

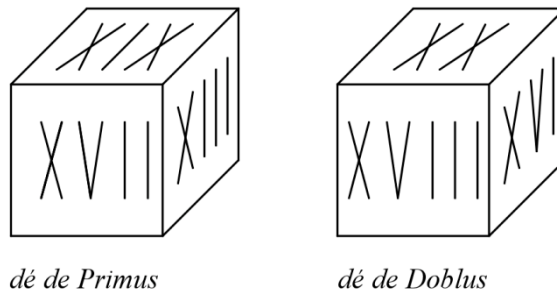
Un problème posé au RMFC (finale 2009)

Dé premier et dé double

Primus et Doblus sont deux citoyens romains qui passent le plus clair de leur temps à jouer.

Tous deux ont inventé un dé cubique à six faces numérotées de façon inhabituelle :

celui de Primus a pour numéros les nombres premiers consécutifs à partir de 13, alors que celui de Doblus a pour numéros les nombres pairs consécutifs à partir de 16.



Chacun d'eux est persuadé que son dé est plus fort que celui de l'autre.

Une partie acharnée s'engage : à chaque lancer, celui qui fait le score le plus faible doit donner un sesterce à son adversaire.

Déterminez si l'un des joueurs a une chance de s'enrichir supérieure à l'autre.

Analyse :

1 – Interpréter la question en : « comparer les probabilités de chacun de gagner »
2 – Décrire l'expérience aléatoire : « les deux joueurs lancent leur dé ensemble et notent les faces apparentes une fois immobilisés ». Remarquer que les dés sont parfaitement discernables, le dé de Primus ne contient que des nombres impairs, celui de Doblus des nombres pairs.

3 – Donner la liste des issues possibles, sont-elles équiprobables ?

Les numéros du dé de Primus sont 13, 17, 19, 23, 29 et 31.

Ceux du dé de Doblus sont 16, 18, 20, 22, 24 et 26.

La liste des issues possible est donc la liste des 36 couples formés par les faces du dé de Primus et les faces du dé de Doblus.

Ces couples sont équiprobables si les dés sont parfaits (modèle pseudo concret).

Chaque face du dé de Primus a une probabilité de $1/6$ et pour chacune d'elle, on peut associer chaque face du dé de Doblus de probabilité $1/6$. Chaque couple a donc une probabilité $1/36$ d'apparaître (principe de raison insuffisante) ou d'après le principe de multiplication des probabilités d'événements indépendants (4^{ème} principe de Laplace).

On peut aussi s'en convaincre par un schéma en arbre.

4 - On s'aperçoit que Primus a ses trois plus petits numéros inférieurs aux trois plus petits numéros de Doblus, mais ses trois plus grands numéros sont supérieurs aux trois plus grands numéros de Doblus. Cette constatation ne permet donc pas de conclure.

Il est donc nécessaire d'envisager les 36 situations possibles et de compter celles qui font gagner Primus et celles qui font gagner Doblus.

dé de Primus → dé de Doblus ↓	13	17	19	23	29	31
16	D	P	P	P	P	P
18	D	D	P	P	P	P
20	D	D	D	P	P	P
22	D	D	D	P	P	P
24	D	D	D	D	P	P
26	D	D	D	D	P	P

Nombre de victoires possibles de Primus : 19, nombre de victoires de Doblus : 17.

Si l'on applique la définition découlant du premier principe de Laplace : *dans une situation aléatoire où les issues possibles sont équiprobables, alors la probabilité d'un événement est le rapport du nombre de toutes les issues qui le réalisent à celui de toutes les issues possibles*,

La probabilité que Primus gagne est $\frac{19}{36}$ et celle que Doblus gagne est $\frac{17}{36}$,

Primus a plus de chances de s'enrichir que Doblus.

On peut réaliser ce jeu ou le simuler sur un ordinateur. Sur un grand nombre de parties, Primus gagnera avec une fréquence proche de $\frac{19}{36} = 0,528$, alors que Doblus gagnera avec une fréquence proche de $\frac{17}{36} = 0,472$, ce qui confirmera la réponse précédente, à condition que les fréquences observées déterminent des intervalles de confiance disjoints.

Conclusion alors intuitive : Primus a plus de chance de s'enrichir.

Selon la formule donnée en thème d'étude en seconde (voire en troisième en 2009), avec le vocabulaire du programme de 2009, Dans cette simulation pour n parties, l'intervalle de fluctuation contenant 95% des fréquences des gains de Primus observables a pour demi longueur environ $\frac{1}{\sqrt{n}}$, c'est celle de l'intervalle de confiance au niveau 95% pour estimer la probabilité que Primus gagne par la fréquence de ses gains observée.

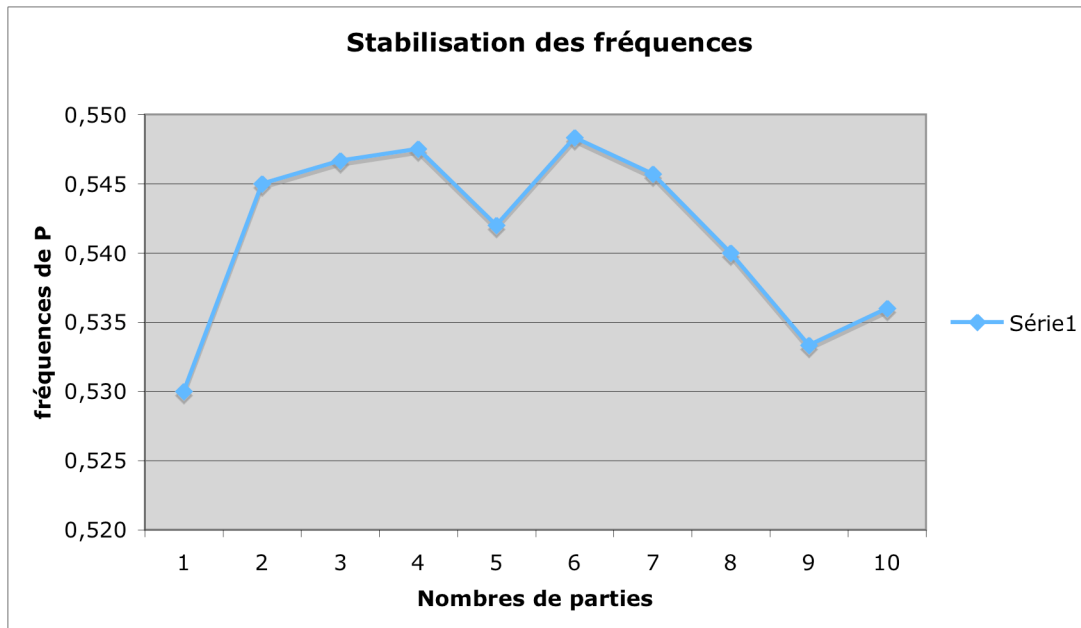
L'écart entre les probabilités des gains de Primus et Doblus est $0,528 - 0,472 = 0,056$, soit 5,6%. La conclusion « intuitive » pourra être confirmée avec une probabilité de se tromper inférieure à 5%, si $\frac{1}{\sqrt{n}} < 0,056/2 = 0,028$, ce qui donne $n > 1275$.

Avec 1000 parties (simulation faite sur Excel), on n'atteint pas une estimation au niveau de confiance 95%, car $\frac{1}{\sqrt{n}} = 3,17\%$. La fourchette de fluctuations contenant 95% des fréquences a un écart de près de 6,4%.

Notons qu'un calcul précis de l'intervalle de confiance de niveau 95% utilisant

l'approximation gaussienne de la loi binomiale donne le demi-écart $1,96 \times \sqrt{\frac{f_n(1-f_n)}{n}} = 3,09$

Gains de Primus par centaines de parties



Intervalle de fluctuations pour Primus : $]0,504 ; 0,568[$.

Intervalle de fluctuations pour Doblus : $]0,464 ; 0,528[$, pas de conclusion

Autre simulation, intervalle de fluctuations pour Primus : $]0,506 ; 0,569[$,

Intervalle de fluctuations pour Doblus : $]0,430 ; 493[$. Avec une probabilité de 0,05 de se tromper, on peut dire que Primus a plus de chances de gagner que Doblus.

