RALLYE MATHÉMATIQUE DE FRANCHE-COMTÉ
Éléments de solution de l'épreuve de qualification de 2010

Les classes de Troisième doivent résoudre les problèmes 1 à 6.
Les classes de Seconde doivent résoudre les problèmes 4 à 9.
La classe doit rendre une seule réponse par problème traité **en expliquant la démarche**.

Dans ces éléments de solution, nous proposons, pour chaque problème, au moins une réponse dont la démarche est accessible aux élèves.

1 Histoire de famille

1.1 Le sujet

Dans une famille mélanésienne, Alido et Blido sont frère et sœur.
Alido a deux fois plus de sœurs que de frères. Blido a une sœur de plus que de frères.

Combien y a-t-il d'enfants dans cette famille ? Alido est-il un garçon ?

1.2 Éléments de solution

1.2.1 Méthode 1 : Utilisation de deux inconnues

Soit g le nombre de garçons dans la famille et f le nombre de filles, avec g et f supérieurs à 1.

1$^{\text{re}}$ **hypothèse :** Alido est une fille, Alido a donc $f-1$ sœurs.
Alido a deux fois plus de sœurs que de frères, se traduit par $2g = f - 1$.
Blido est donc un garçon, il a f sœurs et $g-1$ frères.
Blido a une sœur de plus que de frères, se traduit par $f = g - 1 + 1$.

D'où le système $2g = f - 1$ et $f = g$, ce qui donne $f = -1$ et $g = -1$. C'est impossible.

2$^{\text{e}}$ hypothèse : Alido est un garçon.
Il a f sœurs et $g-1$ frères, la première condition se traduit par $f = 2(g-1)$.

Blido est une fille, elle a $f-1$ sœurs et g frères. La condition se traduit par $f - 1 = g + 1$. D'où le système : $f = 2g - 2$ et $f - 1 = g + 1$.

Il a pour solution $g = 4$ et $f = 6$, valeurs en accord avec les conditions posées.

Conclusion : La famille est composée de six filles et de quatre garçons.

1.2.2 Méthode 2 : Utilisation d'une seule inconnue

On peut raisonner avec une seule inconnue, méthode plus adaptée au programme.

Soit g le nombre de garçons.
Si Alido est un garçon, il a $g-1$ frères, $2g-2$ sœurs, la famille est composée de $2g-2$ filles et de g garçons.
Blido est une fille, elle a g frères et $g+1$ sœurs.
La famille est composée de $g+2$ filles et de g garçons.

Ce qui nous donne l'équation : $2g-2=g+2$, d'où $g=4$.

Si Alido est une fille, elle a g frères et $2g$ sœurs. Blido est un garçon, il a donc $g-1+1$ sœurs.
Ce qui donne $2g=g-1+1$ d'où $g=0$ ce qui ne convient pas.

Conclusion : La famille est composée de six filles et de quatre garçons.

1.2.3 Méthode 3 : Tableau et balayage

On considère l'hypothèse 1 (H1) vérifiée.
On valide la solution si l'hypothèse 2 (H2) l'est.

Cas 1 : Alido est une fille.

Nombre de frères d'Alido	Nombre de sœurs d'Alido (avec H1)	Nombre de garçons dans la famille	Nombre de filles dans la famille	Nombre de frères de Blido	Nombre de sœurs de Blido	H2
1	2	1	3	0	3	Non
2	4	2	5	1	5	Non

On n'insiste pas car Blido aura toujours plus de sœurs que de frères avec un écart qui augmente.

Cas 2 : Alido est un garçon.

Nombre de frères d'Alido	Nombre de sœurs d'Alido (avec H1)	Nombre de garçons dans la famille	Nombre de filles dans la famille	Nombre de frères de Blido	Nombre de sœurs de Blido	H2
1	2	2	2	2	1	Non
2	4	3	4	3	3	Non
3	6	4	6	4	5	**Oui**

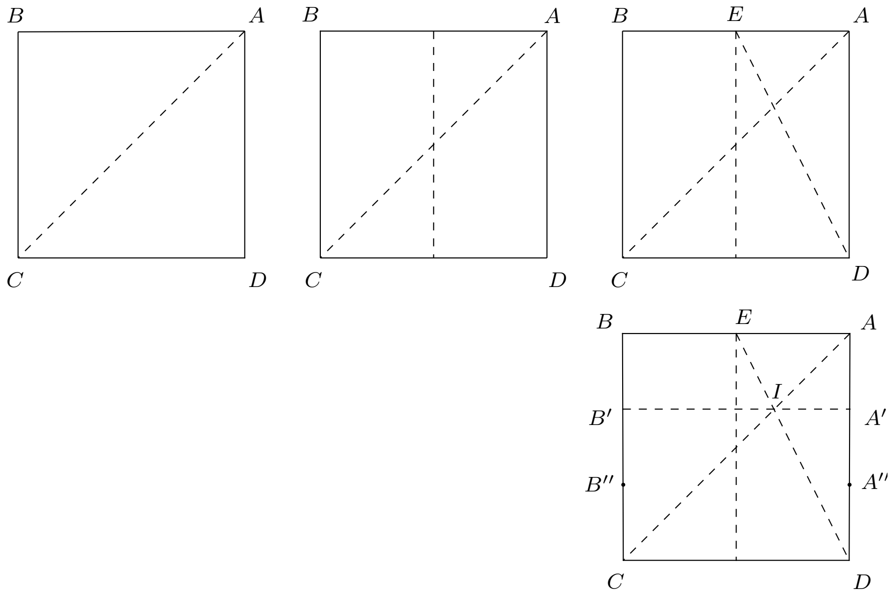
2 Origami

2.1 Le sujet

On dispose d'une feuille de papier carrée de 14 cm de côté. Par pliages successifs et donc sans l'usage d'aucun instrument, on souhaite déterminer un point situé au tiers d'un des côtés du carré.
Dans l'art traditionnel japonais, quatre pliages suffisent pour déterminer un tel point.

2.2 Éléments de solution

2.2.1 1re méthode : En utilisant les trois pliages proposés



a. Premier pliage : On obtient la diagonale $[AC]$ du carré.

b. Deuxième pliage : On obtient la médiatrice de $[AB]$ qui coupe la diagonale $[AC]$ en son milieu.

c. Troisième pliage : Le pliage selon $[DE]$ permet d'obtenir le point I, intersection de $[DE]$ et de $[AC]$.

d. Quatrième pliage : On $AE = \frac{a}{2}$ et $DC = a$

Dans la configuration des triangles AEI et CID, on reconnaît une situation de Thalès ; on peut alors écrire :

$$IC = 2 \times IA \qquad \text{ou encore} \qquad AI = \frac{1}{3}AC$$

.

On plie A en A" sur $[AD]$ et B en B" sur $[BC]$ tel que le point I soit sur le pli $(A'B')$.

La droite $(A'B')$ est parallèle à la droite (BC) et puisque $AI = \frac{1}{3}AC$, on a alors $AA' = \frac{1}{3}AD$

Conclusion : le point A' est au tiers sur $[AD]$ à partir de A.

2.2.2 2e méthode : En utilisant d'autres pliages que ceux proposés

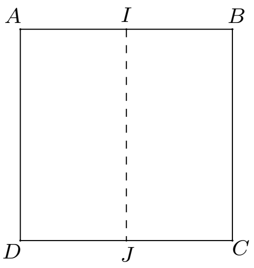


figure 1

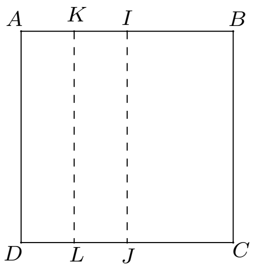


figure 2

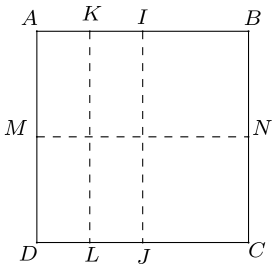


figure 3

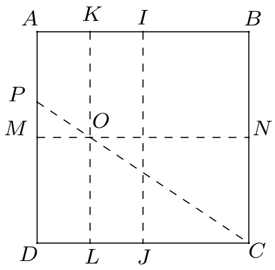


figure 4

Un pliage illustre la symétrie orthogonale dans le plan.

Soit $ABCD$, un carré de côté a.
Le rabat de $[AD]$ sur $[BC]$ permet d'obtenir $[IJ]$, médiatrice de $[AB]$; (figure 1).
Le rabat de $[AD]$ sur $[IJ]$ permet d'obtenir $[KL]$, médiatrice de $[AI]$; (figure 2).
Le rabat de $[AB]$ sur $[DC]$ permet d'obtenir $[MN]$, médiatrice de $[AD]$; (figure 3).

$[KL]$ et $[MN]$ se coupent en O. Le pliage selon $[OC]$ donne le point P, intersection de (OC) et de $[AD]$; (figure 4).

La droite (PM) est parallèle à (NC) donc $\frac{PM}{CN} = \frac{OM}{ON}$.
Or $\frac{OM}{ON} = \frac{1}{3}$, on en déduit que $PM = \frac{a}{6}$.

D'autre part, $AP = AM - PM$ d'où $AP = \frac{1}{3}a$ ou encore $PM = \frac{1}{3}AM$ puis $AP = \frac{1}{3}AD$

Conclusion : Le point P est au tiers d'un des côtés du carré.

2.2.3 3eméthode : Centre de gravité

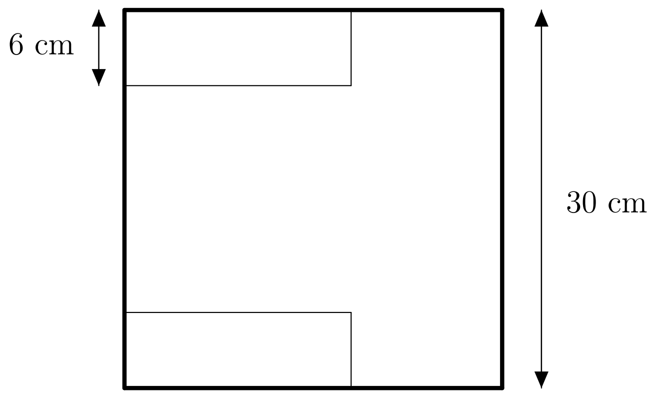
En utilisant les figures de 2.2.1, il est également possible d'utiliser le fait que le point I est l'intersection de deux médianes du triangle ABD ; il est alors situé au tiers de la médiane à partir de la base du triangle.
Il est facile de conclure.

3 Construction d'un boîte

3.1 L'énoncé

Tom dispose d'une plaque carrée de carton à maquette de côté 30 cm.
En découpant sur deux côtés opposés deux bandes rectangulaires de 6 cm de largeur comme l'indique la figure ci-contre, il peut alors, par pliage, obtenir une boite ayant la forme d'un pavé droit.

Réalisez un dessin à l'échelle 1/2 de la plaque découpée, en y indiquant les lignes de pliage.

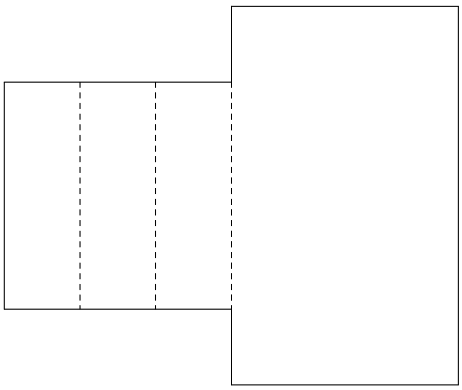


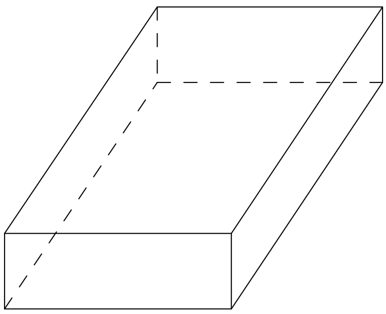
Attention, ce schéma n'est pas à l'échelle !

3.2 Éléments de solution

3.2.1 Avec les données de l'énoncé

Les données de l'énoncé nous permettent de faire un schéma du carré duquel on a découpé deux rectangles de largeur 6 cm. Un schéma du pavé est tracé.





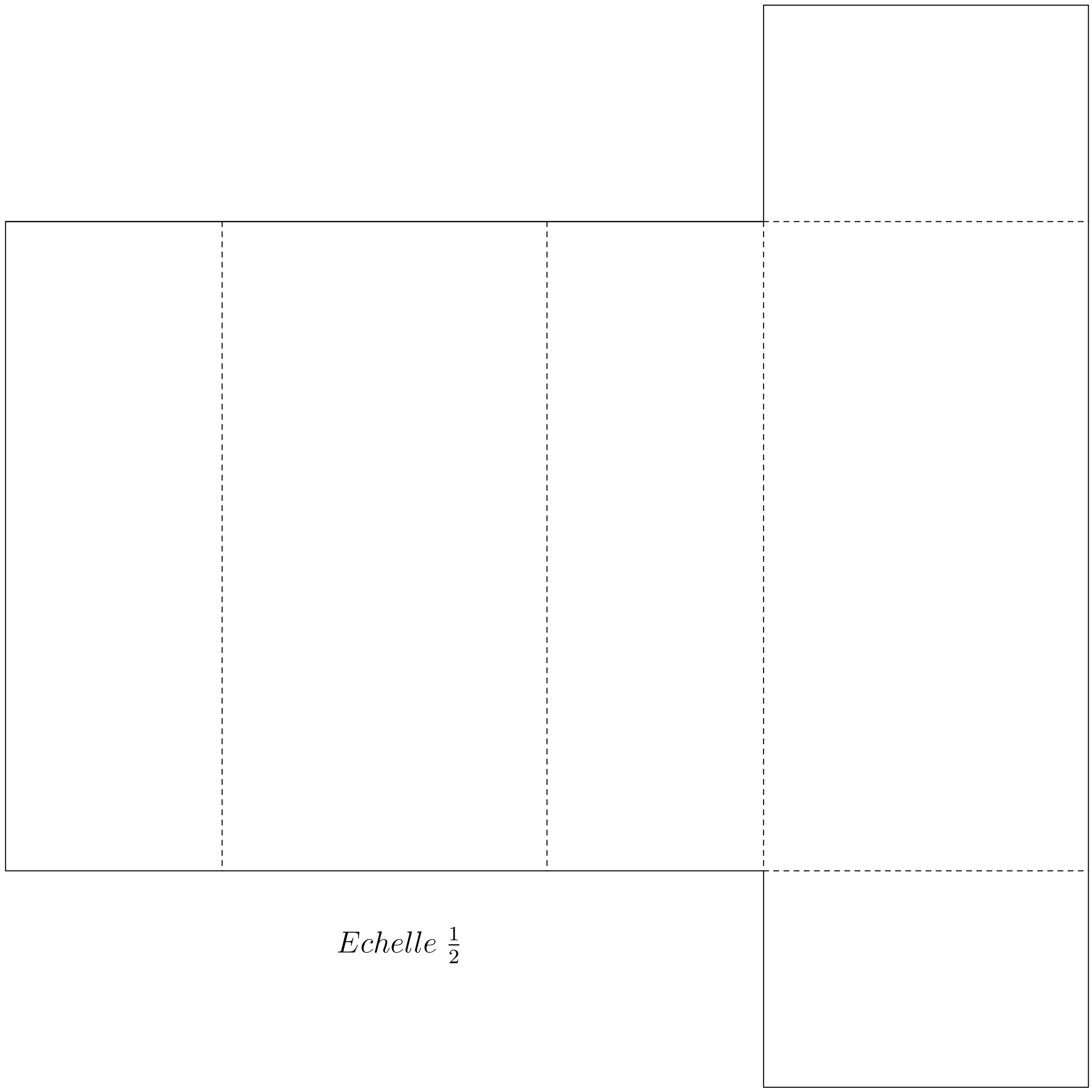
Le petit rectangle, ainsi obtenu, doit servir à faire le côté gauche, le couvercle et le côté droit du pavé.

La hauteur du pavé est de 6 cm, sa longueur est égale à 18 cm car $(30 - 2 \times 6)$ cm $= 18$ cm.

Si on appelle a la largeur de la boîte, on doit avoir : $6 + a + 6 + a = 30$ d'où $a = 9$.

Les dimensions du pavé sont donc : L$=$ 18 cm, l$=$ 9 cm et h $=$ 6 cm.

Tracé du patron de la boîte à l'échelle $\dfrac{1}{2}$.



Echelle $\frac{1}{2}$

Remarque : le volume de la boîte est de 972 cm^3.
Si on remplace 6 par un autre nombre, peut-on obtenir une boîte de plus grand volume ?

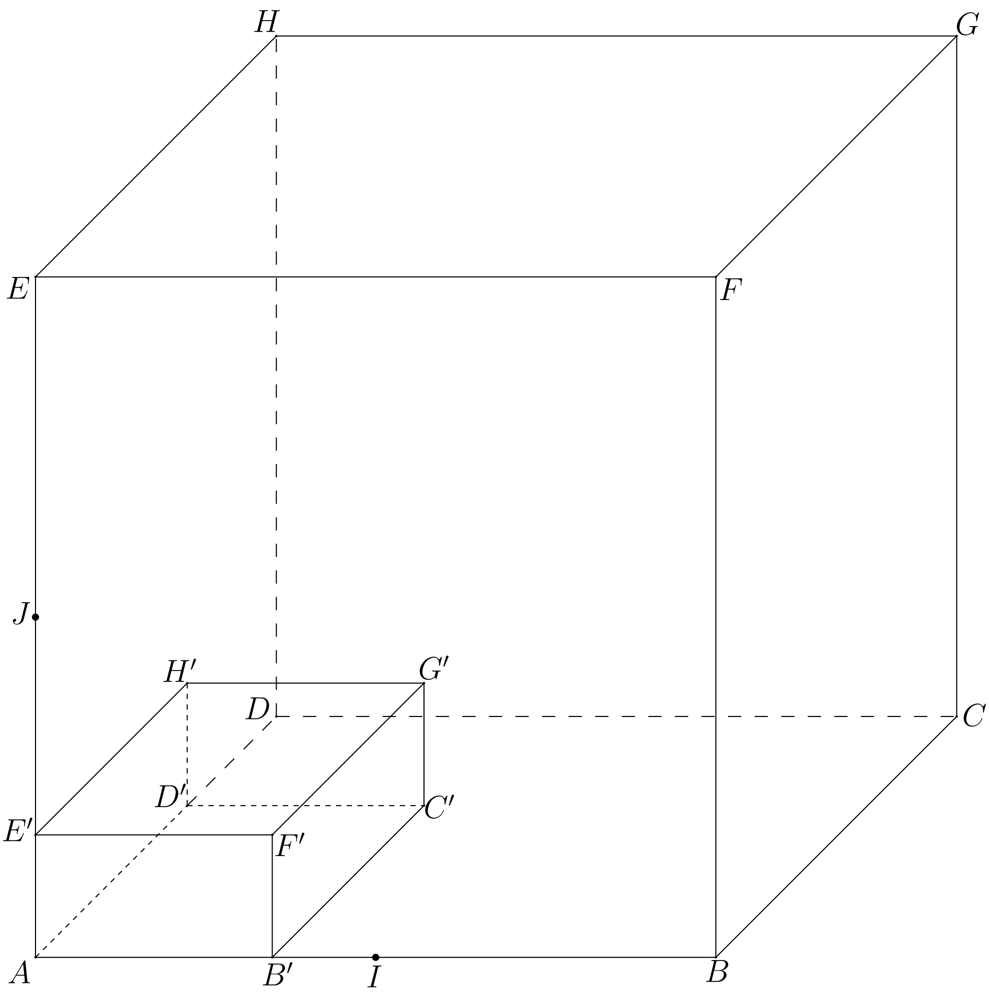
3.2.2 Prolongement

a. **Passer à un autre découpage. Choix d'une inconnue.**
On peut remplacer 6 par un nombre h, avec h compris strictement entre 0 et 15, puis calculer les dimensions de la boîte.
L'équation est alors $2h+2l = 30$ où l désigne la largeur de la boîte, soit $l = 15-h$ et $L = 30-2h$.

b. **Calculer un volume. Fonction associée.**
Soit v volume de la boîte, on a : $v = (15-h) \times (30-2h) \times h$.
Un tableur nous permet de proposer une valeur de h donnant un volume maximum. Le tableur nous suggère le réel 5.
Le tracé d'un graphique permet de dire que 5 est la valeur qui donnerait à la boîte le volume maximum de 1000 cm^3.

L'étude algébrique du signe de $v - 1000$ en fonction de h, nous permet de confirmer cette hypothèse.
En effet : $v - 1000 = (15-h) \times (30-2h) \times h - 1000$.
Cette expression qui peut encore s'écrire $v - 1000 = 2 \times (h-5)^2 \times (h-20)$ est positive lorsque h est compris entre 0 et 5.
Le maximum de v est obtenu pour une hauteur de 5. En étudiant les variations de la fonction f définie par $f(h) = 2 \times (h-5)^2 \times (h-20)$ sur l'intervalle $[0\,;\,15]$, nous obtenons que f est strictement croissante sur $[0\,;\,5]$ et strictement décroissante sur $[5\,;\,15]$ et $f(5) = 1000$.

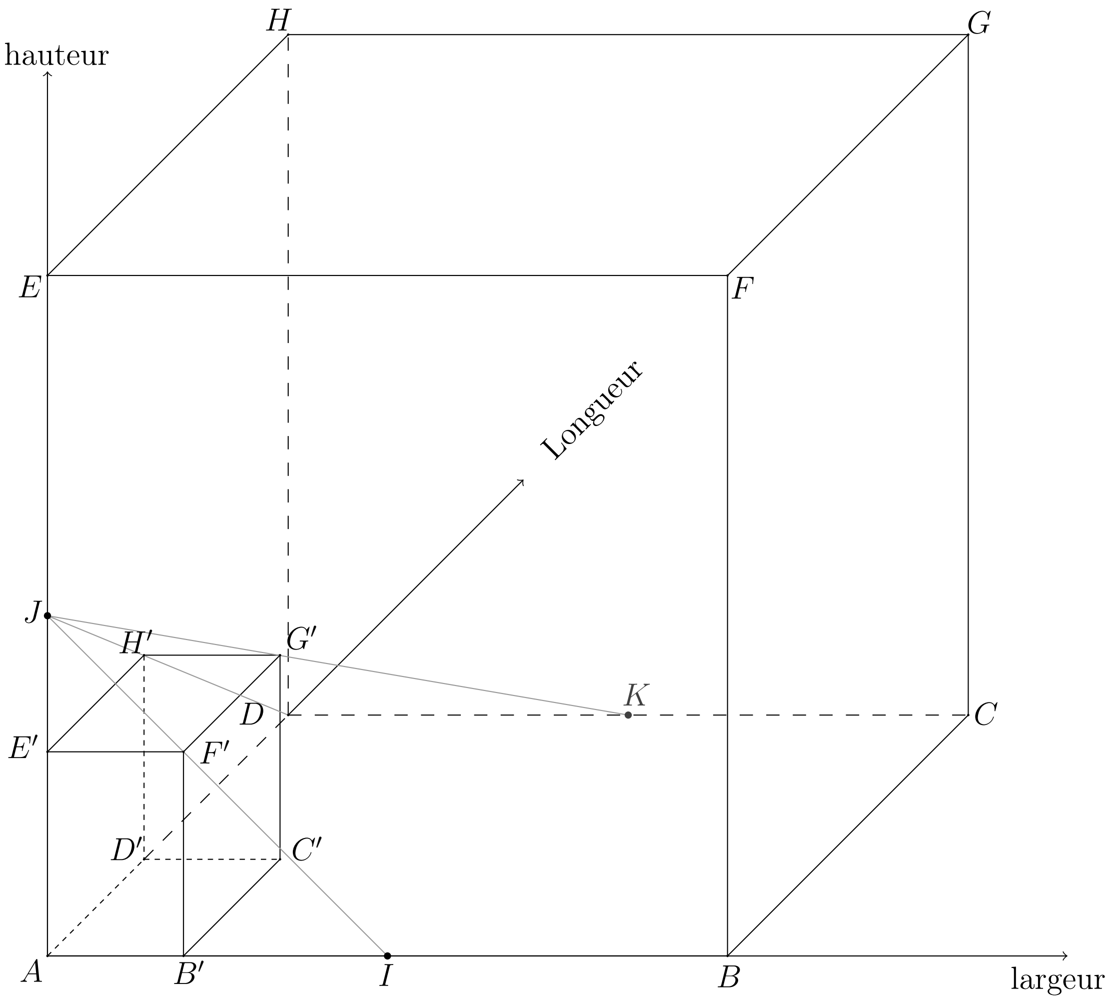
c. **Représentation en perspective cavalière d'une boîte à partir de celle du cube de côté 30.**



d. **Repérage dans le cube.**

En posant $A(0,0,0)$, $E(30,0,0)$, $B(0,30,0)$ et $D(0,0,30)$. Les grandeurs utilisées sont h la hauteur de la boîte, l sa largeur avec , L sa longueur avec $L = 30 - h$.
Soit A, B', C', D', E', F', G' et H' les sommets du pavé considéré.
On a : $A(0,0,0)$, $B'(0,15-h,0)$, $C'(0,15-h,30-2h)$, $D'(0,0,30-2h)$, $E'(h,0,0)$, $F'(h,15-h,0)$, $G'(h,15-h,0-2h)$, $H'(h,0,30-2h)$.
Soit I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[AE]$, K le milieu de $[DC]$.
Le point H' se trouve sur le segment $[JD]$, F' se trouve sur le segment $[IJ]$ et G' appartient au segment $[JK]$.

Ainsi la construction du pavé est parfaitement déterminée lorsque l'on se donne un point G' sur $[JK]$. Le pavé de volume maximum est obtenu si l'on place G' sur $[JK]$ et au tiers de celui-ci à partir de K.



4 Mosaïques

4.1 Le sujet

Quadrius et Trius s'amusent à construire des mosaïques carrées et triangulaires.
Quadrius forme une mosaïque carrée composée de carrés identiques et, fier de lui, remarque :
« J'ai réalisé un carré avec 23 carrés par côté, donc j'ai utilisé 23^2 carrés soit 529 carrés. »
Trius forme une mosaïque triangulaire composée de triangles équilatéraux identiques et ne voulant pas être en reste, déclare :
« J'ai réalisé un triangle avec 23 triangles par côté donc j'ai utilisé 23^2 triangles soit 529 triangles ! »

Les résultats proposés par Trius et Quadrius sont-ils exacts ? Justifiez votre réponse.

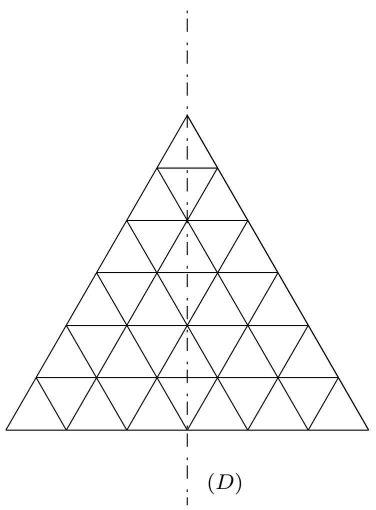
4.2 Éléments de solution

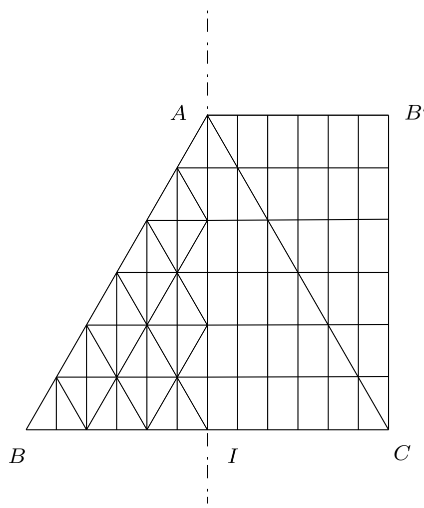
4.2.1 Première méthode géométrique

Le carré de mosaïques, réalisé par Quadrius, a 23 petits carrés sur un côté et 23 petits carrés sur l'autre côté, soit 529 petits carrés.
La mosaïque de Trius est composée de triangles équilatéraux. Chaque côté du triangle équilatéral est composé de 23 petits triangles.
Traçons la médiatrice d'un des côtés ; soit (D) cette droite.
Elle passe par le sommet du grand triangle équilatéral et le milieu du côté opposé.
Cette droite partage la mosaïque en deux triangles rectangles isométriques.
Le triangle de gauche est retourné à la droite du deuxième triangle, pour former un rectangle ; celui-ci est alors composé de petits rectangles, chacun étant constitué de deux demis petits triangles rectangles.
Le nombre de triangles équilatéraux de la mosaïque est égal au nombre de petits rectangles.
Le nombre de petits rectangles en largeur est égal au nombre de triangles équilatéraux de la mosaïque de départ, soit 23.
Le nombre de petits rectangles en « hauteur » est égal au nombre de triangles équilatéraux placés sur le côté droit du triangle de départ, soit 23.

Le nombre total de petits rectangles est de 23×23 soit 529.

Dessins illustrant la méthode utilisée.





Conclusion : Les résultats proposés par Quadrius et Trius sont exacts.
Chaque mosaïque est composée de 23^2 pièces élémentaires.

4.2.2 Deuxième méthode utilisant les aires

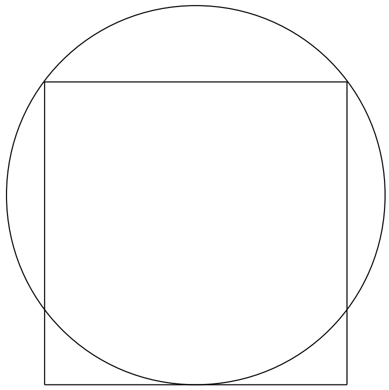
L'aire du triangle équilatéral de côté $23u$ est égale à $23 \times 23\frac{\sqrt{3}}{4}u^2$.
Or, l'aire d'un petit triangle équilatéral est $\frac{\sqrt{3}}{4}u^2$. Il y a donc 23×23 petits triangles équilatéraux dans la mosaïque.

Conclusion : Les résultats proposés par Quadrius et Trius sont exacts.
Chaque mosaïque est composée de 23^2 pièces élémentaires.

5 Logo

5.1 L'énoncé

Le club de basket a décidé d'adopter ce nouveau logo pour la rentrée.
Le cercle passe par le milieu d'un côté du carré et par les deux sommets du côté opposé.



Michael prépare le grand modèle qui ornera l'affiche du club en commençant par tracer un carré de côté 12 cm.

Jordan lui, en dessine un plus petit en traçant d'abord un cercle de rayon 5 cm.

A vous maintenant de montrer comment ces deux sportifs ont réalisé leur logo.

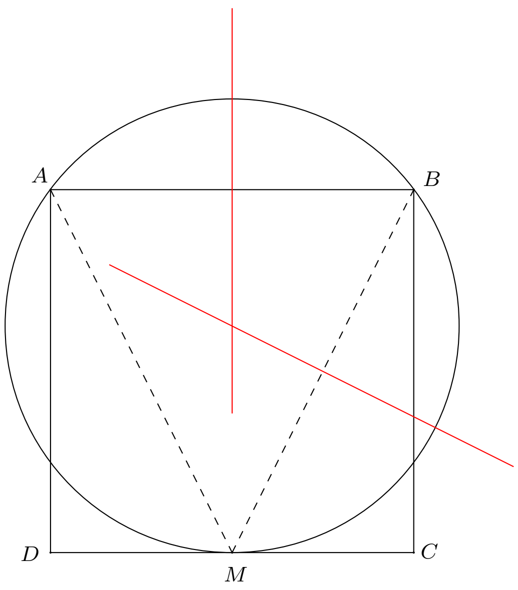
Expliquez les différentes étapes de vos constructions.

5.2 Éléments de solution

Les dessins proposés ne sont pas aux dimensions demandées.

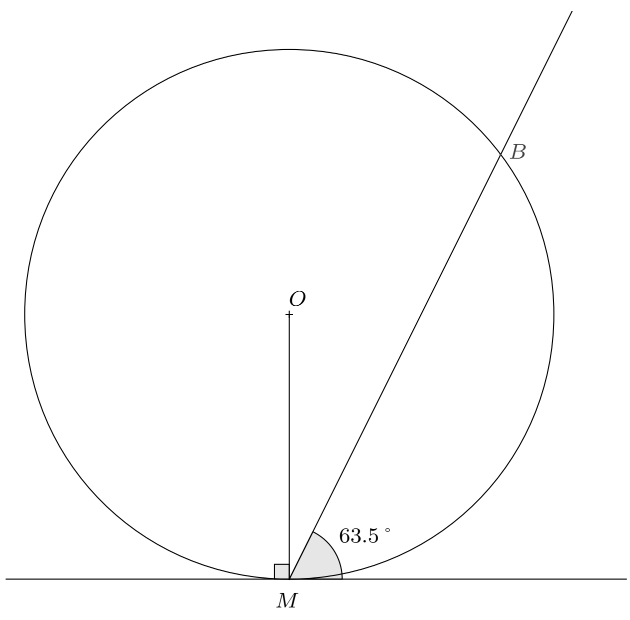
5.2.1 Construction de Michael

Après avoir tracé un carré $ABCD$ de côté 12 cm et placé le milieu M du côté $[CD]$, il faut construire le cercle circonscrit au triangle ABM. La construction de deux médiatrices de ce triangle nous permet d'obtenir le centre du cercle.



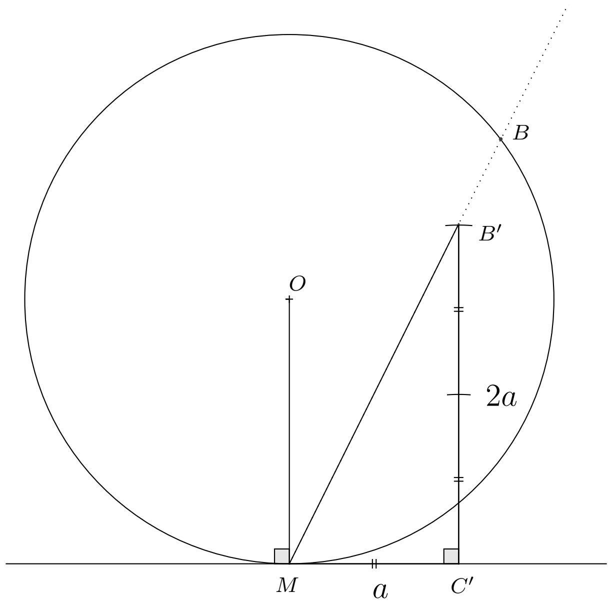
5.2.2 Construction de Jordan : Utilisation du compas, règle, rapporteur et équerre.

a. **1re méthode :** Pour construire l'angle $\widehat{CBM}$, on utilise une valeur approchée de celui-ci.
Le cercle de centre O et de rayon 5 cm étant tracé, placer le point M qui sera le milieu du côté $[DC]$ puis tracer la perpendiculaire à $[OM]$ passant par M.
Les élèves de 3e peuvent ensuite calculer l'angle $\widehat{CBM}$ en utilisant $\tan(\widehat{CBM}) = \frac{CB}{MC} = 2$.
Une valeur approchée de la mesure de cet angle obtenue, le point B peut être placé et la construction du carré s'effectue ensuite à l'équerre.



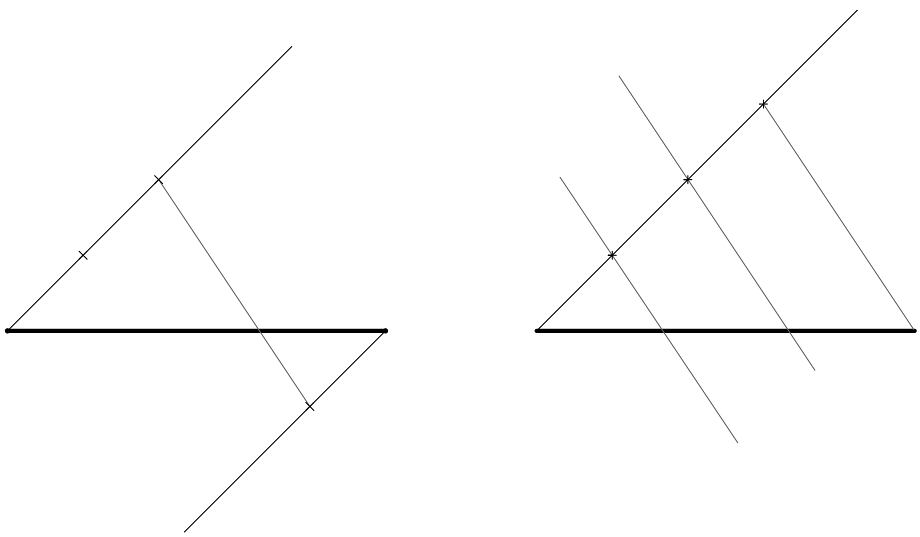
b. **2e méthode :** En construisant l'angle $\widehat{CBM}$ sans rapporteur.

Le cercle de centre O et de rayon 5 cm étant tracé, placer un point M qui sera le milieu du côté $[DC]$ puis tracer la perpendiculaire à $[OM]$ passant par M. Les élèves de 2e peuvent tracer un triangle rectangle $MB'C'$ dont les côtés de l'angle droit sont dans la proportion a et $2a$.
Le point B peut alors être placé et l'on poursuit la construction comme dans la méthode 1.



c. **3e méthode :** Par agrandissement ou réduction.

Si les élèves ont réussi la figure de Michael, ils peuvent calculer le rayon du cercle obtenu et trouvent alors 7,5 cm. Ils peuvent ensuite en déduire que la figure de Jordan est une réduction de celle de Michael avec un coefficient de $\frac{2}{3}$. (agrandissement et réduction s'étudient en 4e)
Le coefficient $\frac{2}{3}$ peut être obtenu à partir de l'une des constructions classiques ci-dessous.



Historiquement et épistémologiquement, le mot construction signifie construction à la règle et au compas. Elle implique une démarche d'analyse, de réalisation instrumentée et validation de celle-ci. Nous présentons une méthode de tracé utilisant le rapporteur, il s'agit d'une « construction » approximative au sens où nous le considérons ci-dessus.

6 Autoroute

6.1 L'énoncé

Lorsqu'un automobiliste emprunte une des autoroutes de la société, une machine lui délivre un ticket qui lui indique la gare d'entrée.
A la gare de sortie, l'automobiliste règle le péage et obtient un reçu comportant le tarif, la gare d'entrée et celle de sortie du réseau.
Ce mois-ci, un nouveau secteur autoroutier est entré en service, de sorte que le nombre de gares a augmenté de 4 et que le nombre de reçus possibles a augmenté de 164.

Déterminez le nouveau nombre total de reçus possibles pour un automobiliste acquittant un péage sur l'autoroute ?

6.2 Éléments de solution

6.2.1 Première méthode :

Soit n le nombre de gares avant l'entrée en service du nouveau secteur autoroutier.

a. Pour chacune de ces n gares choisies comme entrées, il y a $(n-1)$ gares possibles de sorties d'où $n(n-1)$ reçus différents au total avant la mise en service du nouveau secteur. Remarquons qu'avec ce raisonnement chacune des n gares a été choisies comme entrée et aussi comme sortie.
b. Avec le même raisonnement dans le cas où le nouveau secteur est mis en service, c'est à dire lorsqu'il y a $n+4$ gares, on obtient : $(n+4)(n+3)$ reçus différents au total.
c. Le nombre total de nouveaux reçus possibles est donc : $(n+4)(n+3)-n(n-1)$
soit $n^2+7n+12-n^2+n$, c'est à dire : $8n+12$.
d. L'énoncé nous indique que $8n+12$ vaut 164 donc $8n$ vaut 152 et n vaut 19. Le nombre de gares avant l'entrée en service du nouveau secteur est donc 19, le nouveau nombre de gares est donc 23 et, avec le même raisonnement que les précédents, le nouveau nombre total de reçus possibles est $23 \times 22 = 506$.

Conclusion : Le nombre total de reçus possibles est de 506.

6.2.2 Deuxième méthode :

Les nouveaux reçus possibles ne peuvent s'obtenir que :
– soit en entrant par une ancienne gare et sortant à une des 4 nouvelles (cas 1)
– soit en entrant par une des 4 nouvelles (cas 2).
Avec n le nombre de gares avant l'entrée en service du nouveau secteur autoroutier, traduisons les deux cas précédents :

cas 1 : pour chacune de ces n anciennes gares, il y a 4 nouvelles sorties d'où $n \times 4$ nouveaux reçus ;
cas 2 : pour chacune de ces 4 nouvelles gares il y a $(n+3)$ sorties possibles d'où $4 \times (n+3)$ nouveaux reçus.
Raisonnement que l'on peut décomposer en $4 \times n$ nouveau reçus correspondant aux sorties par les anciennes gares et 4×3 nouveaux reçus correspondant aux différentes entrées et sorties possibles entre ces 4 nouvelles gares.

Le nombre total de nouveaux reçus possibles est donc : $4n+4n+12 = 8n+12$. L'énoncé nous indique que $8n+12$ vaut 164 donc $8n$ vaut 152 et n vaut 19.

Le nombre de gares avant l'entrée en service du nouveau secteur est donc 19, le nouveau nombre de gares est donc 23 et, avec le même raisonnement que les précédents, le nouveau nombre total de reçus possibles est 23×22 soit 506.

Conclusion : Le nombre total de reçus possibles est de 506.

6.2.3 Troisième méthode : Raisonnement débouchant sur une formule non connue des élèves.

Soit n le nombre de gares avant l'entrée en service du nouveau secteur autoroutier.

Numérotons ces gares de 1 à n :
Pour la gare 1, il y a $(n-1)$ sorties possibles et $(n-1)$ entrées possibles d'où $2(n-1)$ reçus ;
Pour la gare 2, il y a $(n-2)$ sorties possibles et $(n-2)$ entrées possibles d'où $2(n-2)$ reçus (car la sortie et l'entrée en 1 sont déjà comptées) ;
et ainsi de suite pour les gares 3 à n.

Pour la gare $(n-1)$, il y a 1 sortie possible et 1 entrée possible (celles de la gare n) d'où 2 reçus, et pour la gare n toutes les entrées et sorties sont déjà comptées.

Le nombre total de reçus pour les n gares est donc 2[(n-1) + (n-2) +.....+1] formule que les élèves ne connaissent pas, à moins qu'ils possèdent une calculatrice formelle.
Le résultat s'en déduit aisément.

7 Les friandises

7.1 L'énoncé

Chaque jour, en sortant de l'école, Jules et ses cinq copains passent devant la boulangerie où bonbons et chocolats tentent les six gourmands. En particulier, ils aimeraient bien goûter le contenu de quelques uns des six sachets de diverses friandises dont les prix sont les suivants :

	Sachet n° 1	Sachet n° 2	Sachet n° 3	Sachet n° 4	Sachet n° 5	Sachet n° 6
Nombre de friandises	10	15	20	27	30	32
Prix en euros	2,30	3,40	4,10	6,20	5,10	5,60

Chacun d'eux n'ayant que 2 euros en poche, ils décident de mettre en commun leur fortune pour obtenir des friandises. Plus gourmands qu'économes, ils souhaitent avoir le maximum de friandises en achetant au plus un sachet de chaque sorte et par équité, ils veulent avoir autant de friandises chacun. Mais ils ne savent pas quels sachets choisir ...
Jules propose alors de demander l'aide de son frère aîné et le lendemain, ils entrent dans la boulangerie et choisissent sans hésiter.

Expliquez le conseil que Jules a reçu de son frère ?

7.2 Éléments de solution

7.2.1 Méthode 1

On va procéder régressivement en partant du plus grand nombre de sachets possibles.
D'après la contrainte du prix, 4 sachets ou plus ne conviennent pas car la plus petite de ces sommes obtenue par $1 + 2 + 3 + 5$ vaut 14.90 € qui dépasse 12 €.
D'après la contrainte quantité, pour avoir le plus de friandises possibles on calcule le prix d'une friandise pour chaque sachet, d'où le tableau :

	Sachet n° 1	Sachet n° 2	Sachet n° 3	Sachet n° 4	Sachet n° 5	Sachet n° 6
Nombre de friandises	10	15	20	27	30	32
Prix en euros	2,30	3,40	4,10	6,20	5,10	5,60
Prix par friandise en euros	0,230	0,227	0,205	0,229	0,170	0,175

Il y a intérêt à choisir les sachets 5 et 6 en priorité pour avoir le maximum de friandises pour un coût minimum.
Déterminons les groupes de 3 sachets éventuellement solutions comportant le sachet 5.

Soit n un numéro de sachet pouvant prendre les valeurs entières de 1 à 6 compris. En prenant les sachets $5, 6, n$, la somme est supérieure à 12 € ; cela ne convient pas.
En prenant les sachets $5, 4$ et n, la somme est supérieure à 12 € ; cela ne convient pas.
En prenant les sachets $5, 3, 2$, la somme est $12, 60$ € ; cela ne convient pas.
En prenant les sachets $5, 3$ et 1, la somme fait $11, 50$ € et 60 friandises donc 10 chacun ; cela convient.
Avec les sachets $5, 2$ et 1 on a 45 friandises, non multiple de 6 ; cela ne convient pas pour le partage.

Déterminons les groupes de 3 sachets éventuellement solutions comportant le sachet 6
- La réponse $6, 5$ et n est déjà éliminée.
- La réponse $6, 4$ et n dont la somme est supérieure à 12 € ne convient pas.
- La réponse 6, 3 et 2 dont la somme fait $13, 10$ € ne convient pas.
- La réponse 6, 3 et 1 dont la somme fait 12 € et 62 friandises, ne convient pas pour le partage.
- La réponse 6, 2 et 1 dont la somme fait $11, 30$ € et 57 friandises, ne convient pas.

Parmi les autres groupes de 3 sachets dont le nombre de friandises serait supérieur ou égal à 60 (solution déjà trouvée) il n'y a que les sachets $4, 3$et 2 pour 62 friandises qui ne convient pas.

Les groupes de 2 sachets éventuellement solutions avec le sachet 5 sont :
5 et 6 ; 5 et 4 ; 5 et 3 ; 5 et 2 ; 5 et 1 qui ne conviennent pas pour le partage ou parce qu'ils ont moins de 60 friandises.

Les groupes de 2 sachets éventuellement solutions avec le sachet 6 sont :
6 et 4 ; 6 et 3 ; 6 et 2 ; 6 et 1 qui ne conviennent pas pour un nombre de friandises, inférieur à 60.

Parmi les autres groupes de 2 sachets aucun n'a un nombre de friandises supérieur ou égal à 60.
L'achat d'un seul sachet est éliminé pour la même raison précédente.

Il n'y a donc qu'une seule solution, celle que le frère de Jules lui a conseillée, c'est à dire l'achat des sachets $5, 3$ et 1.

Conclusion : Le frère de Jules a conseillé d'acheter les sachets n° 5, n° 3 et n° 1.

7.2.2 Méthode 2, utilisant un tableur

En utilisant un tableur, il est possible de connaître les prix de toutes les combinaisons possibles.

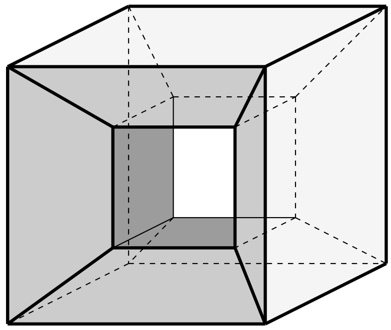
Essai	S1	S2	S3	S4	S5	S6	Nb total	Prix en €
1	1	1	1	1	1	1	134	26,70
2	1	1	1	1	1	0	102	21,10
3	1	1	1	1	0	1	104	21,60
4	1	1	1	1	0	0	72	16,00
5	1	1	1	0	1	1	107	20,50
6	1	1	1	0	1	0	75	14,90
7	1	1	1	0	0	1	77	15,40
8	1	1	1	0	0	0	45	9,80
9	1	1	0	1	1	1	114	22,60
10	1	1	0	1	1	0	82	17,00
11	1	1	0	1	0	1	84	17,50
12	1	1	0	1	0	0	52	11,90
13	1	1	0	0	1	1	87	16,40
14	1	1	0	0	1	0	55	10,80
15	1	1	0	0	0	1	57	11,30
16	1	1	0	0	0	0	25	5,70
17	1	0	1	1	1	1	119	23,30
18	1	0	1	1	1	0	87	17,70
19	1	0	1	1	0	1	89	18,20
20	1	0	1	1	0	0	57	12,60
21	1	0	1	0	1	1	92	17,10
22	1	0	1	0	1	0	60	11,50
23	1	0	1	0	0	1	62	12,00
24	1	0	1	0	0	0	30	6,40
25	1	0	0	1	1	1	99	19,20
26	1	0	0	1	1	0	67	13,60
27	1	0	0	1	0	1	69	14,10
28	1	0	0	1	0	0	37	8,50
29	1	0	0	0	1	1	72	13,00
30	1	0	0	0	1	0	40	7,40
31	1	0	0	0	0	1	42	7,90
32	1	0	0	0	0	0	10	2,30
33	0	1	1	1	1	1	124	24,40
34	0	1	1	1	1	0	92	18,80
35	0	1	1	1	0	1	94	19,30
36	0	1	1	1	0	0	62	13,70
37	0	1	1	0	1	1	97	18,20
38	0	1	1	0	1	0	65	12,60
39	0	1	1	0	0	1	67	13,10
40	0	1	1	0	0	0	35	7,50
41	0	1	0	1	1	1	104	20,30
42	0	1	0	1	1	0	72	14,70
43	0	1	0	1	0	1	74	15,20
44	0	1	0	1	0	0	42	9,60
45	0	1	0	0	1	1	77	14,10
46	0	1	0	0	1	0	45	8,50
47	0	1	0	0	0	1	47	9,00
48	0	1	0	0	0	0	15	3,40
49	0	0	1	1	1	1	109	21,00
50	0	0	1	1	1	0	77	15,40
51	0	0	1	1	0	1	79	15,90
52	0	0	1	1	0	0	47	10,30
53	0	0	1	0	1	1	82	14,80
54	0	0	1	0	1	0	50	9,20
55	0	0	1	0	0	1	52	9,70
56	0	0	1	0	0	0	20	4,10
57	0	0	0	1	1	1	89	16,90
58	0	0	0	1	1	0	57	11,30
59	0	0	0	1	0	1	59	11,80
60	0	0	0	1	0	0	27	6,20
61	0	0	0	0	1	1	62	10,70
62	0	0	0	0	1	0	30	5,10
63	0	0	0	0	0	1	32	5,60
64	0	0	0	0	0	0	0	0,00

- On élimine d'abord les sommes supérieures à 12 €.
- On élimine, ensuite, les totaux qui ne sont pas multiples de 6.
- On choisit, parmi les possibilités restantes, celle qui comporte le maximum de friandises.

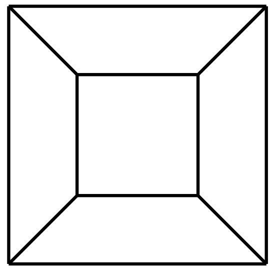
8 Sculpture

8.1 L'énoncé

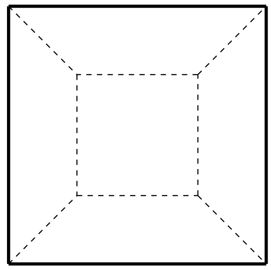
Jean observe un objet de l'espace dessiné en perspective cavalière ainsi que ses vues de face et de côté.



Vue de face et vue arrière



Vues de droite, de gauche de dessus et de dessous



Le grand cube a pour arête le double de l'arête du petit cube.

Déterminez le volume de cette sculpture, en fonction de la longueur de l'arête du grand cube.

8.2 Éléments de solution

8.2.1 Version "longue"

La section de cette sculpture par un plan, déterminé par les milieux de quatre arêtes de même direction, est composée de deux carrés de même centre, l'un d'arête a , l'autre d'arête $\frac{a}{2}$, si a désigne la longueur du côté du grand cube (figure 1).

La section, de cette sculpture, par un plan défini par deux arêtes opposées parallèles, est composée de deux rectangles de même centre dont les diagonales sont respectivement confondues. Les mesures des côtés sont $a\sqrt{2}$, a pour l'un et $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $\frac{a}{2}$ pour l'autre.
Les sommets étant reliés par un segment (figure 2).
Le centre O de la sculpture est également le centre des rectangles et des carrées.

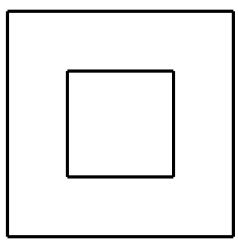


figure 1

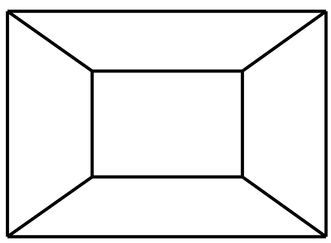


figure 2

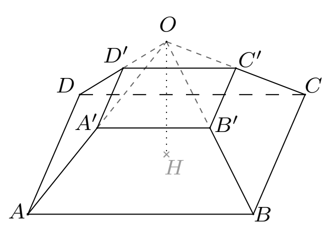


figure 3

On peut considérer que le solide est formé de quatre troncs de pyramides, dont les bases sont des carrés de côté a et $\frac{a}{2}$ respectivement et de hauteur $\frac{a}{2}$ (figure 3).
Le volume du tronc de pyramide est la différence entre le volume de la pyramide de base le carré de côté a et de hauteur $\frac{a}{2}$ et le volume de la pyramide de base le carré de côté $\frac{a}{2}$ et de hauteur $\frac{a}{4}$.

Soit V le volume de la sculpture : $V = 4 \times \frac{1}{3}[a^2 \times \frac{a}{2} - (\frac{a}{2})^2 \times \frac{a}{4}]$

Conclusion : Le volume de la sculpture est $V = \frac{7}{12}\ a^3$.

8.2.2 Version abrégée

La sculpture, ayant un centre de symétrie, est composée de quatre troncs de pyramides isométriques parmi six (en considérant le grand cube moins le petit cube).
a^3 est le volume du grand cube et $(\frac{a}{2})^3$ celui du petit cube.

Le volume de la sculpture est : $\frac{4}{6} \times (a^3 - (\frac{a}{2})^3) = \frac{7}{12}a^3$.

Conclusion : Le volume de la sculpture est $V = \frac{7}{12}\ a^3$.

Remarque : Si b est le côté du petit cube , on obtient $V = \frac{4}{6}(a^3 - b^3)$

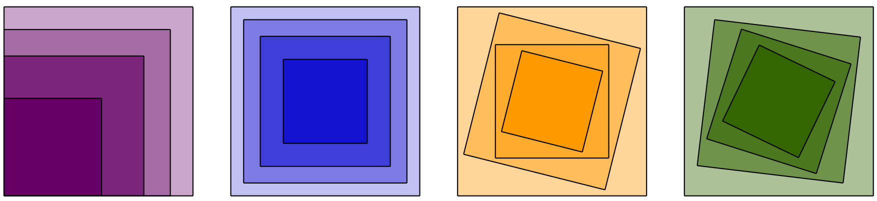
On posant $b = \lambda a$, $V = \frac{4}{6}a^3(1 - \lambda^3)$ avec λ un réel compris entre 0 et 1.

9 Carrés emboîtés

9.1 L'énoncé

Quatre artisans du bâtiment souhaitent unir leurs savoir-faire et leurs carnets de clientèle.

Ils font appel à un designer. Celui-ci leur demande de choisir chacun une couleur différente et leur propose de réaliser un logo de ces quatre couleurs. Pour ne vexer aucun des partenaires, il propose de superposer (sans débordement) quatre carrés de tailles et de couleurs différentes de façon que l'aire des surfaces laissées par chaque couleur soit la même.



Construisez un logo possible en expliquant votre démarche.

9.2 Éléménts de solution

En déplaçant les carrés dans un coin, chaque problème posé est équivalent au cas n° 1.

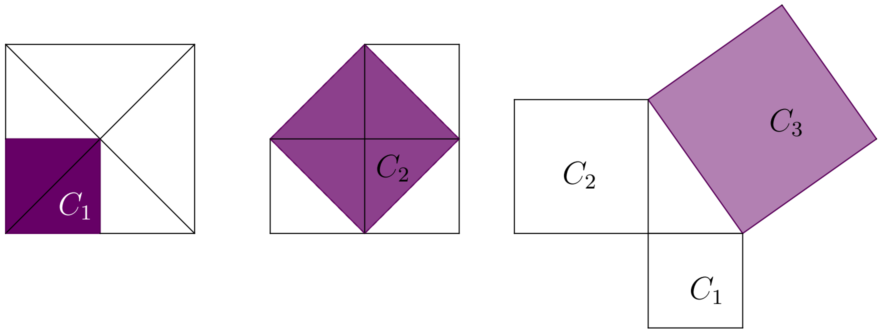
Notons C_1, C_2, C_3 et C_4 les quatre carrés dans l'ordre croissant des aires.
a désigne la longueur du côté du carré C_4.

Les quatre carrés partagent le grand carré en quatre domaines de même aire.
L'aire de C_1 est donc le quart de l'aire du grand carré C_4, d'où $aire(C_1) = \frac{a^2}{4}$, la longueur du côté de C_1 est $\frac{a}{2}$

L'aire de C_2 doit vérifier :
$aire(C_1) = aire(C_2) - aire(C_1)$, soit $aire(C_2) = 2aire(C_1)$, soit $aire(C_2) = \frac{a^2}{2}$.
La longueur du côté de C_2 est donc $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ c'est-à-dire la longueur de la diagonale de C_1.

L'aire de C_3 doit vérifier $aire(C_3) - aire(C_2) = aire(C_1)$, soit $aire(C_3) = aire(C_1) + aire(C_2)$.

Connaissant C_1 et C_2, la situation de Pythagore permet de construire C_3.



Conclusion : Le compas permet de tracer des angles droits et de reporter les longueurs des tracés ci-dessus et ainsi réaliser un logo possible.

Ci-dessous un exemple de logo, représenté à l'échelle 2.