Eléments de solution des exercices de l'épreuve de la qualification RMFC 2008/2009

Les éléments de solution choisis proposent des méthodes accessibles aux élèves. Des solutions « expertes » seront ajoutées à celles-ci dans le document déposé, prochainement, sur le site de l'IREM.

Exercice 1 : Le fol écureuil

On peut associer à chaque nombre n de noisettes déposées, un point M_n.

1) Après avoir placé M_{15} la distance OM_{15} est donnée en appliquant le théorème de Pythagore dans un triangle de côtés 4mètres et 3 mètres: $OM_{15} = \sqrt{(4)^2+(3)^2} = \sqrt{25} = 5$.

2) En observant la spirale, on remarque que 5, 9 et 13 ont pour reste 1 dans la division par 4 et que M_5, M_9 et M_{13} sont sur la demi-droite $\left[M_2M_5\right)$.

Leur distance par rapport à M_2 peut être déterminée en comptant le nombre de diagonales du carré unité du quadrillage.

En effet, l'élève remarque que $5 = 1\times4+1$ $\quad 9 = 2\times4+1$ $\quad 13=3\times4+1$ et que M_5, M_9 et M_{13} sont respectivement à 1, 2 et 3 diagonales du point M_2.

Or $2009 = 502\times4 + 1$ donc le reste de la division de 2009 par 4 est 1 et le point M_{2009} est sur la demi-droite $\left[M_2M_5\right)$ et sa distance par rapport à M_2 est 502 diagonales.

Une diagonale mesurant $\sqrt{2}$ mètres, $M_2M_{2009} = 502\sqrt{2} \approx 710$ mètres.

Conclusion :

La plus courte distance pour rejoindre la cachette ayant 15 noisettes est de 5 mètres.

La plus courte distance pour rejoindre la cachette ayant 2009 noisettes est 710 mètres à un mètre près.

Exercice 2 : Engrenage.

Dans un premier temps, nous allons considérer uniquement les deux premières roues :

Quand la roue n°1 fait un tour complet, 30 dents ont tourné.

A ce moment-là, pour la roue n°2, 30 dents aussi ont tourné. Cela correspond à un tour ¼ car 30 = 24 + 6 et que 6 dents représentent ¼ des 24 dents.

Pour que les rayons des deux premières roues soient alignés, il faut donc multiplier le tout par 4, ce qui fait :

Tours 1ère roue	Dents 1ère roue	Dents 2ème roue	Tours 2ème roue
1	30	24 + 6	1 + ¼
4	120	$120 = 5\times24$	5

Même raisonnement maintenant avec la roue n°2 et la roue n°3 : les 120 dents correspondent à $16\times7 + 8$ soit 7 tours et ½. On peut alors compléter le tableau précédent ainsi :

Tours 1ère roue	Dents 1ère roue	Dents 2ème roue	Tours 2ème roue	Dents 3ème roue	Tours 3ème roue
1	30	24 + 6	1 + ¼		
4	120	$120 = 5\times24$	5		
4	120	120	5	$120 = 16\times7 + 8$	7 + ½
8	240	$240 = 10\times24$	10	$240 = 15\times24$	15

Nous obtenons la même figure après 8 tours de la 1ère roue.

Pour qu'elle fasse ces huit tours en 30 secondes, il faut qu'elle tourne à 16 tours par minute.

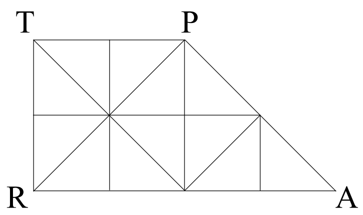
Conclusion : La roue à trente dents doit tourner à la vitesse de seize tours à la minute pour que l'on obtienne la figure de départ.

Exercice 3 : Derby

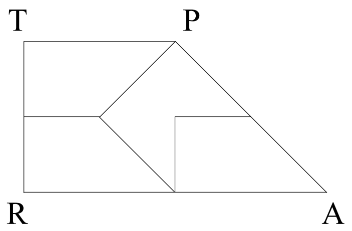
Antoine et Bernard disent tous deux que le Racing a gagné, donc soit ils disent tous deux la vérité, soit ils mentent tous les deux.
De plus, Antoine et Bernard énoncent deux affirmations contradictoires concernant le club ayant marqué le premier. Ils ne peuvent donc pas dire la vérité tous les deux. Comme ils énoncent tous deux la victoire du Racing, Antoine et Bernard sont des menteurs.
Nous savons maintenant que le Racing n'a pas gagné et que le premier but n'a été marqué, ni par le racing, ni par l'Olympique.
Nous en déduisons qu'aucune équipe n'a marqué.
Le seul score possible du match est donc 0-0.
Réciproquement, ce score est effectivement possible et dans ce cas, Chris, tout comme Antoine et Bernard, est également un menteur.
Conclusion : Le score final du match est 0-0.

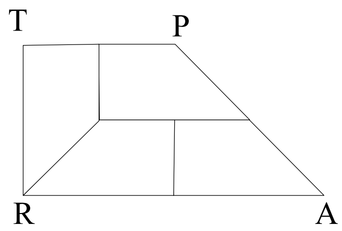
Exercice 4 : Partage d'un trapèze

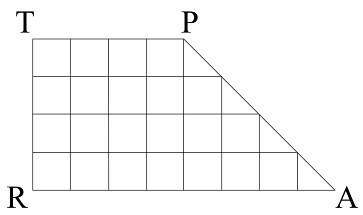
<u>1ère démarche</u> : A partir de la forme définie dans l'énoncé, nous allons effectuer un partage du trapèze en un nombre multiple de 4 de polygones de même forme.



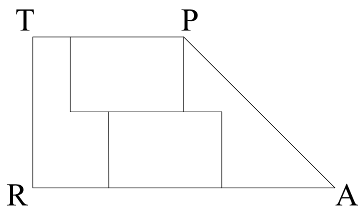
Pré-découpage en douze pièces superposables permettant de voir qu'en juxtaposant trois de ces triangles rectangles et isocèles, on obtiendra une solution.

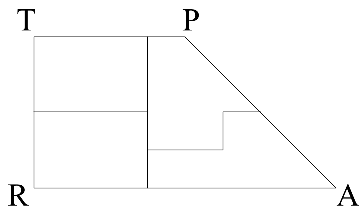


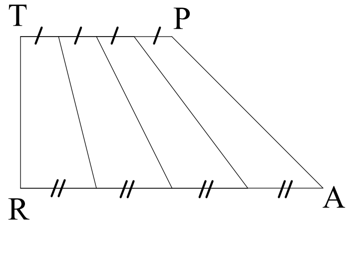




Avec ce découpage, on associera six petits carrés ou quatre carrés et quatre triangles ou cinq carrés et deux triangles etc.…

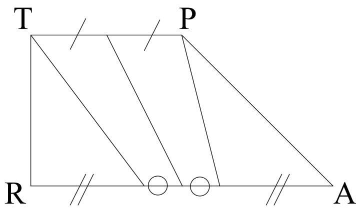




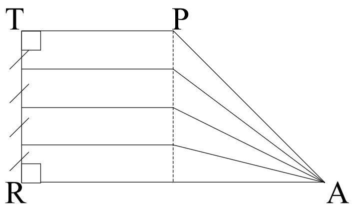


<u>2ème démarche</u> : il est possible de tracer quatre trapèzes de même hauteur et dont les bases mesurent le quart des bases du trapèze initial. Cette construction est alors généralisable à un trapèze quelconque et à un partage en un nombre quelconque de polygones.

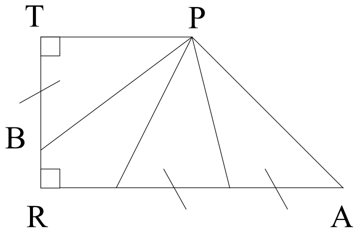
On peut tracer aussi deux trapèzes de bases ½ TP et ¼ TP et deux triangles de bases ¾ TP.



Ou partager le côté [TR] en quatre segments de même longueur :

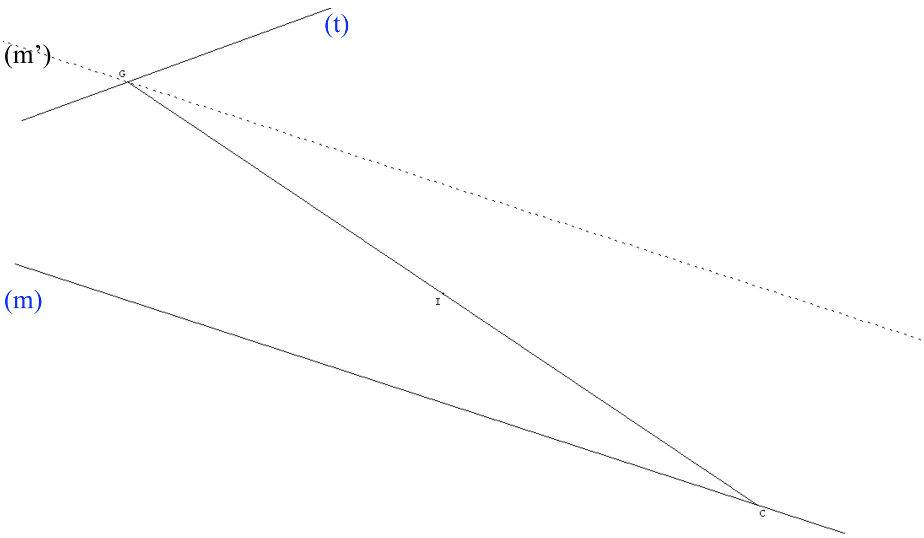


Ici on prend TB = ¾ TR. Les trois triangles ont alors la même aire TP× ¾ TP ÷2 = 3/8 TP² ce qui est bien le quart de l'aire du trapèze. Le polygone restant a donc aussi la même aire.



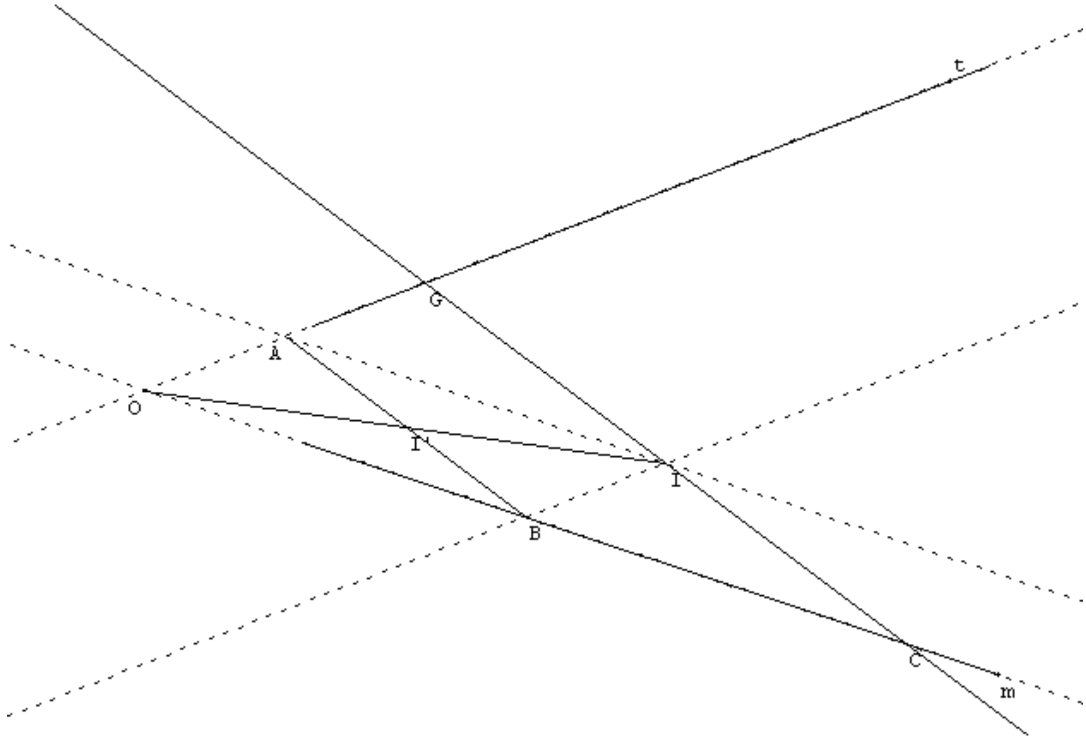
Exercice 5 : Les rues Truc et Muche

Solution 1 : Soit (m') la droite symétrique de la droite (m) par la symétrie centrale de centre I. (m) est donc aussi la droite symétrique de (m') par rapport à I. Nommons G le point d'intersection de (m') et (t). Le symétrique de G par rapport à I est le point C de la droite (m) tel que I soit milieu de [GC].



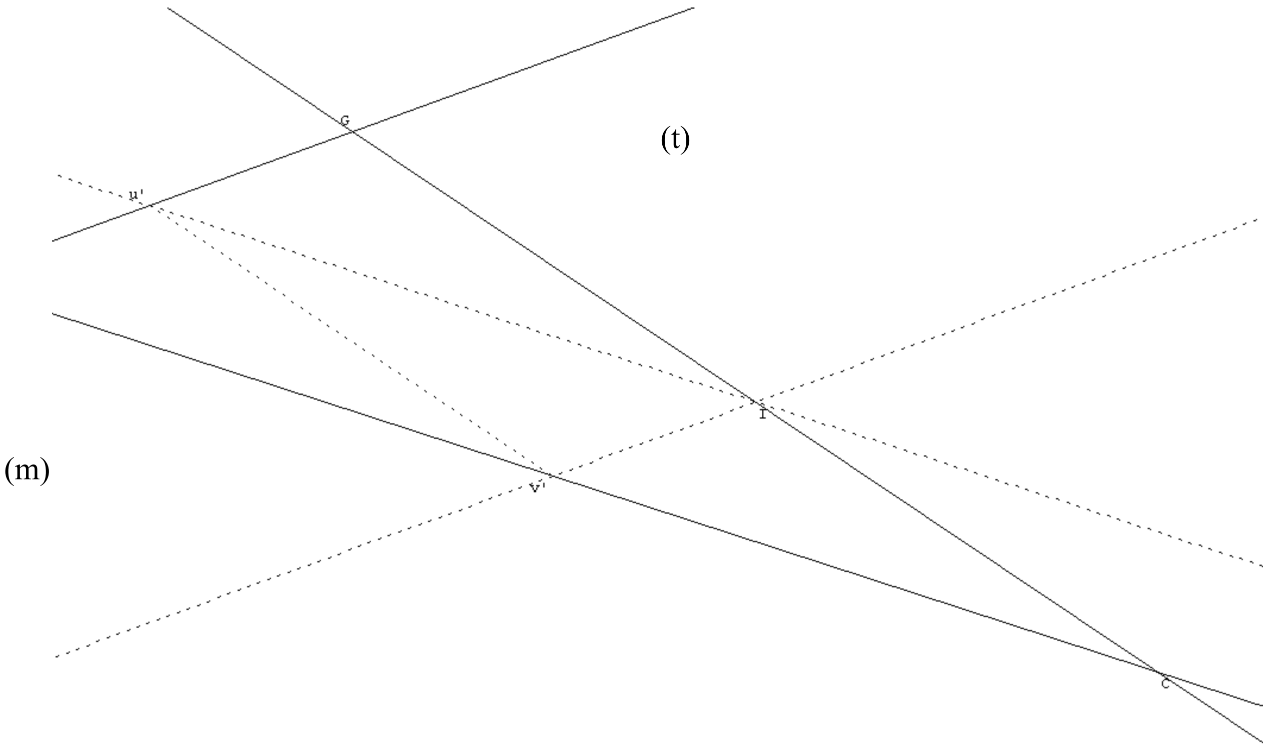
Solution 2

Nommons O le point d'intersection des deux droites et traçons le parallélogramme de diagonale [OI] en traçant les parallèles à d et d' passant par I. L'autre diagonale, alors visible (nommons-la [AB]) permet de placer le centre I' du dit parallélogramme. Les points G et C sont obtenus en traçant la parallèle à (AB) passant par I.
En effet, d'après la propriété des milieux dans le triangle OIG : Le segment [GI] parallèle à (AI') mesure le double du segment [AI']. De même , dans le triangle OIC, IC =2I'B et comme AI'=I'B alors GI=IC.



Solution 3

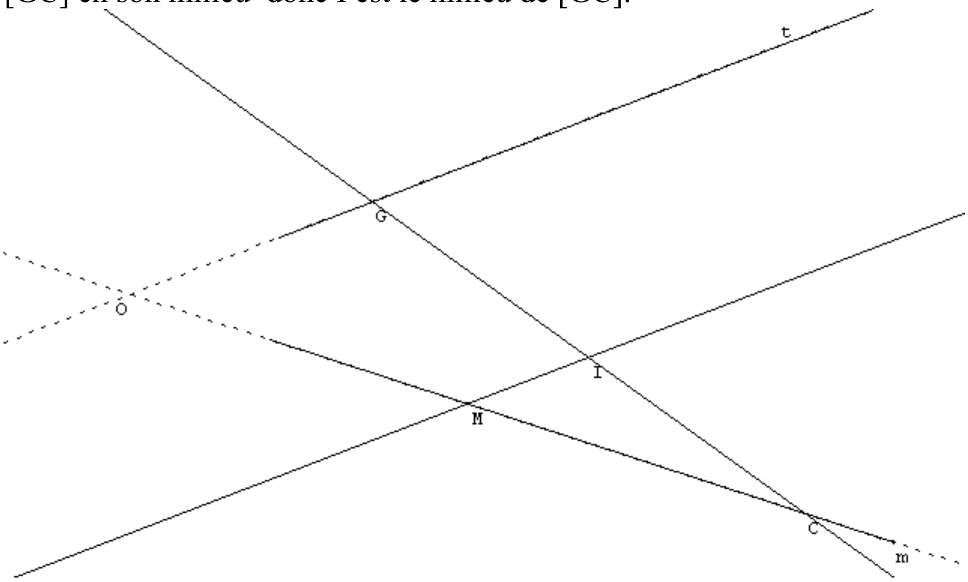
Les parallèles à (m) et (t) passant par I coupent (m) et (t) respectivement en V’ et U’.
La parallèle au segment [U’V’] passant par I coupe (t) en formant un parallélogramme IV’U’G. De même la parallèle au segment [U’V’] passant par I coupent (m) en formant un parallélogramme IU’V’C. Comme les côtés opposés d’un parallélogramme sont parallèles et de même longueur, on a bien $\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{IC}$ et I est ainsi le milieu de [GC].



Solution 4

Les droites (t) et (m) se coupent en O. La parallèle à (t) passant par I coupe la droite (m) en M. On considère C le symétrique de O par rapport à M et G le point d’intersection des droites (CI) et (t).

Dans le triangle OGC, la parallèle à (OG) passant par le milieu M de [OC] coupe le segment [GC] en son milieu donc I est le milieu de [GC].



Exercice 6 : Pyramide des âges

Le volume V (exprimé en cm^3) d'une pyramide est obtenu par la formule $V = \frac{1}{3} \times B \times h$ où B désigne l'aire (en cm^2) de la base et h la hauteur (en cm) de cette pyramide.
Le volume est égal à 24 cm^3 si et seulement si $B \times h = 72$.
On peut alors envisager une pyramide dont la base est un carré de côté 6 cm et de hauteur 2 cm : la pyramide peut être régulière (figure 3) ou sa hauteur peut être confondue avec une arête latérale (figure 1). Pour la pyramide régulière, un calcul est nécessaire : la longueur d'une arête latérale est égale à $\sqrt{22}$ cm, obtenue par le théorème de Pythagore dans un triangle rectangle au centre du carré de base.
On peut aussi choisir une pyramide dont la base est un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent respectivement 8cm et 6 cm, et dont la hauteur mesure 3cm (figure 2).
Une pyramide ayant pour base un rectangle de longueur 6 cm et de largeur 3 cm, et dont la hauteur mesure 4 cm nous fournit une quatrième solution: on fait le choix de faire passer la hauteur par le milieu I du côté [BC] du rectangle (figure 4).
A la page suivante, on propose (à l'échelle 0,5) des patrons de ces pyramides, solutions particulières du problème posé.

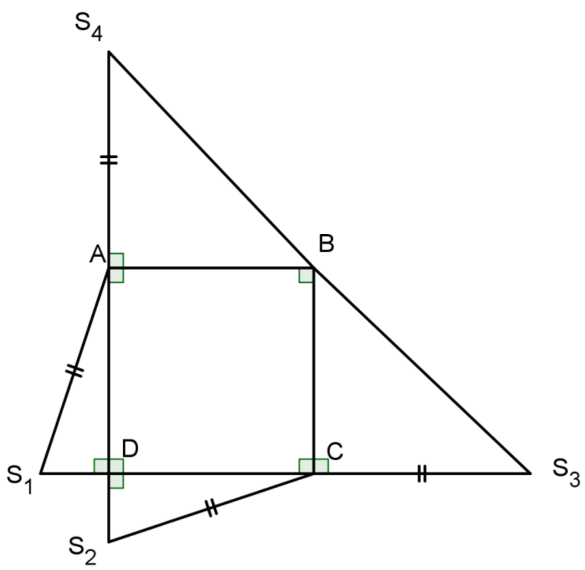


Figure 1

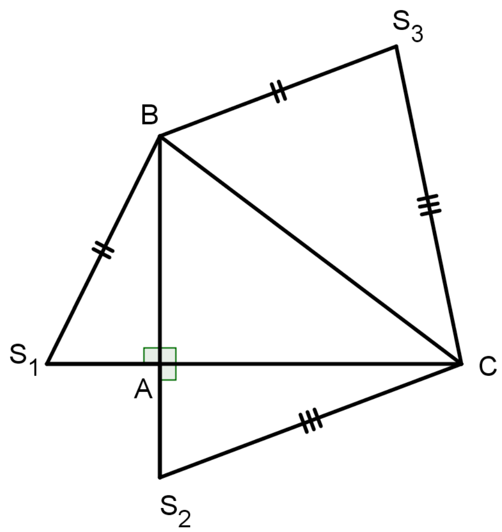


Figure 2

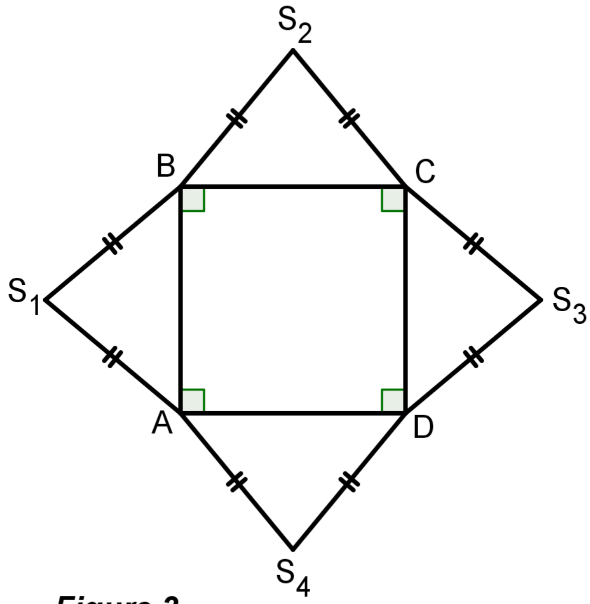


Figure 3

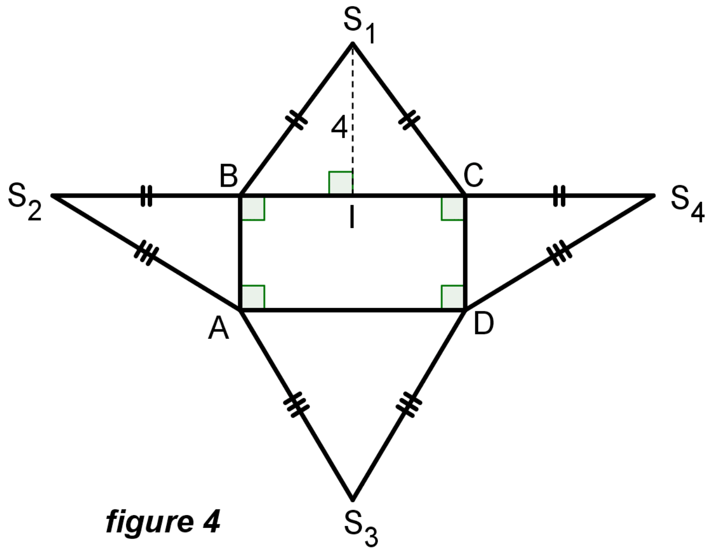


figure 4

Exercice 7 : Carrés décalés

En observant la spirale, l'élève remarque que 1, 5, 9 et 13 ont pour reste 1 dans la division euclidienne par 4 et que M_5, M_9 et M_{13} sont sur la demi-droite $[M_1 M_5)$.
Or $2009 = 502\times4+1$ donc le reste de la division de 2009 par 4 est 1 et le point M_{2009} est sur la demi-droite $[M_1 M_5)$.

Pour déterminer les coordonnées de M_{2009} dans le repère orthonormé tel que $M_0(0,0)$, $M_1(1,0)$ et $M_2(1,1)$, l'élève peut remarquer que les coordonnées (x_n, y_n) des points M_n pour $n\in\{1;5;9;13\}$ s'expriment en fonction du quotient q de n par 4 par $x_n = q+1$ et $y_n = -q$

M_1	M_5	M_9	M_{13}
$1=0\times4+1$	$5=1\times4+1$	$9=2\times4+1$	$13=3\times4+1$
$x_1=1$	$x_5=2$	$x_9=3$	$x_{13}=4$
$y_1=0$	$y_5=-1$	$y_9=-2$	$y_{13}=-3$

Sachant que $2009 = 502\times4+1$, il pourra alors écrire que $x_{2009}=503$ et $y_{2009}=-502$

Il peut aussi dénombrer le nombre de points à partir de M_1 jusqu'à M_{2009}, ce qui revient à compter le nombre de diagonales du carré unité du quadrillage, comme dans « fol écureuil ».
En effet, l'élève remarque que $5=1\times4+1$ $9=2\times4+1$ $13=3\times4+1$ et que M_5, M_9 et M_{13} sont respectivement à 1, 2 et 3 diagonales du point M_1.
Or $2009 = 502\times4+1$ donc le reste de la division de 2009 par 4 est 1 et le point M_{2009} est à 502 diagonales de M_1 donc $x_{2009}=502+x_1=503$ et $y_{2009}=-502+y_1=-502$

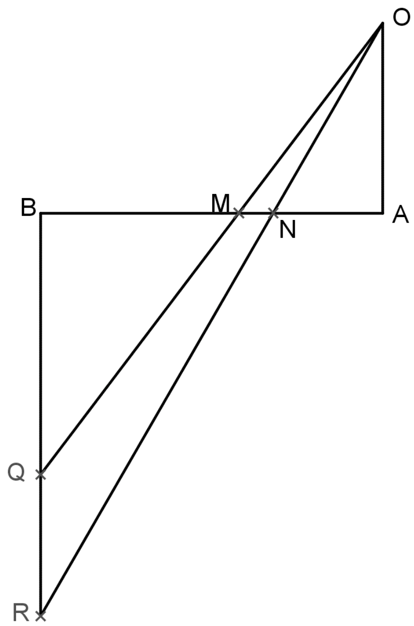
Exercice 8 : Consommation d'eau

Toutes les longueurs sont exprimées en mètres.
Les points A, M, N et B sont alignés, donc les cinq points O, A, M, N et B sont situés dans un même plan.
Ce plan contient la droite D verticale issue de B car cette droite est parallèle à (OA).
On construit alors D et on appelle Q et R ses points d'intersection avec respectivement (OM) et (ON).

La droite D étant parallèle à (OA), on peut appliquer à deux reprises le théorème de Thalès :

Dans les triangles MOA et MQB, on obtient :
$\frac{MA}{MB} = \frac{MO}{MQ} = \frac{OA}{BQ}$

On en déduit que $\frac{0,8}{1,2} = \frac{1}{BQ}$, puis que BQ=1,5



Dans les triangles NOA et NRB, on obtient
$\frac{NA}{NB} = \frac{NO}{NR} = \frac{OA}{BR}$
On en déduit que $\frac{0,4}{1,6} = \frac{1}{BR}$, puis que BR=4

Les points B, Q et R sont alignés dans cet ordre sur la droite D ; donc QR = BR – BQ, QR = 2,5
Il apparaît alors que le niveau d'eau a baissé de deux mètres et cinquante centimètres pendant l'été. Or la face ABCD est un carré de côté deux mètres.
Le volume d'eau consommé (en l'absence d'évaporation et de fuites) est alors le volume d'un pavé droit, d'où V = $2 \times 2 \times 2{,}5 = 10$.
Conclusion : Durant le mois de juillet, la famille de Pierre et Ondine a consommé 10 m^3 d'eau du puits.

Exercice 9 : L'ouvre porte

Utilisons tout d'abord la 3$^{\text{ème}}$ donnée de l'énoncé : le nombre r sera 2 ou 3 ou 5 ou 7.
- Si r = 2, alors le nombre q ne peut être que 11
- Si r = 3, alors q peut être égal à 12 ou 21, mais ces deux nombres ne sont pas premiers,
- Si r = 5, alors q peut être égal à 23 ou 32, et l'on élimine 32 qui n'est pas premier,
- Si r = 7, alors q peut être égal à 16, 25, 34, 43, 52, ou 61. Nous éliminons 16, 25, 34 et 52 qui ne sont pas premiers.

Les quatre possibilités pour le nombre q sont donc 11, 23, 43 et 61.
- Si q = 11, alors p peut être égal à 128, 137, 146, 236, 245, les autres possibilités étant éliminées car les trois chiffres de p doivent être différents et dans l'ordre croissant. Parmi ces cinq nombres, seul **137** est un nombre premier.
- Si q = 23, alors p ne peut être que 689, mais 689 est le produit de 13 par 53 et ne convient donc pas.
- Si q = 43 ou 61, ce n'est tout simplement pas possible car la somme des chiffres de p est plus petite que 27.

Le seul code possible est 137.