propose 13.
Elsa lui affirme que ce nombre se termine par 1.
« Et si c'était 14 ? »demande Jean.
« Dans ce cas, la réponse serait 6. »lui affirme Elsa.
Jean prend un papier et un crayon, cherche ... et trouve !
Elsa et Jean sont capables de trouver le dernier chiffre de la puissance 2008 de n'importe quel nombre entier.

Expliquez leur raisonnement et trouvez le dernier chiffre de 2008^{2008} **.**

2.2 Éléments de réponse

Étudions déjà le cas de 13^4.

Pour déterminer le dernier chiffre de la puissance $n^{\text{ème}}$ d'un nombre p, il suffit de déterminer le dernier chiffre de la puissance $n^{\text{ème}}$ du dernier chiffre de p. Ainsi il n'est pas nécessaire de manipuler des nombre à plus de deux chiffres pour répondre aux questions posées dans cet exercice.

Pour déterminer le dernier chiffre d'une puissance quelconque de 13 (ou de 3), il faut ensuite remarquer que les derniers chiffres des puissances successives de trois se répètent de façon cyclique. Ainsi les puissances de 3 sont des nombres qui se terminent par 3 (rang 1, dernier chiffre de 3^1), 9 (rang 2, dernier chiffre de 3^2), 7 (rang 3, dernier chiffre de 3^3), 1 (rang 4, dernier chiffre de 3^4).

Pour connaître le dernier chiffre de 13^{2008} (ce qui n'est pas demandé), il suffit de savoir sur quel rang du cycle de longueur quatre 3, 9, 7, 1, on se situe après avoir élevé 3 à la puissance 2008. Le reste dans la division euclidienne de 2008 par 4 est nul. Il est donné par l'égalité $2008 = 502 \times 4$. On se situe au rang 4 du cycle, le dernier chiffre de 13^{2008} sera donc égal à 1.

Pour toute autre puissance il faut donc connaître les cycles associés aux puissances successives des nombres à un chiffre.

Les puissances de 1 sont des nombres qui se terminent par 1.
Les puissances de 2 sont des nombres qui se terminent par 2, 4, 6, 8.
Les puissances de 3 sont des nombres qui se terminent par 3, 9, 7, 1.
Les puissances de 4 sont des nombres qui se terminent par 4, 6.
Les puissances de 5 sont des nombres qui se terminent par 5.
Les puissances de 6 sont des nombres qui se terminent par 6.
Les puissances de 7 sont des nombres qui se terminent par 7, 9, 3 , 1.
Les puissances de 8 sont des nombres qui se terminent par 8, 4, 2, 6.
Les puissances de 9 sont des nombres qui se terminent par 9, 1.

Ainsi

Le nombre 14 se termine par 4 donc 14^{2008} se termine par 6 (rang 1 du cycle).

Le nombre 2008 se termine par 8 donc 2008^{2008} se termine par 6 (rang 1 du cycle).

3 Baignade

3.1 Énoncé

David et Corentin sont deux amis qui apprécient la baignade en rivière.
Quand David se baigne seul, il va au plus près de chez lui, c'est à 600 mètres.
Corentin, lui, doit parcourir 1,400 kilomètre.
Mais le plus souvent, les deux amis se retrouvent sur une petite plage située à égale distance de leurs deux maisons.
La maison de David et celle de Corentin sont distantes de 1,700 kilomètre.

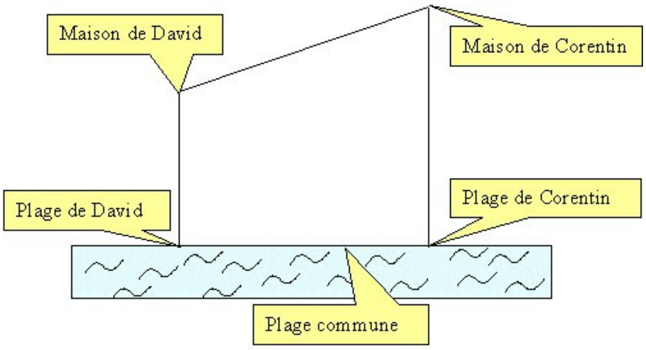
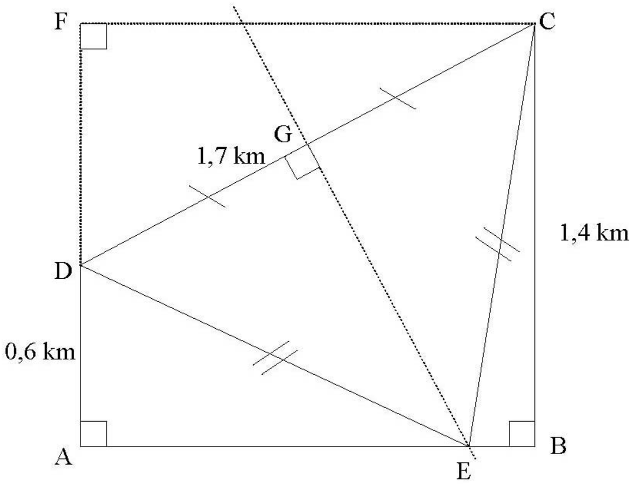


Schéma proposé par David (non à l'échelle)

Construisez une figure à l'échelle $1/20\,000$ où apparaît le lieu de baignade commune des deux amis. Calculez la distance qui sépare la plage de David et la plage commune.

3.2 Éléments de réponse

Les points D et C désignent respectivement les maisons de David et Corentin. Le point A désigne la plage où se baigne David lorsqu'il est seul, et le point B désigne la plage où se baigne Corentin lorsqu'il est seul. Puisque la plage où les deux amis se retrouvent est située à égale distance, elle peut être désignée par le point E situé à l'intersection du segment $[AB]$ et de la médiatrice du segment $[DC]$. Ci-dessous la figure modélisant la situation à l'échelle $1/20000^{\text{ème}}$:



Dans un premier temps, on peut calculer la distance AB ou FC.

En utilisant le triangle rectangle en F, FCD le théorème de Pythagore, permet d'écrire : $DC^2 = FD^2 + FC^2$ donc $FC^2 = 1,7^2 - (1,4 - 0,6)^2 = 2,25$.

Par conséquent, $FC = AB = 1,5$

On calcule ensuite la distance AE : Nous pouvons considérer les deux triangles rectangles DAE et CEB dans lesquels nous utilisons à nouveau le théorème de Pythagore. On a

$$\begin{array}{rcl} DE^2 & = & DA^2 + AE^2 \\ CE^2 & = & CB^2 + BE^2 \end{array}$$

Donc, $DE^2 = CE^2 = 0,6^2 + AE^2 = 1,4^2 + (1,5 - AE)^2$.

Soit après développement :

$$\begin{array}{rcl} 0,36 + AE^2 & = & 1,96 + 2,25 - 3AE^2 + AE^2 \\ 3AE & = & 1,96 + 2,25 - 0,36 \\ 3AE & = & 3,85 \\ AE & \approx & 1,28 \end{array}$$

La distance entre la plage de David et la plage commune est d'environ $1,280$ km.

4 Des cubes et des solides

4.1 Énoncé

On dispose de quatre cubes blancs de mêmes dimensions dont les faces sont identiques.

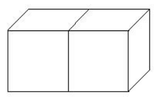
Combien de solides différents de l'espace obtient-on en accolant tous les cubes deux à deux par une face ?

Donnez, sur une feuille quadrillée, une représentation de chacun de ces solides.

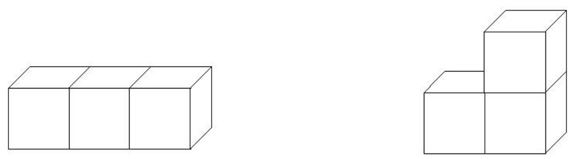
4.2 Éléments de réponse

Représentation des quatre cubes de départ :

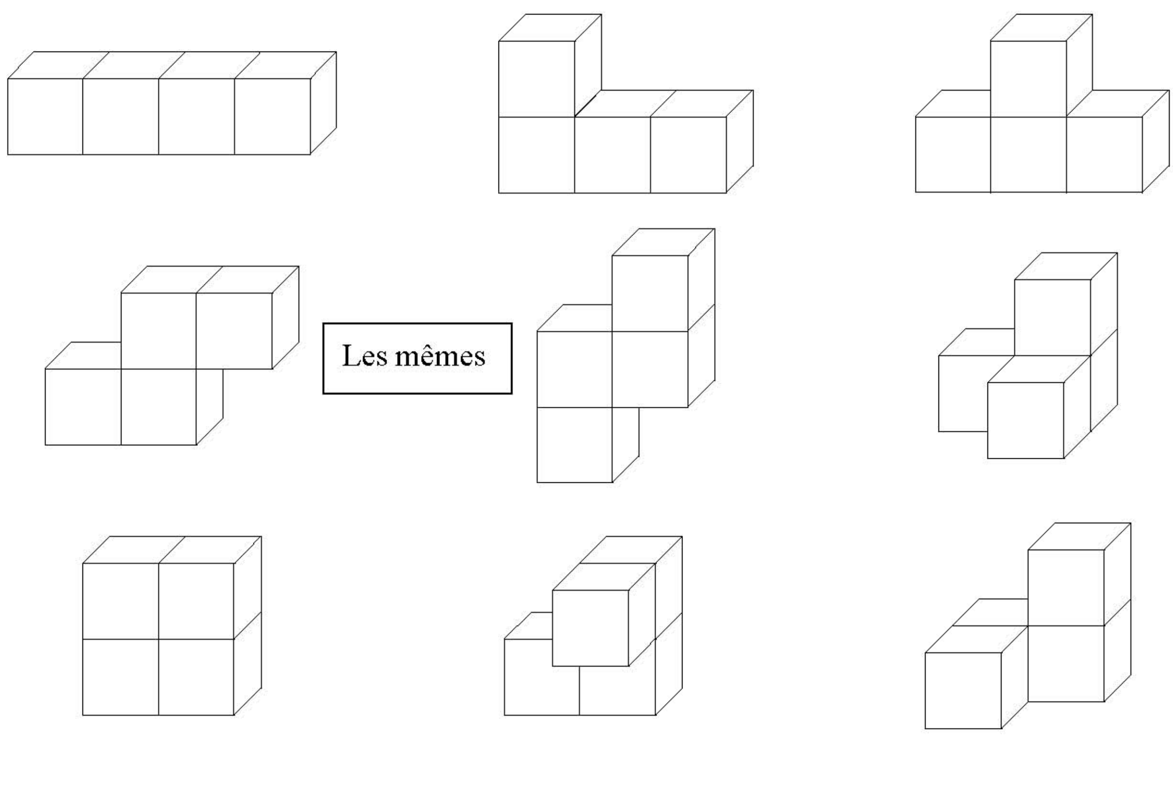
En assemblant deux cubes, nous obtenons un solide :



Avec trois cubes, nous avons maintenant deux solides :



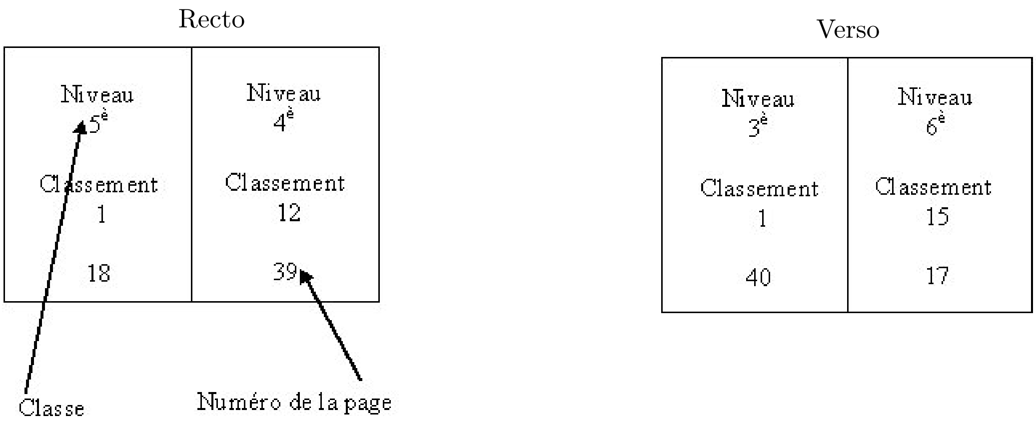
Et avec quatre cubes, huit solides



5 Rallye mathématique

5.1 Énoncé

Le rallye mathématique est organisé chaque année dans les collèges du département.
Chaque année est éditée une revue composée de la manière suivante :
La page 1 contient le titre. La présentation du rallye est en page 2.
A partir de la page 3, chaque page est consacrée à une classe participante avec une photo de la classe, un mot de leur professeur de maths et leur classement au rallye. Ainsi la page 3 est consacrée à la 6^{è} classée première, la page 4 à la 6^{è} classée deuxième, ... , et ainsi de suite jusqu'à la classe de 3^{è} la moins bien classée.
Enfin, les six dernières pages sont écrites par les professeurs organisateurs du rallye.
Un jour, Bertrand trouve une feuille qui s'est détachée de la revue de l'année précédente. Il s'agit d'une feuille A3 pliée en deux. Cette feuille (ou plutôt ses informations essentielles) est décrite ci-dessous.



Aidez Bertrand à retrouver le nombre de pages de la revue, le nombre de classes participantes, le nombre de classes de chaque niveau ayant participé au rallye.

5.2 Éléments de réponse

Si n est le nombre de pages de la revue, la première feuille $A3$ présente au recto les pages 1 et n, au verso les pages 2 et $n-1$. De même, la seconde feuille $A3$ présente au recto les pages 3 et $n-2$, au verso les pages 4 et $n-3$, ...

Ainsi, nous admettrons que la somme des numéros inscrits sur une des faces d'une feuille A3 quelconque est toujours $n+1$.
Comme $18+39=57$, la revue compte 56 pages.

Parmi ces 56 pages, seules les deux premières et les six dernières ne sont pas consacrées aux classes participantes, il y a donc eu 48 classes participantes.

La page 17 est consacrée à une sixième et la page 18 à une cinquième, donc 15 classes de sixième ont participé.
De même, la page 39 est consacrée à une quatrième et la page 40 à une troisième, donc 12 classes de quatrième ont participé.
Les classes de troisième sont alors présentées entre la page 40 (incluse) et la page 50 (incluse) puisque les 6 dernières pages de la revue présentent les énoncés, les professeurs organisateurs et les remerciements.

Il y a donc eu 11 classes de troisième participantes.

Pour les classes de cinquième, on sait que 48 classes ont participé au rallye . Il y a donc eu, par différence, 10 classe de cinquième participantes.

6 Mystère autour d'une boîte

6.1 Énoncé

Une boîte de jeux de société a la forme d'un parallélépipède rectangle. Les arêtes mesurent un nombre entier de centimètres. Les faces ont pour aires 96 cm^2, 160 cm^2 et 240 cm^2.

Déterminez le volume de cette boîte.

6.2 Éléments de réponse

Si a, b et c désignent des entiers donnant les mesures de la boîte de jeux, le volume de cette boîte est $a \times b \times c$.

Les données de l'énoncé se traduisent par $ab = 96$; $bc = 160$; $ac = 240$.

On a donc $ab \times bc \times ac = 96 \times 160 \times 240$.

Le volume de la boîte de jeux est donc égale à 1920 cm^3.

7 Lampadaires

7.1 Énoncé

Le jardin public de Triville a la forme d'un triangle ABC isocèle en B tel que :
AB = BC = 60 m et AC = 90 m.
Pour éclairer ce jardin de manière homogène, Monsieur le maire propose d'installer quatre lampadaires : un en A, un en C, un en M (situé sur le segment [AB]) et le quatrième en N sur le segment [BC].
Le conseiller technique de la mairie cherche à déterminer les emplacements des lampadaires de sorte que les longueurs AM, MN et NC soient égales.

Construisez le plan du jardin public à l'échelle 1/500 sur lequel vous noterez les emplacements des lampadaires.

7.2 Éléments de réponse

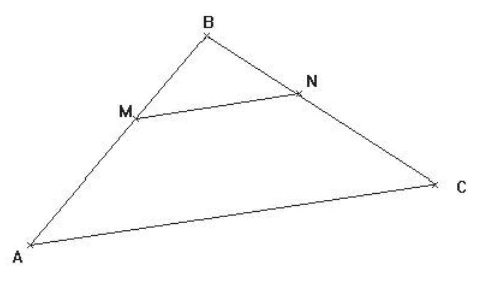
Soit ℓ la longueur cherchée. Le triangle ABC étant isocèle de sommet B, la contrainte $AM = AN$ implique les égalités $BM = BN = 60 - \ell$.

On peut donc faire apparaître des rapports égaux : sachant que les points B, M, A d'une part et B, N, C d'autre part sont alignés dans le même ordre et que $\dfrac{BM}{BA} = \dfrac{BN}{BC}$ d'après la réciproque du théorème de Thalès, $(MN)//(AC)$.

D'après le théorème de Thalès, on a : $\dfrac{60-\ell}{60} = \dfrac{\ell}{90}$; on a $90(60 - \ell) = 60\ell$ donc $\ell = 36$.

Construction à l'échelle 1/500$^{\text{ème}}$:

- 12 cm représentent 60 m ;
- 18 cm représentent 90 m ;
- 7,2 cm représentent 36 m ;



8 Cadenas

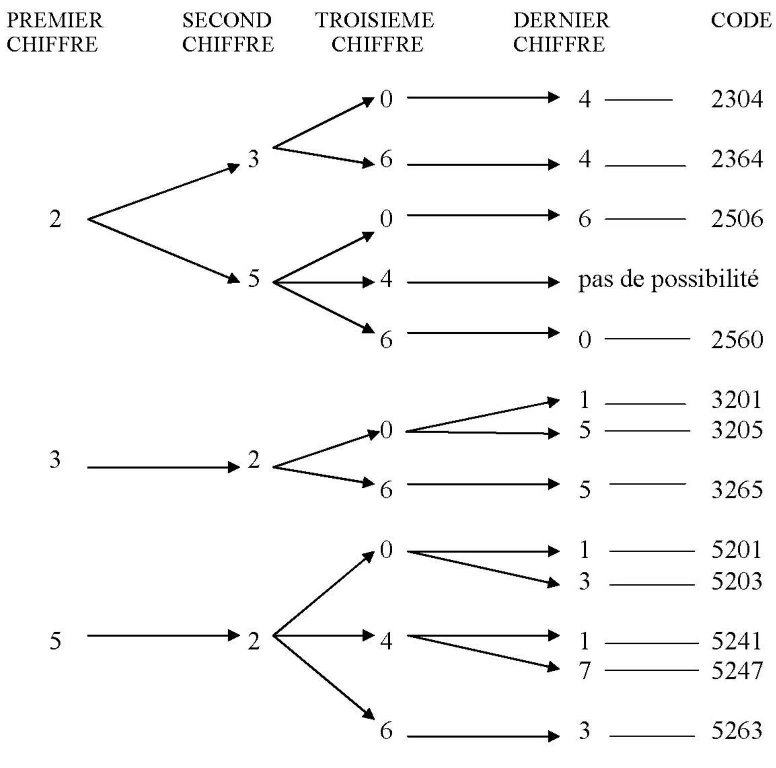
8.1 Énoncé

Le lycée met à disposition de Margot un casier pour qu'elle puisse y ranger ses affaires. Ses parents lui ont donné un cadenas semblable à celui dessiné ci-contre.
La combinaison du cadenas est formée de quatre chiffres tous compris entre 0 et 7.
Pour se souvenir de la combinaison, Margot (qui se passionne pour l'arithmétique) se rappelle que :
- les quatre chiffres de la combinaison sont tous différents les uns des autres.
- les deux premiers chiffres sont des nombres premiers dont la somme est aussi un nombre premier.
- la somme des trois premiers chiffres est un nombre premier.
- la somme des trois derniers chiffres est aussi un nombre premier.

Citez toutes les combinaisons que Margot peut essayer pour être sûre d'ouvrir le cadenas.

8.2 Éléments de réponse

La somme des deux premiers chiffres est un nombre premier. Or ces deux chiffres sont eux-mêmes des nombres premiers, donc l'un des deux premiers chiffres est 2, l'autre ne peut être que 3 ou 5. Il y a douze possibilités pour choisir les deux premiers chiffres. Les 12 combinaisons possibles sont données par l'arbre suivant :

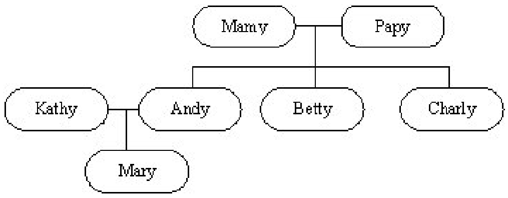


9 Famille 2008

9.1 Énoncé

Papy et Mamy Depin ont toujours bon pied, bon œil. Quand ils se sont rencontrés, ils avaient tous deux 18 ans.
Plus tard, ils se sont mariés et ont eu trois enfants : Andy, Betty et Charly sont nés dans cet ordre à exactement deux ans d'intervalle. L'aîné Andy a aujourd'hui plus de 40 ans, il est marié avec Kathy et est l'heureux papa de la petite Mary.
Papy leur montre l'arbre généalogique de la famille Depin.
Mary est en train de jouer avec la calculatrice de Papy : machinalement, elle ajoute les âges de ses grands-parents avec ceux de leurs trois enfants, puis multiplie le résultat obtenu par son âge. A sa grande surprise, la calculatrice affiche 2008.

Extrait de l'arbre généalogique



Déterminez les âges possibles de Papy et de Mamy sachant que tous les âges sont des nombres entiers.

9.2 Éléments de réponse

La décomposition en produit de facteurs premiers de 2008 est la suivante : $2008 = 2^3 \times 251$.

Ceci nous permet d'affirmer que Mary a 8 ans. Elle ne peut évidemment pas avoir 251 ans, et si elle avait 4 ans, la somme des âges des cinq adultes serait égale à 502, soit une moyenne d'âge supérieure à 100 ans.

Appelons désormais x l'âge de Betty et a l'âge des parents à la naissance de Betty.

Nous savons par l'énoncé que $x \geq 38$ et que $a \geq 20$.

On a,

$$(x-2)+x+(x+2)+2(x+a)=251$$

Soit encore

$$5x+2a=251$$

Et donc

$$5x=251-2a\,.$$

On sait que le chiffre des unités d'un multiple de 5 ne peut être que 0 ou 5. De plus, $2a$ est un nombre pair, donc $251-2a$ est un nombre impair. Par conséquent, $5x$ est un nombre dont le chiffre des unités est 5. Il en résulte que $2a$ est un nombre dont le chiffre des unités est 6, ce qui permet de conclure que le chiffre des unités de a ne peut être que 3 ou 8. Dans le tableau suivant, on va tester successivement les valeurs possibles de a :

a	x	Age d'Andy	Age de Betty	Age de Charly	Ages de Papy et Mamy	Solution acceptable ?
23	**41**	**43**	**41**	**39**	**23 + 41 = 64**	Oui
28	**39**	**41**	**39**	**37**	**28 + 39 = 67**	Oui
33	37	39	37	35	33 + 37 = 70	Non

La dernière possibilité n'est pas acceptable car Andy doit avoir plus de 40 ans. Si on fait d'autres essais en augmentant encore la valeur de a, on obtiendra des valeurs de x de plus en plus petites, ce qui contredira l'hypothèse qu'Andy a plus de 40 ans.

En conclusion, nous avons deux solutions possibles pour les âges des cinq adultes ainsi que l'indique le tableau ci-dessus.

Papy et Mamy Depin peuvent avoir tous deux 64 ans ou 67 ans.