RALLYE MATHÉMATIQUE DE FRANCHE-COMTÉ
Éléments de solution de l'épreuve finale de 2011

Les classes de Troisième doivent résoudre les problèmes 1 à 6.
Les classes de Seconde doivent résoudre les problèmes 4 à 9.
La classe doit rendre une seule réponse par problème traité **en expliquant la démarche**.

Dans ces éléments de solution, nous proposons, pour chaque problème, au moins une réponse dont la démarche est accessible aux élèves.

1 Code

1.1 Énoncé

Lili possède un diamant d'une valeur inestimable qu'elle garde dans un coffre protégé par un code secret.
Si on multiplie ce code par 7, on obtient un nombre qui ne contient que des 9 et qui a moins de 40 chiffres. Max a trouvé six codes différents qui conviennent.

Trouvez-en au moins deux. Justifiez votre réponse.

1.2 Éléments de solution

Soit n le nombre ne comportant que des 9 et c un code possible, le problème se traduit par $n = 7 \times c$.
En effectuant la division euclidienne, on obtient :

Pour $n = 9$,	$n = 7 \times 1 + 2$,
Pour $n = 99$,	$n = 7 \times 14 + 1$,
Pour $n = 999$,	$n = 7 \times 142 + 5$,
Pour $n = 9\,999$,	$n = 7 \times 1\,428 + 3$,
Pour $n = 99\,999$,	$n = 7 \times 14\,285 + 4$,
Pour $n = 999\,999$,	$n = 7 \times 142\,857$.

999 999 est le premier des nombres ne comportant que des 9 divisible par 7.

Tous les autres s'obtiennent en écrivant des groupes de six 9 les uns au bout des autres.

Voici deux codes possibles 142 857, 142 857 142 857.

Remarque : la somme des chiffres de ces codes est un multiple de 27.

Ces nombres peuvent s'écrire :

$$n = \sum_{i=1}^{p} 999\,999 \times 10^{6i} \quad \text{et} \quad c = \sum_{i=1}^{p} 142\,857 \times 10^{6i}$$

Il y a six codes différents qui, multipliés par 7, donnent un nombre ne contenant que des 9 et qui a moins de 40 chiffres.

2 Aquarium

2.1 Énoncé

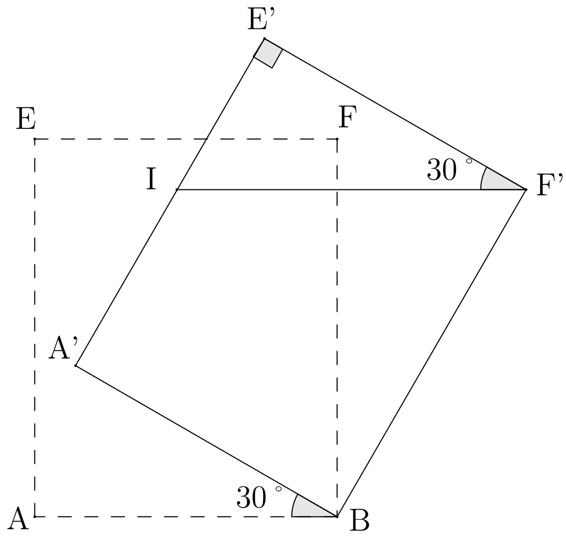
Un aquarium a la forme d'un pavé droit. Ses dimensions intérieures sont 40 cm, 40 cm et 50 cm.
Alors qu'il est rempli d'eau à ras bord, Brutus bouscule l'aquarium qui se penche alors de 30 °.
Heureusement, il revient à sa position initiale sans se renverser complètement.
Ces trois situations sont représentées sur la feuille réponse.

Dessinez le niveau d'eau restant dans l'aquarium en détaillant votre démarche.
Vous complèterez la 3e figure sur la feuille réponse.

2.2 Éléments de solution

Le problème revient à observer ce qui se passe sur la face avant de l'aquarium.

2.2.1 Méthode algébrique



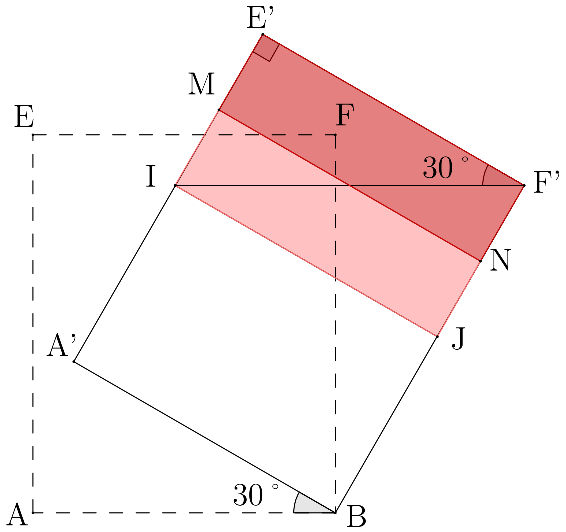
Le volume en position initiale est $40 \times 40 \times 50$ cm^3 soit 80 000 cm^3.
Le volume d'eau renversée correspond au volume d'un prisme dont la base est le triangle E'F'I rectangle en E'.
La longueur E'I mesure $40 \times \tan 30\,°$ soit 23, 1 cm à 0, 1 cm près.

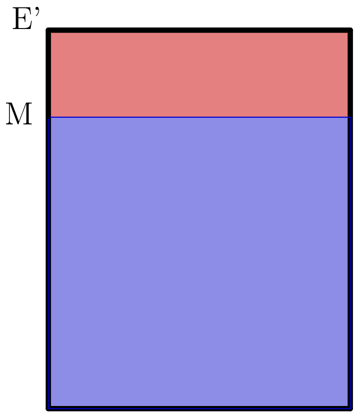
Le volume d'eau renversé est donc $\dfrac{40 \times \tan 30\,° \times 40}{2} \times 40$ cm^3 soit 18 475 cm^3 au cm^3 près .

Le volume d'eau restant est égal à est : 80 000 - 18 475 = 61 525 cm^3.

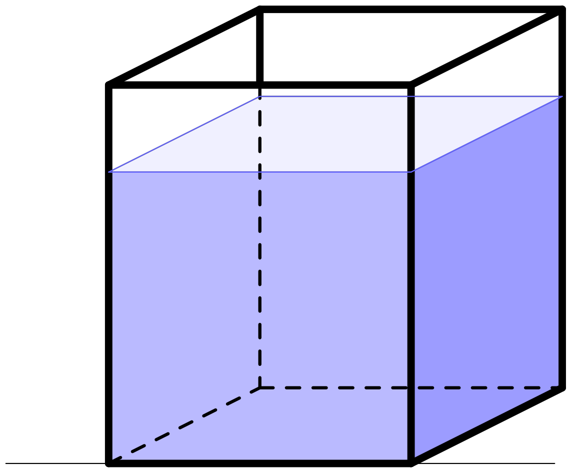
La hauteur h d'eau restante est donc : $h = \dfrac{61\,525}{40^2}$ =38,5 cm à 0,1 cm près.

2.2.2 Méthode géométrique





Le volume d'eau renversée correspond au volume du prisme dont la base est le triangle E'F'I rectangle en E'.
Il faut donc représenter un rectangle sur la figure initiale qui a la même aire que le triangle E'F'I.
Sur l'aquarium incliné, on représente le rectangle E'F'JI dont l'aire est double de celle de E'F'I.
Soit M le milieu de [E'I].
Il suffit de reporter la longueur E'M sur la figure initiale pour obtenir le niveau d'eau restant dans l'aquarium.



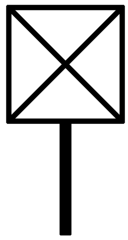
3 Balises

3.1 Énoncé

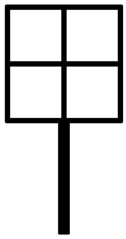
Alain, membre de **Parcours 25** doit réaliser 200 balises différentes, mais toutes constituées de carrés de bois fixés sur des poteaux.

Il décide de réaliser deux types de balises en respectant des règles très précises.

Balise de type 1 :
• Le carré est partagé par une croix noire représentant ses diagonales ;
• chaque triangle obtenu est peint en choisissant une couleur parmi les cinq couleurs noire, rouge, bleue, jaune et verte ;
• les quatre triangles sont de quatre couleurs différentes.



Balise de type 2 :
• Le carré est partagé par une croix noire représentant les médiatrices des côtés ;
• chaque carré obtenu est peint en choisissant une couleur parmi les trois couleurs rouge, bleue et verte.



Le choix d'Alain permet-il de réaliser 200 balises différentes ?

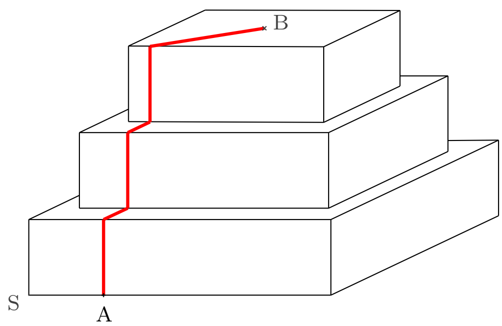
3.2 Éléments de solution

Sur les balises de type 1, chacun des triangles est peint d'une couleur différente et on dispose de 5 couleurs.
Si Alain décide de peindre d'abord le triangle du haut, il peut le peindre de 5 façons différentes. Il lui reste alors 4 façons différentes pour peindre celui du bas, 3 façons différentes pour peindre celui de droite et 2 façons différentes pour peindre celui de gauche.
Alain a alors $5 \times 4 \times 3 \times 2$ possibilités de peindre ce type de balises et peut ainsi obtenir 120 balises différentes.
Sur les balises de type 2, chacun des carrés est peint d'une couleur choisie parmi trois donc au moins deux carrés doivent être de même couleur.
Alain peut donc peindre le carré en haut à gauche de 3 façons différentes, ainsi que chacun des trois autres carrés.
Alain a alors $3 \times 3 \times 3 \times 3$ possibilités de peindre ce type de balises et peut ainsi obtenir 81 balises différentes.
En respectant les règles données pour construire les balises de type 1 et de type 2, Alain dispose de 201 balises différentes. Il peut donc bien réaliser 200 balises différentes.

4 La ligne rouge

4.1 Énoncé

Le dessin ci-dessous représente trois pavés à base carrée. Ces trois pavés sont centrés les uns par rapport aux autres et leurs arêtes sont parallèles.
Celui du bas mesure 120 cm de côté, celui du milieu 100 cm de côté et celui du haut 80 cm. Ils ont tous la même hauteur 30 cm.
Le point A est situé à 30 cm du sommet S et le point B est le centre du carré supérieur.
On a tracé la ligne rouge en suivant des parallèles aux différentes arêtes comme le montre le dessin, puis en rejoignant le centre B.



Calculez la longueur de cette ligne rouge.

En fait, il est possible de tracer une ligne de A jusqu'à B qui est plus courte que la ligne précédente.
Proposez une solution et donnez la longueur de cette nouvelle ligne.

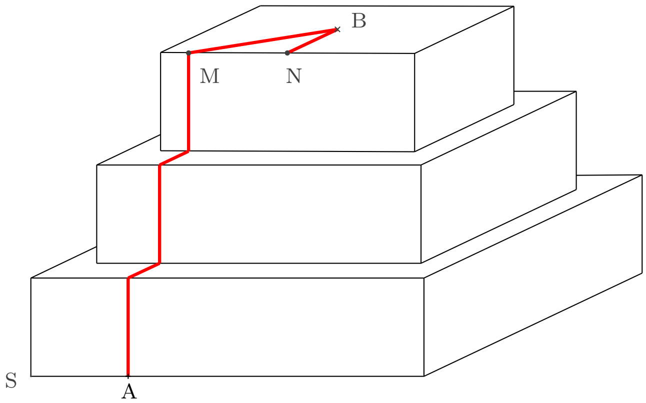
4.2 Éléments de solution

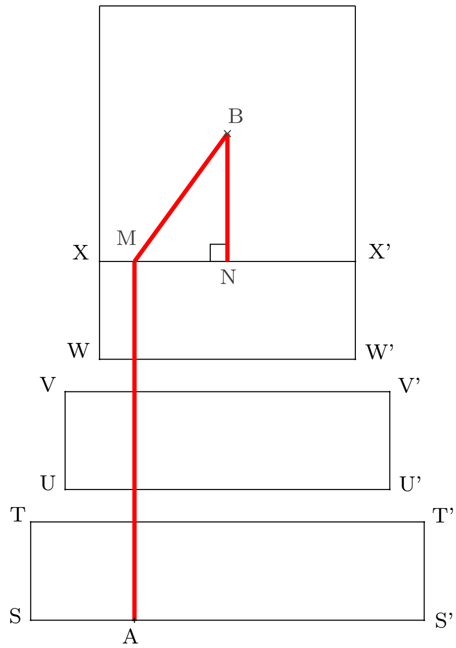
4.2.1 Longueur de la ligne rouge

Les cinq premiers segments ont comme longueurs respectives 30 cm, 10 cm, 30 cm, 10 cm et 30 cm. Le segment [MB] est l'hypoténuse du triangle rectangle MNB dont les côtés de l'angle droit [MN] et [NB] mesurent respectivement 30 cm et 40 cm.

On peut calculer MB avec le théorème de Pythagore : $\text{MB}^2 = 30^2 + 40^2 = 2500$ donc $\text{MB} = 50$ cm

La ligne rouge mesure donc :
$3 \times 30 \text{ cm} + 2 \times 10 \text{ cm} + 50 \text{ cm} = 160\,\text{cm}$.

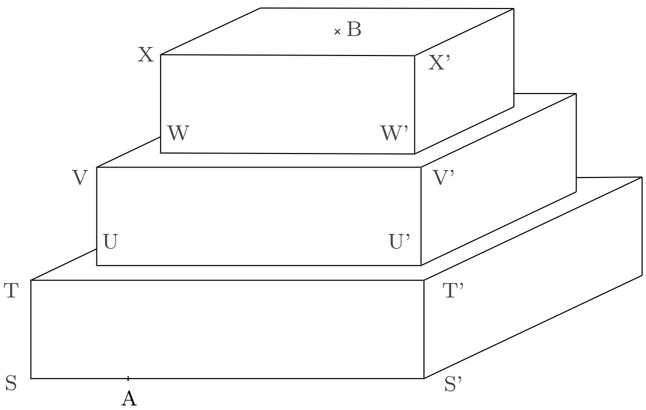




La ligne rouge mesure 160 cm.

4.2.2 Longueur de la ligne la plus courte

La ligne la plus courte s'obtient en "dépliant" les pavés et en traçant le segment [AB].



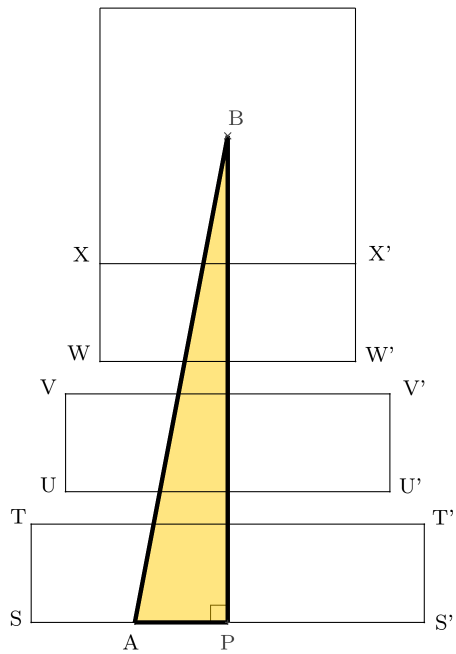


Figure "dépliée"

P étant le milieu de [SS'], nous avons alors un triangle ABP rectangle en P dont nous allons calculer les longueurs des côtés de l'angle droit :

AP $= 60 - 30 = 30$
BP $= 30 + 10 + 30 + 10 + 30 + 80 \div 2 = 150$

En calculant AB avec le théorème de Pythagore, on obtient :

$AB^2 = 30^2 + 150^2 = 23\,400$ d'où $AB = \sqrt{23400} \approx 153$.

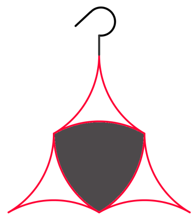
La longueur de la ligne la plus courte est $\sqrt{23400}$ cm soit environ 153 cm.

Toute ligne dont la longueur est comprise entre 153 cm et 160 cm conviendra.

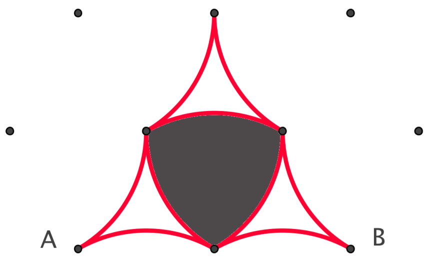
5 Boucle d'oreille

5.1 Énoncé

Lola vient de créer une boucle d'oreille qui a beaucoup plu à l'orfèvre pour lequel elle travaille.
Ce modèle est constitué de neuf fils d'or incurvés. Les trois fils intérieurs maintiennent une plaque d'argent.



Afin d'évaluer le coût de ce bijou, l'orfèvre demande à Lola de lui préciser la longueur de fil d'or à prévoir ainsi que la surface de la plaque d'argent. Lola reprend le papier sur lequel elle a travaillé. Au départ, elle avait un réseau de points disposés en triangles équilatéraux et elle n'a dessiné que des arcs de cercle ayant comme centre un de ces points. Sur le bijou, entre les points A et B, il y aura 4 cm.



Calculez la longueur de fil d'or et l'aire de la plaque d'argent. Expliquez votre démarche.

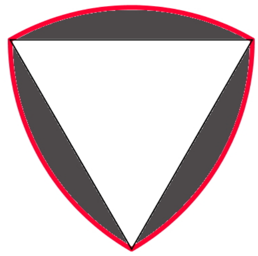
5.2 Éléments de solution

5.2.1 Longueur du fil d'or

Comme AB $= 4$ cm, chaque triangle équilatéral mesure 2 cm de côté.
Les rayons de tous les arcs de cercle mesurent aussi 2 cm. Un arc de cercle représente $1/6$ du cercle complet et les neuf arcs $9/6$ du cercle. On obtient donc une longueur de 6π. ($2 \times 2 \times 2 \times \pi \times 9 \div 6 = 6\pi$)

La longueur du fil d'or à prévoir pour une boucle d'oreille est d'environ 19 cm.

5.2.2 Aire de la plaque d'argent

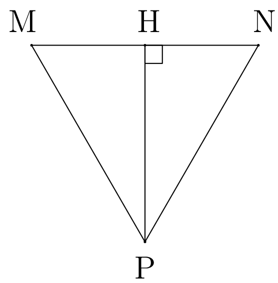


Faisons apparaître le triangle équilatéral qui est à l'intérieur de cette plaque :
Nous voyons alors ce triangle et trois parties incurvées (en gris sur le dessin ci-contre).
Chaque partie incurvée résulte de la différence entre 1/6 de disque et le triangle équilatéral.

Calculons déjà l'aire du triangle équilatéral de côté 2 cm :
pour cela, il nous faut connaître sa hauteur que l'on calcule en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle MHP sachant que MP = 2 cm et que MH = 1 cm.

$PH^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$ soit $PH = \sqrt{3}$ cm

L'aire du triangle MNP est donc égale à $2 \times \sqrt{3} \div 2 = \sqrt{3}$ cm^2



Calculons maintenant l'aire de 1/6 de disque de rayon 2cm :

aire $= \pi \times 2^2 \div 6 = \pi \times 4 \div 6 = \dfrac{2}{3}\pi$

Chaque partie incurvée a comme aire $\dfrac{2}{3}\pi - \sqrt{3}$
et les trois parties incurvées auront une aire totale égale à $2\pi - 3\sqrt{3}$

La plaque d'argent a comme aire $\sqrt{3} + 2\pi - 3\sqrt{3}$ soit $2\pi - 2\sqrt{3}$.

L'aire de la plaque d'argent à prévoir pour une boucle d'oreille est d'environ 3 cm^2.

6 Chaos dans l'espace temps

6.1 Énoncé

Flavio possède une horloge digitale qui lui sert de réveil chaque matin.
Quand il fonctionne normalement, celui-ci affiche successivement 10 : 13 puis 10 : 14 ...après chaque minute écoulée.

La nuit d'Halloween, le réveil reçoit un message numérique et s'emballe. A partir de minuit, (00 : 00) il obéit à la consigne suivante :
si le nombre d'heures divise le nombre de minutes ou si le nombre de minutes divise le nombre d'heures, il refuse d'afficher l'heure en question.

Exemple : l'affichage 04 : 15 aurait dû être suivi, une minute plus tard, de 04 : 16 mais l'horloge refuse de l'afficher et passe instantanément à l'affichage de 04 : 17.

Ce réveil prend donc de l'avance sur le temps réel.
Quand la sonnerie se déclenche à l'affichage de 06 : 55, quelle heure est-il en réalité ?

6.2 Éléments de solution

Déterminer l'heure réelle au moment où le réveil sonne revient à trouver le nombre d'affichages effectués par le réveil depuis minuit jusqu'à ce qu'il sonne.
En effet, entre chaque affichage effectif, une minute s'est écoulée et cela correspond exactement au nombre de minutes écoulées entre 00 h 00 et 06 h 55.

6.2.1 Solution 1

Dresser la liste de tous les affichages théoriques et barrer ceux que le réveil refusera d'afficher est une stratégie réalisable en partageant le travail entre les membres du groupe, mais longue et fastidieuse.
On peut remarquer, sans tout lister que :

- Entre 00 : 00 et 00 : 59, il n'y aura **aucun affichage** car tout nombre divise 0.
- Entre 01 : 00 et 01 : 59, il n'y aura **aucun affichage** car 1 divise tout nombre.
- Entre 02 : 00 et 02 : 59, on peut répartir les 60 minutes en 30 unités de temps de 2 minutes consécutives. Pendant la première unité, il n'y aura aucun affichage, puis il y aura 1 affichage par unité (minutes impaires) soit **29 affichages effectifs**.
- Entre 03 : 00 et 03 : 59, on peut répartir les 60 minutes en 20 unités de temps de 3 minutes consécutives. Pendant la première unité, il y aura 1 affichage, puis il y aura 2 affichages par unité (minutes qui ne sont pas multiples de 3) soit **39 affichages effectifs** $(1 + 2 \times 19\ )$.
- Entre 04 : 00 et 04 : 59, on peut répartir les 60 minutes en 15 unités de temps de 4 minutes consécutives. Pendant la première unité, il y aura 1 affichage, puis il y aura 3 affichages par unité (minutes qui ne sont pas multiples de 4) soit **43 affichages effectifs** $(1 + 3 \times 14)$.
- Entre 05 : 00 et 05 : 59, on peut répartir les 60 minutes en 12 unités de temps de 5 minutes consécutives. Pendant la première unité, il y aura 3 affichages, puis il y aura 4 affichages par unité (minutes qui ne sont pas multiples de 5) soit **47 affichages effectifs** $(3 + 4 \times 11\ )$.
- Entre 06 : 00 et 06 : 59, on peut répartir les 60 minutes en 10 unités de temps de 6 minutes consécutives. Pendant la première unité, il y aura 2 affichages, puis il y aura 5 affichages par unité (minutes qui ne sont pas multiples de 6) sauf pour la dernière unité puisque le réveil sonnera à 6 h 55. Il y aura donc **43 affichages effectifs** $(2 + 5 \times 8 + 1)$.

Ce réveil défectueux a donc effectué **201 affichages effectifs** .

201 minutes $=$ 3 h 21 minutes.

Lorsque le réveil affiche 6 h 55, il est donc 3 h 21.

6.2.2 Solution 2

On peut également utiliser un tableur comme l'indique la solution ci-dessous.

	A	B	C
1	Heures	minutes	Affiche 1 si les nombres ne sont pas multiples l'un de l'autre
2	0	0	
3	0	1	
4	0	=SI(B3<59;B3+1;0)	=SI(OU(MOD(A4;B4)=0;MOD(B4;A4)=0);"";1)
5	=SI(B4>58;A4+1;A4)	=SI(B4<59;B4+1;0)	=SI(OU(MOD(A5;B5)=0;MOD(B5;A5)=0);"";1)
6	=SI(B5>58;A5+1;A5)	=SI(B5<59;B5+1;0)	=SI(OU(MOD(A6;B6)=0;MOD(B6;A6)=0);"";1)

Les colonnes A et B affichent le déroulement d'un réveil normal.
La colonne C affiche un vide si un des deux nombres est multiple de l'autre et 1 sinon.

On remplit le tableau jusqu'à l'heure où le réveil doit sonner, c'est-à-dire jusqu'à 06 h 55.

	A	B	C	D	E	F
1	Heures	minutes	Affiche 1 si les nombres ne sont pas multiples l'un de l'autre			
2	0	0				
3	0	1				
4	0	2	#DIV/0!			
5	0	3	#DIV/0!			
6	0	4	#DIV/0!			
7	0	5	#DIV/0!			
8	0	6	#DIV/0!			
410	6	48				
411	6	49	1			
412	6	50	1			
413	6	51	1			
414	6	52	1			
415	6	53	1			
416	6	54				
417	6	55	1			
418						
419			201			

La cellule C419 contient la formule $\boxed{= \text{NB.SI(C2 :C417 ;1)}}$.
Elle compte le nombre de "1" présents dans la plage C2 à C417.

Une cellule $\boxed{\#\text{DIV}/0\,!}$ indique que le tableur est gêné par la présence d'un 0 dans l'application de la fonction MOD. Il refuse d'afficher un vide et pourtant 0 est bien divisible par tous les entiers de 1 à 59. Cela ne change rien à notre décompte de minutes.

201 est le nombre d'affichages effectifs de ce réveil défectueux.
201 minutes = 3 h 21 minutes.

Lorsque le réveil affiche 6 h 55, il est donc 3 h 21.

6.2.3 Solution 3

00 : 00	
00 : 01	-1
00 : 02	-1
00 : 03	-1
00 : 04	-1
00 : 05	-1
00 : 06	-1
00 : 07	-1
00 : 08	-1
59 minutes de gagnées sur le temps réel car tout nombre non nul divise 0	
00 : 59	-1
total	-59

01 : 00	-1
01 : 01	-1
01 : 02	-1
01 : 03	-1
01 : 04	-1
01 : 05	-1
01 : 06	-1
01 : 07	-1
01 : 08	-1
60 minutes de gagnées sur le temps réel car tout nombre non nul divise 1	
01 : 59	-1
total	-60

02 : 00	-2
02 : 01	
02 : 02	-1
02 : 03	
02 : 04	-1
02 : 05	
02 : 06	-1
02 : 07	
02 : 08	-1
1 minute de gagnée toutes les deux minutes entre 02:02 et 02:58, soit 29 minutes (car 58 = 29*2)	
02 : 56	-1
02 : 57	
02 : 58	-1
02 : 59	
total	-31

03 : 00	-2
03 : 01	
03 : 02	
03 : 03	-1
03 : 04	
03 : 05	
03 : 06	-1
03 : 07	
03 : 08	
03 : 09	-1
1 minute de gagnée toutes les trois minutes entre 03:03 et 03:57, soit 19 minutes (car 57 = 19*3)	
03 : 59	
total	-21

04 : 00	
04 : 01	-3
04 : 02	
04 : 03	
04 : 04	-1
04 : 05	
04 : 06	
04 : 07	
04 : 08	-1
04 : 09	
1 minute de gagnée toutes les quatre minutes entre 04:04 et 04:56, soit 14 minutes (car 56 = 14*4)	
04 : 56	-1
04 : 57	
04 : 58	
04 : 59	
total	-17

05 : 00	-2
05 : 01	
05 : 02	
05 : 03	
05 : 04	
05 : 05	-1
05 : 06	
05 : 07	
05 : 08	
05 : 09	
05 : 10	-1
1 minute de gagnée toutes les cinq minutes entre 05:05 et 05:55, soit 11 minutes (car 55 = 11*5)	
05 : 55	-1
05 : 56	
05 : 57	
05 : 58	
05 : 59	
total	-13

06 : 00	
06 : 01	-4
06 : 02	
06 : 03	
06 : 04	
06 : 05	
06 : 06	-1
06 : 07	
06 : 08	
1 minute de gagnée toutes les six minutes entre 06:06 et 06:54, soit 9 minutes (car 54 = 9*6)	
06 : 54	-1
06 : 55	
total	-13

Finalement, le réveil a gagné : $59+60+31+17+13+13 = 214$ minutes
alors que dans la réalité il aurait dû s'écouler 415 minutes entre 00 : 00 et 06 : 55
($6*60+55=415$).

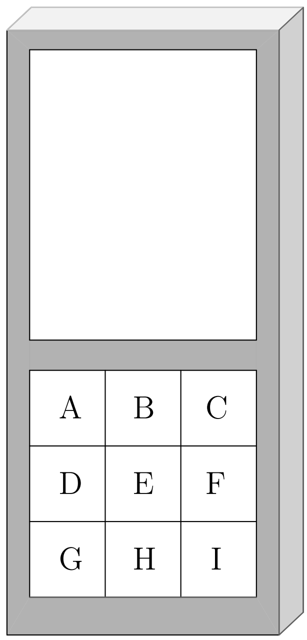
Or 214 min = 3h 34, donc quand le réveil affiche 06 : 55 il est en réalité 6 h 55 - 3 h 34
soit 3 h 21.

Lorsque le réveil affiche 6 h 55, il est donc 3 h 21.

7 Déverrouillage

7.1 Énoncé

Héloïse a reçu un téléphone portable dernier cri pour son anniversaire. Excitée par ce cadeau, elle ne prend pas le temps de consulter la notice et par inadvertance, verrouille le clavier avec un code qu'elle n'a pas pris le temps de mémoriser ni même de noter.
L'écran de son portable affiche dorénavant neuf cases comme l'indique le schéma ci-contre :



Le code est formé d'un trajet reliant 4 cases différentes. Il suffit de laisser glisser son doigt d'une case à une case voisine horizontalement ou verticalement.
On précise que le même trajet dans le sens inverse est un code différent.
Exemple : ADEH n'est pas le même code que HEDA.

Le gâteau d'anniversaire à peine avalé, tous les convives se croient assez chanceux pour retrouver par hasard le code qui déverrouillera le téléphone.

Quelle est la probabilité de trouver le bon code du premier coup ?

7.2 Éléments de solution

Chaque convive essaie un code de 4 lettres au hasard.
La probabilité d'obtenir le code correct est donc égal à $\dfrac{1}{\text{nombre de codes possibles}}$.

Pour dénombrer tous les codes possibles, l'élaboration d'un arbre ici sous forme d'un tableau semble bien appropriée.

Trois cas se distinguent :

Cas n° 1 : le départ se fait dans un angle (lettre A, C, G ou I). Le nombre de codes au départ de ces quatre lettres étant le même, nous allons réduire le décompte en démarrant de A par exemple.

1re position	2^{e} position	3^{e} position	4^{e} position	Code
A	B	C	F	ABCF
		E	D	ABED
			F	ABEF
			H	ABEH
	D	E	B	ADEB
			F	ADEF
			H	ADEH
		G	H	ADGH

On obtient ainsi 8 codes commençant par l'angle A et il y en a autant au départ de C, G et I.
Soit au total $4 \times 8 = 32$ codes commençant dans un angle.

Cas n° 2 : le départ se fait sur un milieu (lettre B, D, F ou H).

Le nombre de codes au départ de ces quatre lettres étant le même, nous allons réduire le décompte en démarrant de B par exemple.

1re position	2^{e} position	3^{e} position	4^{e} position	Code
B	A	D	G	BADG
			E	BADE
	C	F	E	BCFE
			I	BCFI
	E	D	A	BEDA
			G	BEDG
		F	C	BEFC
			I	BEFI
		H	I	BEHI
			G	BEHG

On obtient ainsi 10 codes commençant par l'angle A et il y en a autant au départ de D, F et H.
Soit au total $4 \times 10 = 40$ codes commençant sur un milieu.

Cas n° 3 : le départ se fait au centre, sur la lettre E.

1re position	2e position	3e position	4e position	Code
E	B	A	D	EBAD
		C	F	EBCF
	D	A	B	EDAB
		G	H	EDGH
	F	I	H	EFIH
		C	B	EFCB
	H	I	F	EHIF
		G	D	EHGD

Il y a 8 codes à partir de la lettre E, soit au total, 80 codes possibles.

Pour chaque convive, la probabilité de deviner le bon code est donc $\frac{1}{80}$.

8 Généalogie ascendante

8.1 Énoncé

Henri Chandon s'adonne à la généalogie et recherche ses ascendants. En généalogie, les ascendants sont toujours désignés par leur nom de naissance.
Pour travailler méthodiquement, ceux-ci sont numérotés. Les principes de numérotation sont les suivants :
• Henri est noté 1.
• Ses parents Pierre Chandon et Françoise Mouette sont notés respectivement 2 et 3.
• Plus généralement, le père et la mère d'un individu numéroté n sont respectivement numérotés $2n$ et $2n+1$.
Ainsi les parents d'un individu ont des numéros consécutifs.
On remarque que les hommes ont un numéro pair, les femmes ont un numéro impair.

Parmi les ascendants d'Henri, quels sont les numéros de ceux qui s'appellent obligatoirement Chandon ?
Quel est le lien de parenté entre l'ascendant 71 et l'ascendant d'Henri nommé Chandon le plus proche de l'ascendant 71 ?

8.2 Éléments de solution

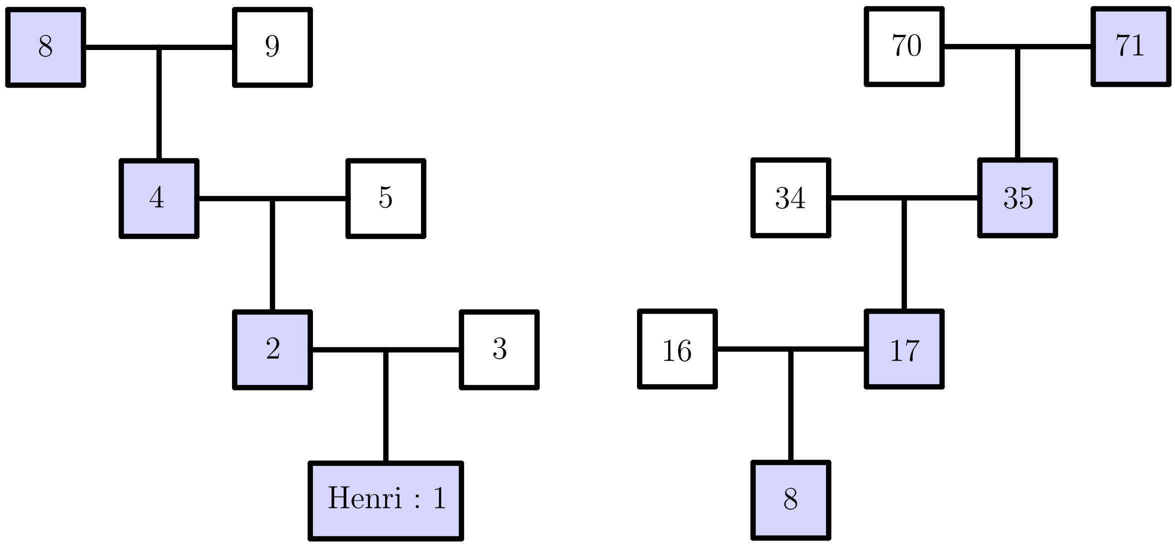
Le père transmet son nom à ses enfants.

Conséquence : si le numéro n s'appelle Chandon, le numéro $2n$ s'appelle également Chandon.
Henri Chandon porte le numéro 1.
La conséquence précédente permet de déduire que tous les numéros de la forme 2^n s'appellent Chandon.

Remarque : il peut y avoir d'autres Chandon dans l'arbre généalogique d'Henri si une des femmes apparaissant s'appelle également Chandon.

Le numéro 71 représente la mère du numéro 35.
Le numéro 35 représente la mère du numéro 17.

Le numéro 17 représente la mère du numéro 8.
$8 = 2^3$, donc 8 s'appelle Chandon.
Le numéro 71 est donc une arrière grand-mère du numéro 8.
Ce numéro 8 étant un arrière grand-père d'Henri.



9 Piscine

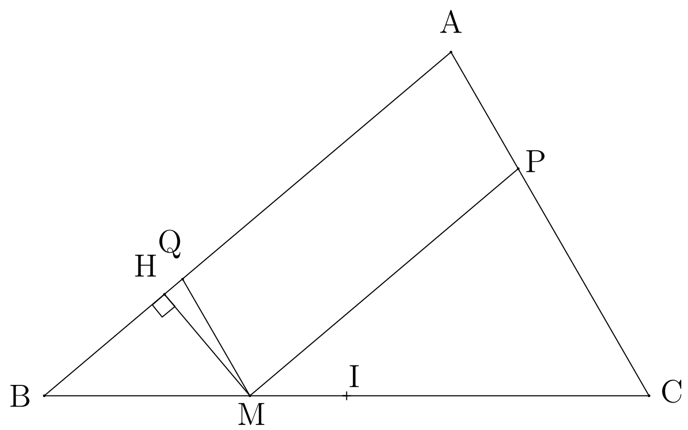
9.1 Énoncé

Au fond d'un camping, il reste une pointe de terrain inoccupée et les propriétaires décident d'y installer une piscine ayant la forme d'un parallélogramme. Pour cela, ils commencent par dessiner la configuration souhaitée à l'échelle 1/1000 sachant que :
• le terrain triangulaire ABC est tel que BC = 80 m, l'angle en B mesure 40 ° et l'angle en C mesure 60 ° ;
• le parallélogramme APMQ représentant la piscine est tel que M est un point de [BC], P un point de [AC] et Q un point de [AB]. Puis, ayant ce schéma sous les yeux, ils se demandent où ils pourraient placer le point M pour que l'aire de la piscine soit maximale.

Dessinez cette configuration et proposez une position du point M telle que l'aire de la piscine soit maximale. Justifiez votre réponse.

9.2 Éléments de solution

Traçons le triangle ABC à l'échelle 1/1000, BC = 8 cm.



9.2.1 Première méthode

Soit H le projeté orthogonal de M sur (AB), on a aire(APMQ) = AQ × MH.
Posons BM = x, x compris entre 0 et 8. Calculons AQ et MH. AQ = AB – BQ

Dans les triangles BMQ et BCA, on a (MQ) parallèle à (AC) donc $\dfrac{\text{BQ}}{\text{BA}} = \dfrac{\text{BM}}{\text{BC}}$,

par suite AQ = AB (1 - $\dfrac{x}{\text{BC}}$), d'autre part : MH = $x \sin(40\,°)$,
on en déduit : aire(APMQ) = AB (1 - $\dfrac{x}{\text{BC}}$) × x × sin(40 °), ce qui s'écrit :

aire(APMQ) = $\dfrac{\text{AB}}{\text{BC}}(8-x) \times x \times \sin(40\,°)$

L'aire de APMQ est maximale lorsque $(8-x) \times x$ est maximale, c'est à dire lorsque $x = 4$.
En effet :$16 - (8-x) \times x = (x-4)^2$ est positif pour tout x de $[0\,;\,8]$.

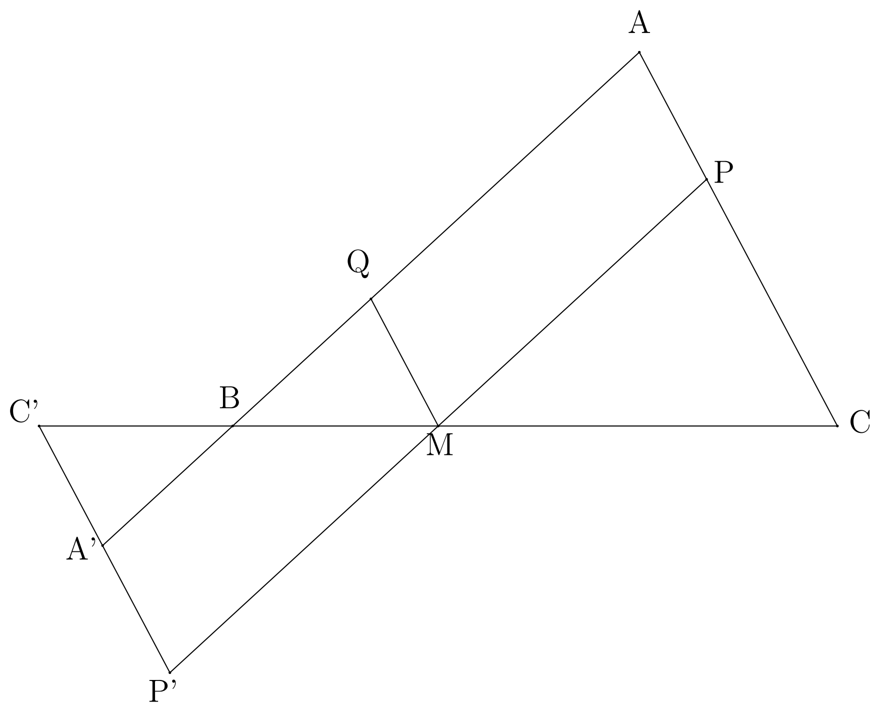
Conclusion : L'aire du parallélogramme APMQ est maximale lorsque M est au milieu de [BC].

9.2.2 Deuxième méthode

Soit C' le symétrique de C par rapport à M, P' le symétrique de P par rapport à M et A' le symétrique de A par rapport à Q. Deux triangles symétriques par rapport à un point ont la même aire.
Ainsi, l'aire du triangle PMC est égale à l'aire du triangle P'MC'.
On a : aire(APMQ) + aire(BQM) + aire(PCM) = aire(ABC).
De plus aire(APMQ) = aire(A'QMP')

d'où aire(A'QMP') + aire(C'A'B) = aire(BQM) + aire(PCM)
soit 2×aire(APMQ) + aire(C'A'B) = aire(ABC).

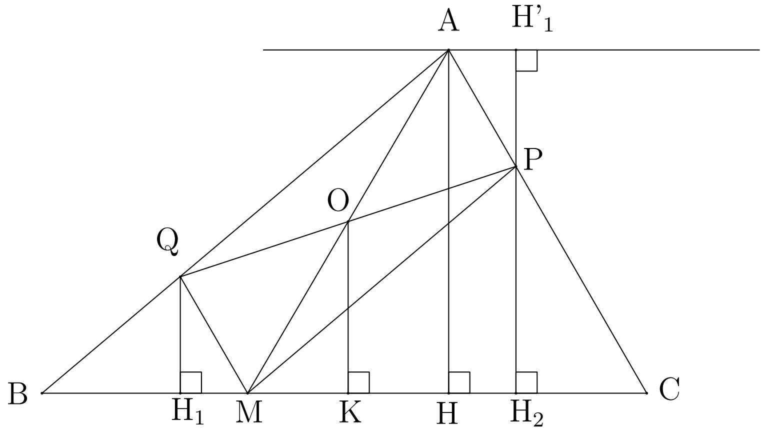
L'aire de APMQ est maximale lorsque l'aire de C'A'B est nulle c'est-à-dire lorsque C' est confondu avec B, c'est-à-dire lorsque M est au milieu de [BC].



Conclusion : L'aire du parallélogramme APMQ est maximale lorsque M est au milieu de [BC].

9.2.3 Troisième méthode

Les points utilisés sont notés sur le dessin.



L'aire de APMQ est maximale lorsque la somme des aires de BMQ et de PMC est minimale.
La droite symétrique de (BC) par rapport à O est la droite qui lui est parallèle et qui passe par A.
L'image de (QH_1) est (PH_2) donc l'image de H_1 est H'_1. P est le symétrique de Q et H'_1 est le symétrique de H_1, on en déduit que $QH_1 = PH'_1$.

On note $AH = h$.
On a $AH = H'_1H_2 = H'_1P + PH_2$ donc $QH_1 + PH_2 = h$.

On pose $\alpha = PH_2 - QH_1$ or $QH_1 + PH_2 = h$, on en déduit que $PH_2 = \dfrac{h+\alpha}{2}$ et que $QH_1 = \dfrac{h-\alpha}{2}$.

Soit β = aire(BQM) + aire(PCM)

$\beta = \dfrac{1}{2}(BM \times QH_1 + MC \times PH_2)$ d'où $\beta = \dfrac{1}{2}$ aire(ABC) + $\dfrac{1}{2}$ (MC - MB) $\times$ (PH_2 - QH_1).

Pour toute position du point M sur [BC], on démontre que (MC - MB) $\times$ (PH_2 - QH_1) est positif, ce qui permet d'en déduire que β est minimale lorsque M est au milieu de [BC].

Conclusion : L'aire du parallélogramme est maximale lorsque le sommet du parallélogramme est au milieu du côté.