RALLYE MATHÉMATIQUE DE FRANCHE-COMTÉ
Épreuve de qualifications du vendredi 14 janvier 2011

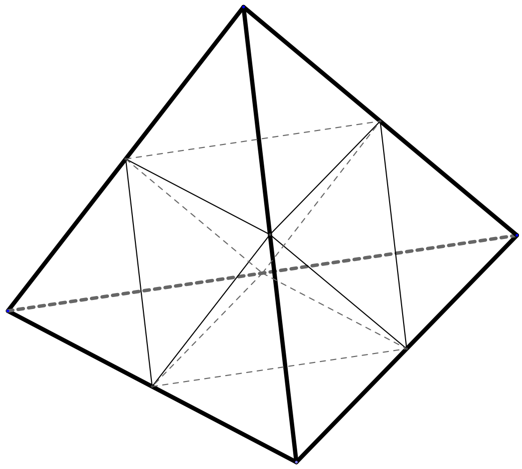
Les classes de Troisième doivent résoudre les problèmes 1 à 6.
Les classes de Seconde doivent résoudre les problèmes 4 à 9.
La classe doit rendre une seule réponse par problème traité **en expliquant la démarche**.

---

1 – Tétra-couleur

Les quatre faces d'un tétraèdre régulier sont partagées en quatre petits triangles équilatéraux. Chacun de ces petits triangles est colorié de telle sorte que deux petits triangles équilatéraux ayant un côté commun n'ont pas la même couleur.

En utilisant le minimum de couleurs, proposez un coloriage possible de ce tétraèdre régulier.
Expliquez votre démarche.



Dessin en perspective cavalière de ce tétraèdre régulier.

2 – Partage équitable

ABC est un triangle tel que AB = 10 cm, BC = 8 cm et AC = 6 cm.
Chacun des trois côtés de ce triangle est partagé en segments de longueur 2 cm.
On place un point M à l'intérieur du triangle, puis on relie M à chaque sommet et à chacun des points placés précédemment. On obtient ainsi douze triangles à l'intérieur du triangle ABC.

Déterminez la position du point M pour que ces douze triangles aient la même aire. Expliquez votre raisonnement.

3 – Zone de broutage

Un cube en ciment, dont les côtés mesurent un mètre, est placé au milieu d'un grand pré.
À l'un des coins inférieurs de ce cube est fixé un anneau métallique.
À l'extrémité d'une corde fixée à cet anneau est attachée une chèvre naine. La première semaine, la longueur de la corde est de 70 cm, la deuxième semaine la longueur est de 100 cm puis la troisième 150 cm et enfin la quatrième 200 cm.

Déterminez, suivant les semaines, l'aire maximale de la surface disponible pour l'animal.

À l'échelle $\frac{1}{50}$, dessinez le contour de ces surfaces dans les différents cas.

4 – Guirlande

Marc, directeur d'un parc de loisirs, souhaite réaliser une enseigne lumineuse qu'il fixera sur le mur à côté de l'entrée. Pour cela, il a acheté une guirlande lumineuse de 50 mètres de longueur et il explique à son fils Jules la manière dont il souhaite la poser :

« Au centre du mur, je vais fixer la guirlande sur un segment de 7 centimètres de longueur, puis je vais la tourner de 120° par rapport au segment précédent et la fixer sur un segment dont la longueur est égale à celle du précédent augmentée de 14 centimètres, puis la tourner de 120°, toujours dans le même sens, et répéter cela jusqu'à ce que j'aie fixé toute la guirlande ! »

Pour mieux comprendre ce que Marc va obtenir, Jules dessine, à l'échelle $\frac{1}{5}$, les six premiers segments, s'arrête, réfléchit et annonce à son père :

« Tu vas réaliser une spirale triangulaire et je peux te donner la longueur du dernier segment que tu obtiendras quand tu auras fixé toute la guirlande. »

Marc, surpris, lui répond :

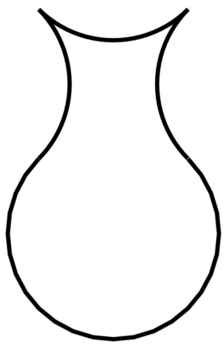
« D'accord, mais cela risque d'être long, non ? »

Il est encore plus étonné lorsque Jules lui rétorque :

« Pas du tout, cela se fait en moins de 10 opérations ! »

Réalisez le dessin de Jules, et expliquez comment il peut, en moins de dix opérations, trouver la longueur du dernier segment. Expliquez votre démarche.

5 – Amphore



Le contour de cette figure, dont la forme est celle d'une amphore, est composé de six quarts de cercle de même rayon.

En découpant judicieusement cette surface, réalisez un carré dont l'aire est égale à l'aire de cette figure. Expliquez.

6 – Pyramides

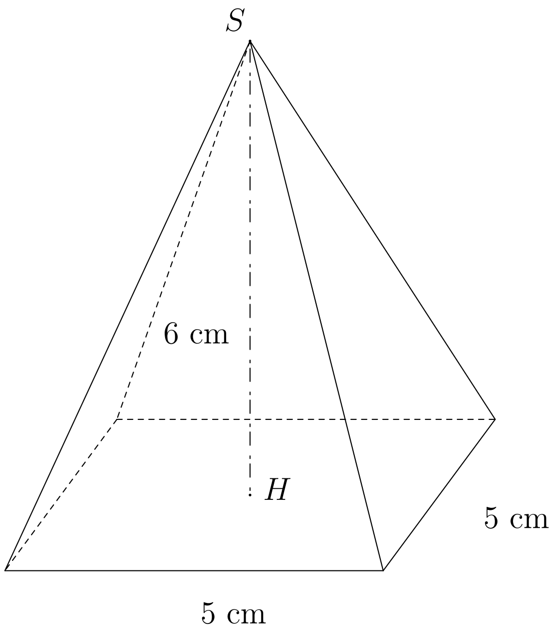
Cinq élèves doivent fabriquer chacun une pyramide régulière à base carrée.

Chaque côté de la base mesure 5 cm et chaque hauteur mesure 6 cm.

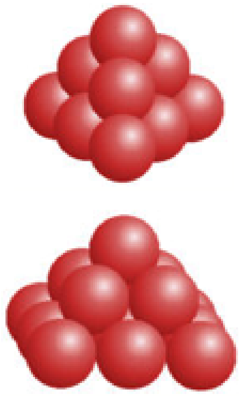
Leur travail terminé, Louis dispose quatre pyramides sur leur base de manière à former un carré de 10 cm de côté. Puis il prend la dernière, la retourne et la pose, sommet en bas dans une partie de l'espace libre.

« Il reste quatre espaces vides, identiques, à remplir afin d'obtenir un tronc de pyramide ! » dit-il.

À vous maintenant de réaliser un patron d'un de ces espaces vides.
Donnez les différentes étapes de votre raisonnement.



7 – Garderie « Pyramide »



Une dispute éclate à la garderie « Pyramide » entre Victor et Fleur.
Fleur : « Victor m'a volé des boules rouges ! »
Victor : « Je ne t'en ai pris qu'une ! »
Fleur : « Oui mais avant je pouvais les empiler pour former un tétraèdre ! » (suivant le modèle ci-contre).
Victor : « Tu en as encore suffisamment pour faire une pyramide à base carrée ! » (suivant le modèle ci-contre).

Sachant que Fleur possède moins de 100 boules, combien lui en reste-t-il exactement ? Justifiez.

8 – Quinté

Max et Mike ont joué aux courses et ont décidé de se retrouver à l'hippodrome pour vivre le quinté en direct. Mais Max arrive en retard et manque l'arrivée de la course. Son ami lui annonce qu'ils ont bien trouvé les cinq chevaux gagnants, mais dans le désordre !
Mike, grand joueur devant l'Éternel, propose à Max le défi suivant : deviner l'ordre du quinté en faisant au maximum 10 propositions auxquelles Mike répondra par Vrai ou Faux.
Si Max trouve l'ordre d'arrivée des chevaux, il empochera les trois quarts de leur gain, sinon il n'en aura qu'un quart !
Max accepte et se concentre...
Il se souvient qu'ils ont parié sur Salsa, Samba, Samoa, Sherwood et Sunset. Il sait que Samba et Salsa sont montés par des jockeys portant une casaque bleue, que le jockey de Samoa porte une casaque rouge et que les jockeys de Sherwood et de Sunset portent une casaque verte.
Max fait six propositions et annonce alors le quinté dans l'ordre !
Mike est déçu, mais reconnaît sa défaite et tous deux repartent bons amis récupérer leur gain !
Voici les six propositions de Max et les réponses de Mike :

1. Samba n'est pas arrivé le dernier : VRAI
2. Samoa est arrivé après Salsa : FAUX
3. Tous les chevaux sont arrivés avant Sunset : FAUX
4. Il existe au moins deux chevaux qui arrivent après Salsa : VRAI
5. Il existe exactement deux casaques bleues dans le tiercé gagnant : FAUX
6. Tous les chevaux arrivés après Sunset ont une couleur différente : VRAI

Avec ces renseignements, saurez-vous retrouver le quinté dans l'ordre ? Expliquez.

9 – Partage triangulaire

Dessinez un hexagone convexe [1] dont les longueurs des côtés, en centimètre, sont les entiers de un à six. Céline découpe cet hexagone en triangles dont les trois sommets sont des sommets de celui-ci. Ainsi elle réalise un puzzle de l'hexagone.

Déterminez le nombre de puzzles différents qu'il lui est possible de réaliser puis dessinez-les.

1. Hexagone convexe : tout segment, joignant deux points quelconques pris à l'intérieur de l'hexagone, est à l'intérieur de l'hexagone.

Établissement :	Ville :
Nom du professeur de mathématiques :	Classe : *Effectif de la classe :*

Fiche réponse du problème n°

Établissement :	Ville :
Nom du professeur de mathématiques :	Classe : *Effectif de la classe :*

Fiche réponse du problème n° 5