Eléments de solution de l'épreuve de la finale RMFC 2009

1 - Les lots

Par balayage

En listant les premiers multiples de 72, il apparaît que le prix d'un lot est inférieur à 14 € puisque le prix"énigme"s'élève à moins de 1000 €.

1	72
2	144
3	216
4	188
5	360
6	432
7	504
8	476
9	648
10	720
11	792
12	864
13	936
14	1008
15	1080
etc	etc

Parmi ces multiples, on observe que 3**6**0 = 5×72 et 8**6**4 = 12×72 ont la particularité d'avoir 6 pour chiffre des dizaines. Le prix unitaire pourrait être compris entre 5€ et 6€ (1$^{\text{ière}}$ hypothèse) ou entre 12€ et 13€ (2$^{\text{nde}}$ hypothèse).

Suivons notre première hypothèse : _67,9_ = 360 + 7,9_ et raisonnons maintenant en centimes d'euros.

7,9_ euros est égal à 79_ centimes d'euros. Cherchons dans le tableau ci-contre un multiple de 72 qui s'approche de 79_. Il y a $11\times72 = 792$ c'est-à-dire $0{,}11\times72 = 7{,}92$. On peut maintenant conclure que le prix énigme est de : 360 + 7,92 = 367,92 (et le prix d'un lot est de 5,11€).

Et si nous avions suivi notre deuxième hypothèse ?

_67,9_= 864 + 3,9_. Raisonnons maintenant en centimes d'euros : 3,9_ euros égal à 39_ centimes d'euros. Cherchons dans le tableau ci-contre un multiple de 72 qui a la forme de 39_.

Il n'y en a pas !

Conclusion : Le prix des 72 lots est de 367,92.

En utilisant des critères de divisibilité

En recherchant le montant exprimé en centimes d'euros, il est possible d'utiliser des critères de divisibilité.

72 × ? = _679_ indique que le prix"énigme"est un multiple de 72. Il est donc divisible par 72 mais aussi par tous les diviseurs de 72 qui sont 2, 4, 3, 6, 8, 9,…..

Première solution:

Comme _679_ est divisible par 2 alors il est pair : {_679**0** ; _679**2** ; _679**4** ; _679**6** ; _679**8**}.

Comme _679_ est divisible par 3 alors la somme de ses chiffres l'est aussi.

	_6790	_6792	_6794	_6796	_6798
Somme des chiffres doit être un multiple de 3	26790 56790 86790	36792 66792	16794 46794 76794	26796 56796 86796	36798 66798 96798

Parmi les hypothèses faites ci-dessus, certains nombres (prix "énigme") ne sont pas des multiples de 72.Testons les :

	_6790	_6792	_6794	_6796	_6798
Je barre les nombres qui ne sont pas multiples de 72 (le reste de la division euclidienne n'est pas nul)	~~26790~~ ~~56790~~ ~~86790~~	36792 ~~66792~~	~~16794~~ ~~46794~~ ~~76794~~	~~26796~~ ~~56796~~ ~~86796~~	~~36798~~ ~~66798~~ ~~96798~~

Il apparaît qu'un seul nombre convient 36792. Donc le prix est de 367,92 €.

Conclusion : Le prix des 72 lots est de 367,92.

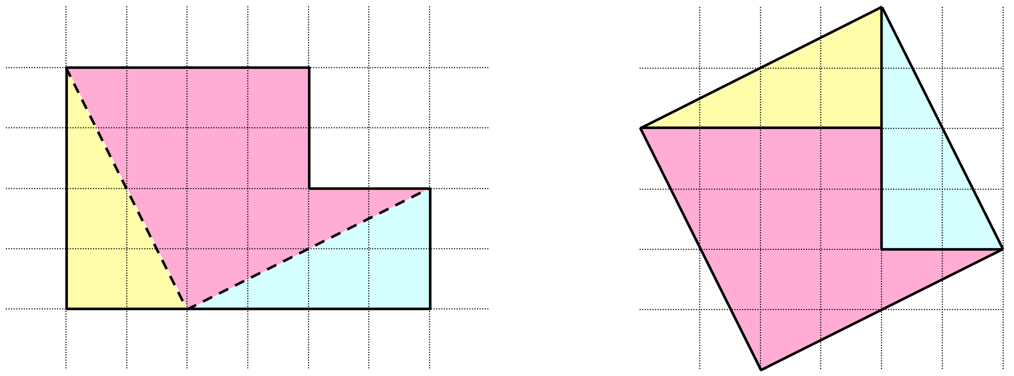
2 - La table en chêne

Le rectangle a pour aire six mètres carrés, si on l'ampute d'un carré de un mètre carré, il reste cinq mètres carrés utilisables. Le plateau restant a des côtés dont les longueurs sont des nombres entiers. Si l'on veut une table carrée, son côté doit mesurer racine carré de cinq mètres

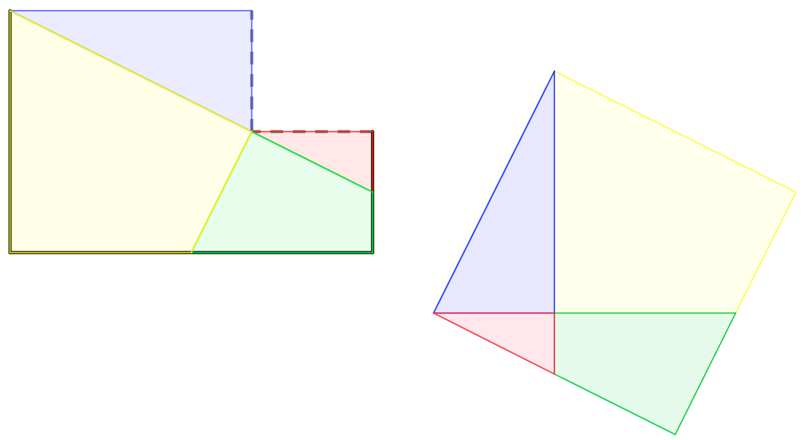
Il suffit de mettre en évidence des segments dont la longueur est racine carrée de cinq, par exemple l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés un et deux. Le quadrillage permet de repérer facilement les segments désirés. Voir dessin ci-dessous.

Il suffit de vérifier que les deux triangles rectangles peuvent se rabattre sur la pièce centrale par déplacement, par exemple en utilisant le quadrillage.

On a donc **une réponse à la question avec deux coupes et trois morceaux.**



- Autre solution en faisant apparaître une fois racine carrée de cinq et un angle droit pour le découpage suivant :



On a alors une **solution avec deux coupes et quatre morceaux.**

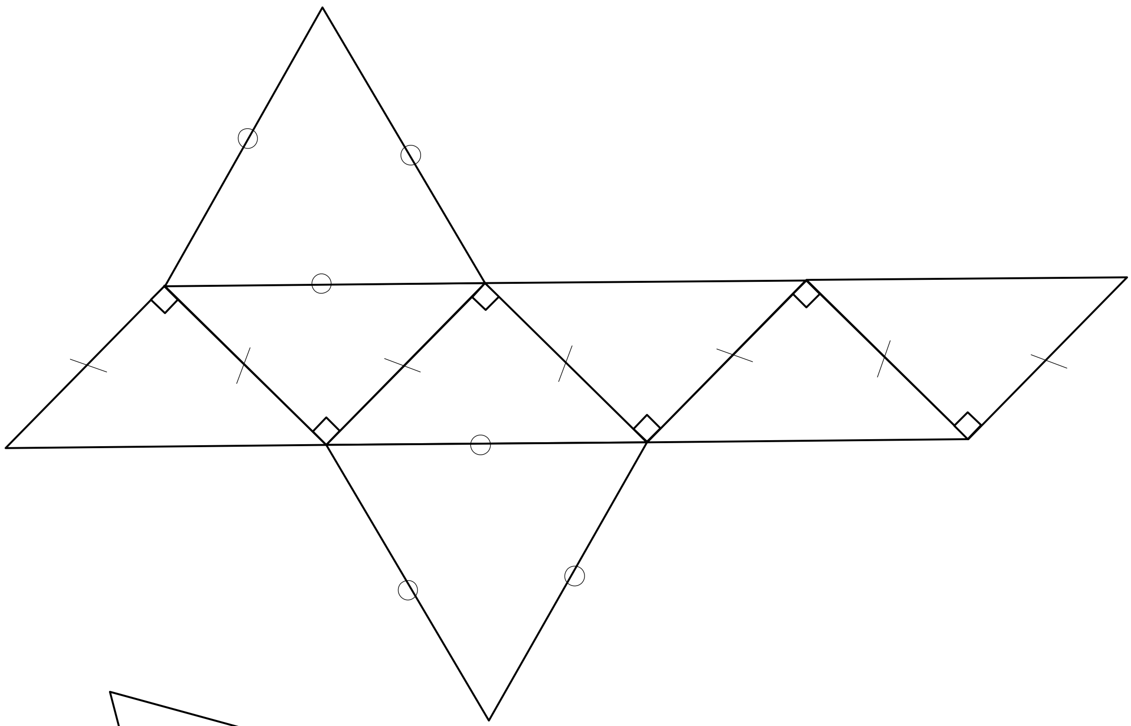
3 - Patron, un antiprisme

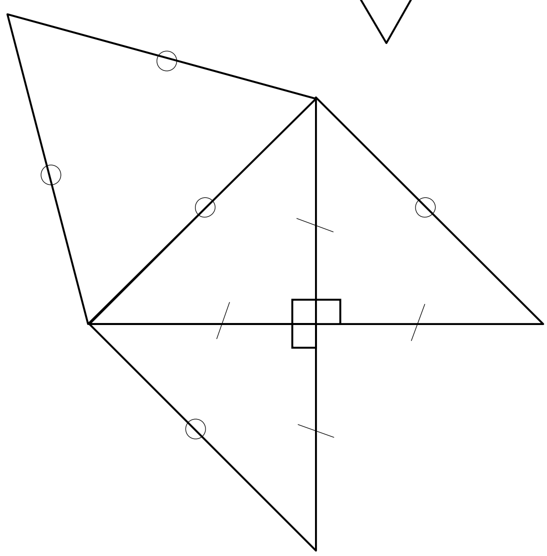
Les propriétés du cube permettent de désigner les faces de cet antiprisme.

Il est composé de deux triangles équilatéraux et de six triangles rectangles isocèles, dont les longueurs des côtés sont respectivement $3\sqrt{2}$ et 3.

$3\sqrt{2}$ est la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle dont le côté mesure 3.

Le tétraèdre est composé d'un triangle équilatéral de côté $3\sqrt{2}$ et de trois triangles rectangles isocèles dont le côté de l'angle droit mesure 3.





4 - Croix dans un carré

Un carré de côté six centimètres est tracé, ainsi que ses quatre axes de symétrie. Puis on trace une croix comme indiquée dans l'énoncé, afin d'étudier cette configuration (fig1).
Le carré, les axes de symétrie et la croix déterminent des triangles rectangles isocèles, des rectangles et des carrés. Les différentes symétries permettent d'associer à deux figures de même aire la même lettre. La condition demandée se traduit par :
$8\alpha + 8\gamma = 8\beta + 8\gamma$ ce qui est équivalent à $\beta = \gamma$ voir figure 2.
La figure 3 est une figure extraite de la figure 2. Le problème posé est donc de construire un rectangle ayant la même aire que le triangle rectangle isocèle.
Comment traduire que l'aire β du rectangle ABDE est égale à l'aire γ du triangle rectangle isocèle BCD ? (fig4).
Soit CH une hauteur du triangle BCD d'aire et HK la distance entre $[BD]$et$[AE]$.
L'aire de ABDE est $BD \times HK$, l'aire de BCD est $\dfrac{BD \times CH}{2}$, $\beta = \gamma$ se traduit par
$CH = 2 \times HK$ soit encore $CH = \dfrac{2}{3} \times CK$. En appelant F le sommet du carré, on projette sur le côté du carré : C donne C, H donne B et K donne F.
$CH = \dfrac{2}{3} \times CK$ est équivalent à $CB = \dfrac{2}{3} \times CF$ or $CF = 3$ d'où $CB = 2$ ou $FB = 1$

Ce qui permet d’en déduire que B est au tiers sur le côté du petit carré ou au sixième sur le côté du carré de départ, à partir du sommet F.
Cela permet alors de réaliser les tracés sur le carré donné de la feuille réponse.

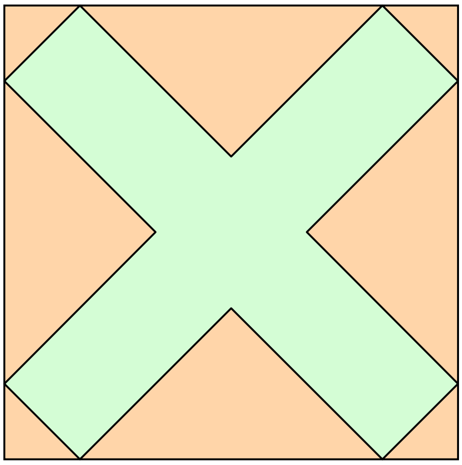


Figure 1

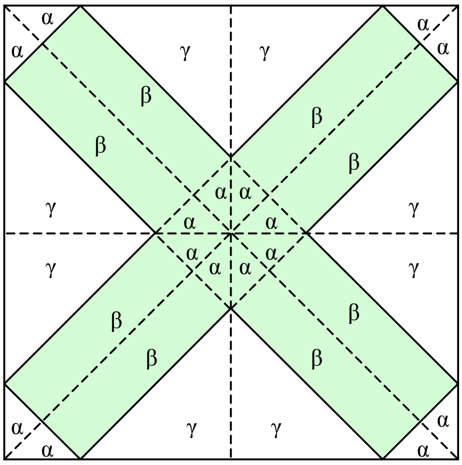


Figure 2

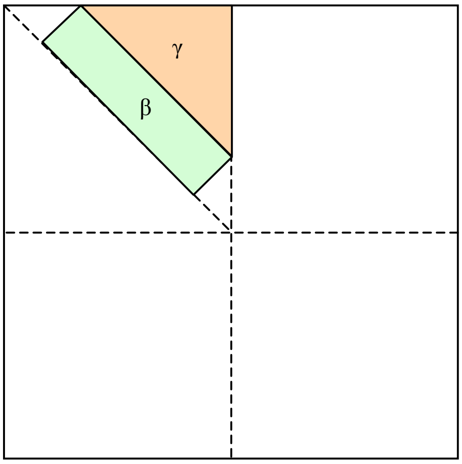


Figure 3

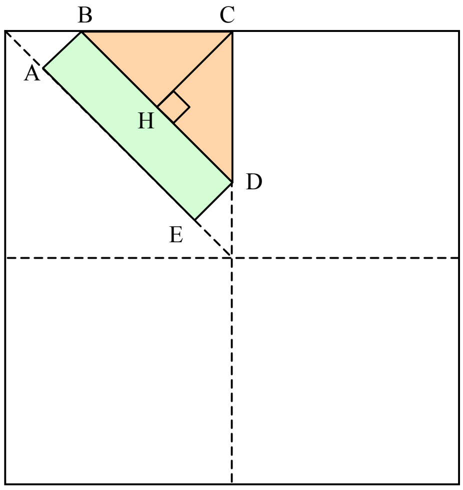
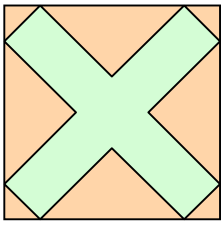


Figure 4

Autre méthode



Soit un carré ABCD, M le sommet de la croix sur le côté $[AB]$ du côté de A, I le milieu de $[AB]$. On pose x la distance de I à M, avec x strictement compris entre 0 et 3. L’aire du carré est de 36 cm^2, calculons l’aire de la croix en fonction de x.
La largeur d’une bande est $(3-x)\sqrt{2}$, la longueur d’une bande est $(3+x)\sqrt{2}$. L’aire du carré, superposition des deux bandes est $(3-x)\sqrt{2}.(3-x)\sqrt{2}$.
L’aire de la croix est donc $2.(3-x).\sqrt{2}.(3+x)\sqrt{2}-(3-x)\sqrt{2}.(3-x)\sqrt{2}$.
La condition demandé se traduit par :
$2.(3-x).\sqrt{2}.(3+x)\sqrt{2}-(3-x)\sqrt{2}.(3-x)\sqrt{2}=18$ ce qui est équivalent à $x.(x-2)=0$
Les solutions de cette équation sont : 0 et 2. Compte tenu des conditions, 2 est la solution à ce problème.

Conclusion :
Sur un carré de côté six centimètres, les points situés à un centimètre de chacun des sommets, déterminent les sommets d’une croix, dont les axes de symétrie sont ceux du carré et dont l’aire est la moitié de celle du carré.

5 - La combinaison

Nous supposons que le premier chiffre de N est noté a (a compris entre 3 et 9, compte tenu de l'indice 2). L'indice 1 permet de limiter les écritures de N aux formes aabb, abab, abba et que l'autre chiffre est noté b (b compris entre 0 et 9).
L'indice 3 précise que N est multiple de 5. Un multiple de 5 se termine par 0 ou par 5. N a donc une écriture de la forme aa00, aa55, a0a0, a5a5 ou 5bb5.
L'indice 4 précise que N est multiple de 3, la somme de ses chiffres est alors multiple de 3.
Dans le cas de l'écriture aa00, cela signifie que 2a est multiple de 3, ce qui fournit $a = 3$ ou $a = 6$ ou $a = 9$.
Dans le cas de l'écriture aa55, cela signifie que 2a + 10 est multiple de 3, ce qui fournit a = 4 ou a = 7.
Dans le cas de l'écriture a0a0, cela signifie que 2a est multiple de 3, ce qui fournit $a = 3$ ou $a = 6$ ou $a = 9$.
Dans le cas de l'écriture a5a5, cela signifie que 2a + 10 est multiple de 3, ce qui fournit a = 4 ou a = 7.
Dans le cas de l'écriture 5bb5, cela signifie que 2b + 10 est multiple de 3, ce qui fournit b = 1 ou b = 4 ou b = 7.
On a donc N = 3300 ou N = 6600 ou N = 9900 ou N = 4455 ou N = 7755 ou N = 3030
N = 6060 ou N = 9090 ou N = 4545 ou N = 7575 ou N = 5115 ou N =5445 ou N = 5775
L'indice 5 permet de déterminer le nombre clé, multiple de 7 parmi les 13 entiers précités.
Il s'agit de 5775.

Conclusion : Le nombre clé permettant d'accéder au trésor est 5775.
Autre méthode : Les indices 3, 4, 5 indiquent que N est un multiple de 105 (105 = 3x5x7)
N est donc un entier de 4 chiffres de la forme 105k avec k entier compris entre 10 et 95. Les indices 1 et 2 permettent de choisir l'unique solution.

6 - Dé premier et dé double
Les numéros du dé de Primus sont 13, 17, 19, 23, 29 et 31.
Ceux du dé de Doblus sont 16, 18, 20, 22, 24 et 26
On s'aperçoit que Primus a ses trois plus petits numéros inférieurs aux trois plus petits numéros de Doblus, mais ses trois plus grands numéros sont supérieurs aux trois plus grands numéros de Doblus. Cette constatation ne permet donc pas de conclure.
Il est donc nécessaire d'envisager les 36 situations possibles.
On établit un tableau à double entrée des résultats possibles.

Tableau récapitulatif

dé Primus → / dé Doblus ↓	13	17	19	23	29	31
16	D	P	P	P	P	P
18	D	D	P	P	P	P
20	D	D	D	P	P	P
22	D	D	D	P	P	P
24	D	D	D	D	P	P
26	D	D	D	D	P	P

Nombre de victoires de Primus	19
Nombre de victoires de Doblus	17
Total	36

Sur un grand nombre de parties, Primus gagnera avec une fréquence proche de $\frac{19}{36}$.

Doblus gagnera avec une fréquence proche de $\frac{17}{36}$. Primus a donc plus de chance de s'enrichir que Doblus.

Conclusion intuitive : Primus a plus de chance de s'enrichir.

7 - Strike !

Au niveau 1, on a 1+2 soit 3 quilles, au niveau 2 on a 1+2+3 soit 6 quilles (3+3), au niveau 3 on a 1+2+3+4 soit 10 quilles (6+4), au niveau 4 on a 1+2+3+4+5 soit 15 quilles (10+5), au niveau 5 on a 1+2+3+4+5+6 soit 21 quilles (15+6)……..
Chaque niveau est composé de quilles disposées en triangles équilatéraux. On passe d'un niveau n au niveau n+1 en utilisant le niveau n et en ajoutant une rangée de quilles dont le nombre est égal au nombre de quilles de la dernière rangée du niveau n plus une.
Le côté du niveau n est composé de n+1 quilles. Au niveau n on a n+1 rangées de quilles dont le nombre varie entre 1 et n+1.
En passant du niveau 140 au niveau 141, on ajoute 142 quilles. Partant du niveau 140 pour arriver au niveau 150, il faut ajouter 10 rangées dont chacune d'elles contient respectivement les nombres 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151 ; soit un total de 1465.
Sachant que le niveau 140 contient 10 011 quilles, le niveau 150 contiendra 10 011+ 1465 soit un total de 11476.

Conclusion : Dans son rêve, Willem a fait tomber 11476 quilles au niveau 150.

8 - Octogone régulier

Un octogone régulier est un polygone ayant huit sommets situés sur un cercle et ses côtés sont de même longueur.
Pour tracer un tel polygone, il suffit de tracer huit segments de même longueur ayant un point commun et faisant un angle de 45°.

La figure 1 est une bande constituée de deux segments parallèles

Figure 1

La superposition de deux bandes permet de tracer un quadrilatère (fig2). En prenant deux côtés consécutifs, l’aire de ce quadrilatère est le produit de la longueur d’un côté par la hauteur. Or la hauteur (largeur de la bande) est la même pour chacune des deux bandes, donc les côtés consécutifs ont la même longueur. Ce quadrilatère est donc un losange, en conséquence les deux diagonales sont perpendiculaires (fig3).

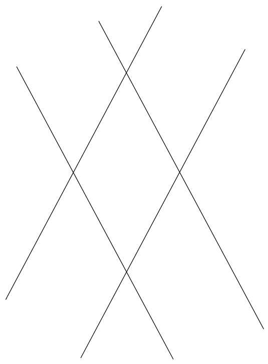


Figure 2

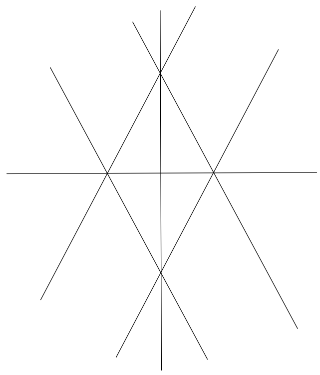


Figure 3

A partir de ces deux droites perpendiculaires, en utilisant la règle donnée, on trace des droites parallèles à celles-ci. On obtient les sommets d’un grand carré, la longueur des côtés est égale à deux fois la largeur de la règle, comme l’indique la figure 4.

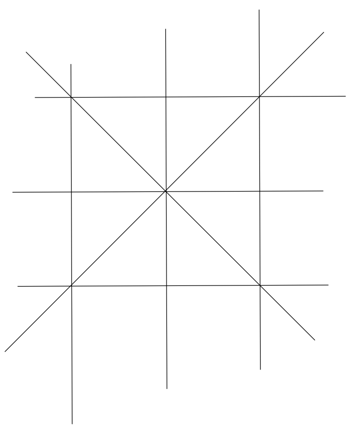


Figure 4

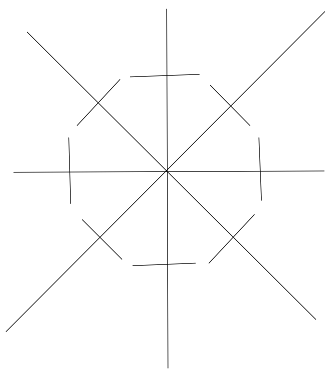


Figure 5

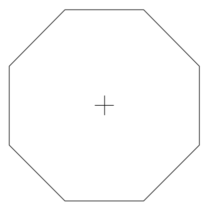


Figure 6

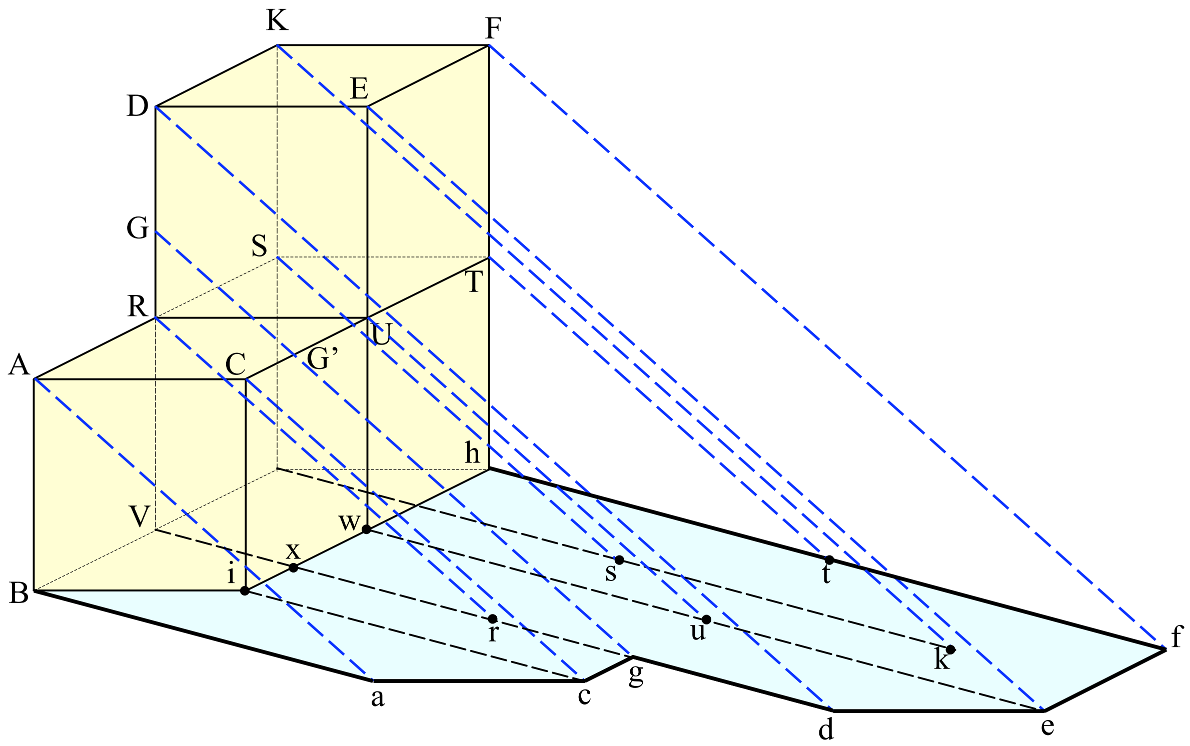
Les axes de symétries de ce carré déterminent des angles de 45°, de même sommet, le centre du carré.
Sur chacune de ces demi-droites, on trace des segments de longueur la largeur de la bande.

Conclusion : La figure 6 est un octogone régulier.

9 - Ombre

Sur le dessin, sont notés, au fur et à mesure, les points utiles aux tracés, en premier, les sommets des trois cubes. Les points projetés sont notés en minuscules.
De C on trace la parallèle à (Aa) qui coupe la parallèle à (B a) passant par i en c.
Tous les autres points sont construits de la même manière. Des vérifications sont réalisées en utilisant les milieux, le projeté d’un milieu d’un segment étant le milieu du segment projeté.
Par exemple : U étant le milieu de $\left[CT\right]$ alors u est le milieu de $\left[ct\right]$.

Remarque : certains points sont à l'intérieur du polygone délimitant l'ombre, mais cela permet de mieux comprendre et de réaliser l'ombre des côtés des cubes lorsque ceux-ci sont en fil de fer.



Conclusion :
L'ombre de ce solide, sur le bureau est l'intérieur du polygone (BacgdefhiB).