RALLYE MATHÉMATIQUE DE FRANCHE-COMTÉ
Éléments de solution de l'épreuve de qualification de 2011

Les classes de Troisième doivent résoudre les problèmes 1 à 6.
Les classes de Seconde doivent résoudre les problèmes 4 à 9.
La classe doit rendre une seule réponse par problème traité **en expliquant la démarche**.

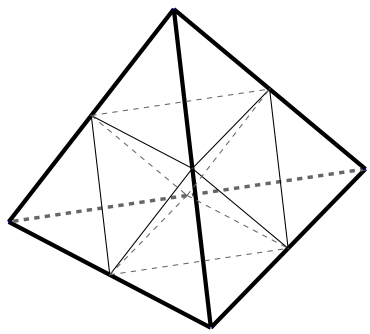
Dans ces éléments de solution, nous proposons, pour chaque problème, au moins une réponse dont la démarche est accessible aux élèves.

1 Tétra-couleur

1.1 Le sujet

Les quatre faces d'un tétraèdre régulier sont partagées en quatre petits triangles équilatéraux. Chacun de ces petits triangles est colorié de telle sorte que deux petits triangles équilatéraux ayant un côté commun n'ont pas la même couleur.

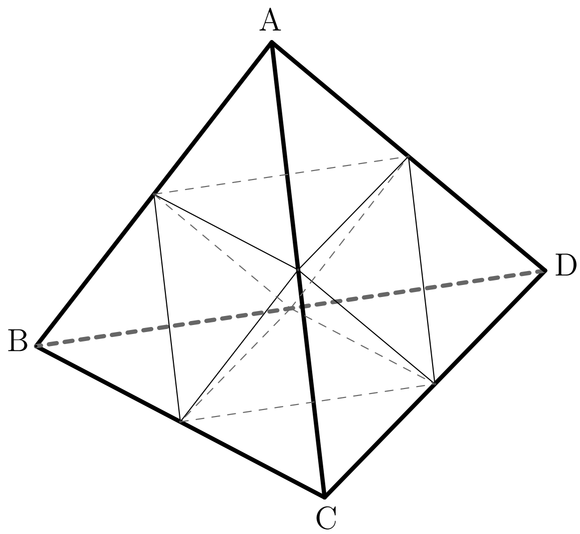
En utilisant le minimum de couleurs, proposez un coloriage possible de ce tétraèdre régulier. Expliquez votre démarche.



Dessin en perspective cavalière de ce tétraèdre régulier.

1.2 Éléments de solution

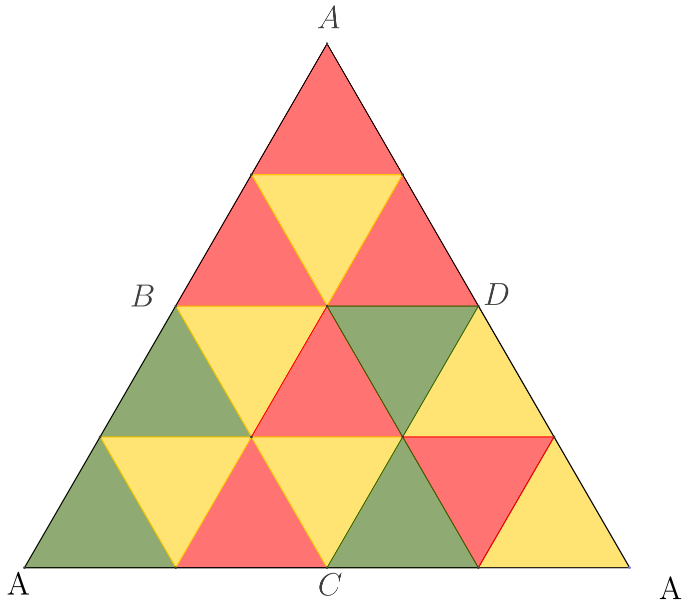
Notons les sommets du tétraèdre A, B, C et D. Observons les trois petits triangles équilatéraux de sommet A. Ils ont chaque fois un côté commun. Il est donc nécessaire de disposer de trois couleurs différentes. Par exemple : le vert, le rouge et le jaune.



En traçant un patron de ce tétraèdre, les faces du tétraèdre sont ABD, BDC, ABC, ADC.

Colorions, sans nouvelle couleur, les petits triangles équilatéraux du pourtour AAA, en respectant la règle imposée. Puis les autres triangles. . . .

Voici une proposition avec trois couleurs :



Trois couleurs différentes sont nécessaires et suffisantes pour colorier ce tétraèdre en respectant les conditions imposées.

2 Partage équitable

2.1 Le sujet

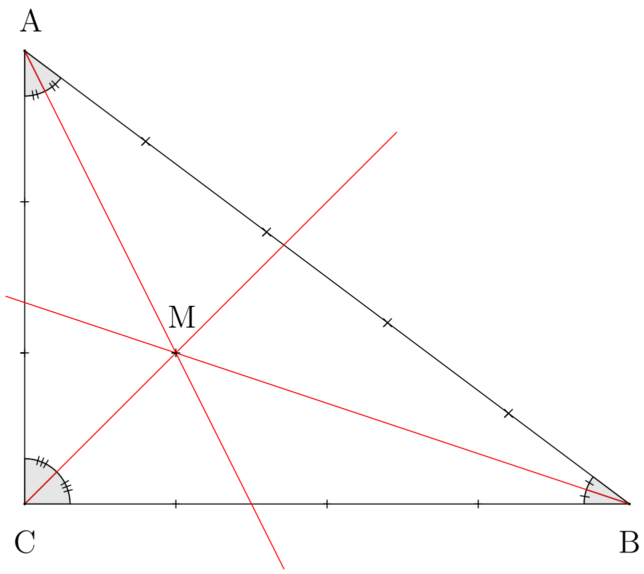
ABC est un triangle tel que AB = 10 cm, BC = 8 cm et AC = 6 cm.
Chacun des trois côtés de ce triangle est partagé en segments de longueur 2 cm.
On place un point M à l'intérieur du triangle, puis on relie M à chaque sommet et à chacun des points placés précédemment. On obtient ainsi douze triangles à l'intérieur du triangle ABC.

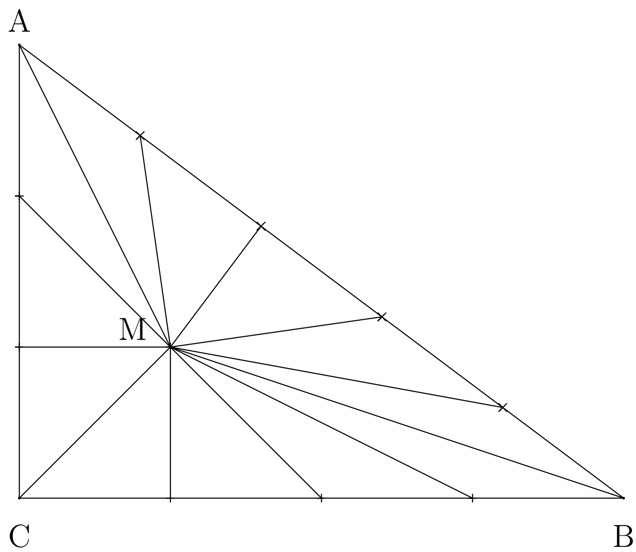
Déterminez la position du point M pour que ces douze triangles aient la même aire. Expliquez votre raisonnement.

2.2 Éléments de solution

2.2.1 Première méthode

Les douze triangles ont la même aire et leurs bases mesurent toutes 2 cm.
On peut donc en déduire que toutes les hauteurs relatives à ces côtés de 2 cm seront égales.
Il faut chercher où placer le point M, intérieur au triangle, qui sera à égale distance des trois côtés du triangle ABC.
La réponse à cette question est connue dès la classe de quatrième :
il convient de tracer les bissectrices des trois angles.



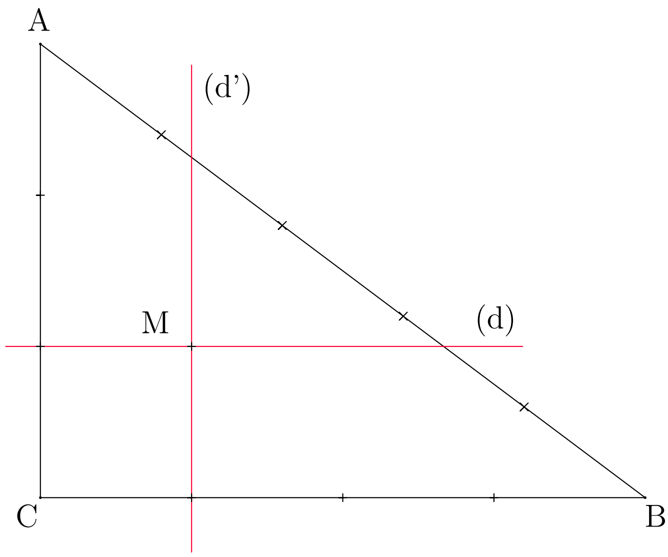


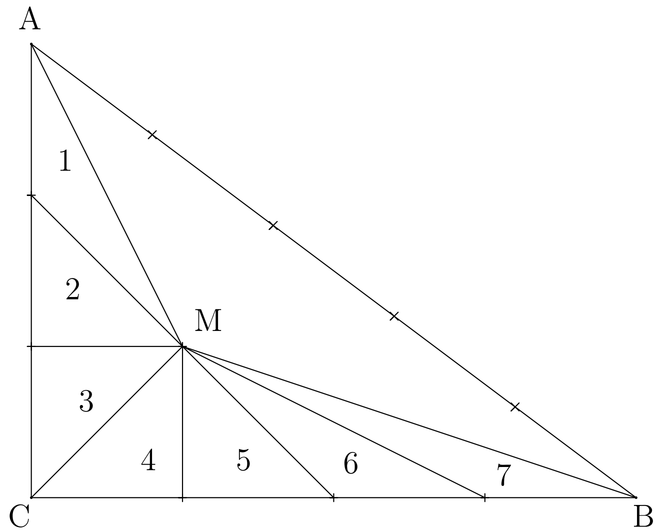
2.2.2 Deuxième méthode

Le triangle ABC est un triangle rectangle en C car $AB^2 = BC^2 + AC^2$.
Nous pouvons donc calculer l'aire de ce triangle : (8 cm $\times$ 6 cm)$\div 2 = 24$ cm^2, puis l'aire de chaque petit triangle : 24 cm^2 $\div$ 12 = 2 cm^2.
Chaque triangle a une aire de 2 cm^2 et une base de 2 cm, donc la hauteur sera de 2 cm.
Il suffit maintenant de tracer la droite parallèle à (BC) et distante de 2cm (notée (d) sur la figure) et celle parallèle à (AC) et distante aussi de 2 cm (notée (d') sur la figure). Le point M sera le point d'intersection des deux droites (d) et (d').

On peut ainsi tracer 7 triangles d'aire 2 cm^2, soit en tout 14 cm^2.
Il reste alors 10 cm^2 pour les 5 triangles restants.

Le côté [AB] étant partagé en 5 segments de même longueur, les derniers triangles auront aussi une aire de 2 cm^2.





3 Zone de broutage

3.1 Le sujet

Un cube en ciment, dont les côtés mesurent un mètre, est placé au milieu d'un grand pré.
À l'un des coins inférieurs de ce cube est fixé un anneau métallique.
À l'extrémité d'une corde fixée à cet anneau est attachée une chèvre naine. La première semaine, la longueur de la corde est de 70 cm, la deuxième semaine la longueur est de 100 cm puis la troisième 150 cm et enfin la quatrième 200 cm.

Déterminez, suivant les semaines, l'aire maximale de la surface disponible pour l'animal.
A l'échelle $\frac{1}{50}$, dessinez le contour de ces surfaces dans les différents cas.

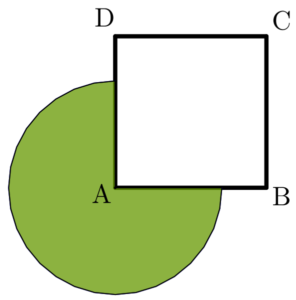
3.2 Éléments de solution

Le dessin est à l'échelle $\frac{1}{50}$; cela signifie que le carré d'un mètre de côté est représenté par le carré ABCD de 2 cm de côté.
L'anneau est fixé en A.

L'aire maximale est obtenue lorsque la corde est tendue.

3.2.1 Premier cas

La longueur de la corde est de 70 cm.
La surface disponible est constituée des $\frac{3}{4}$ de disque de centre A et de rayon 0,7 m.

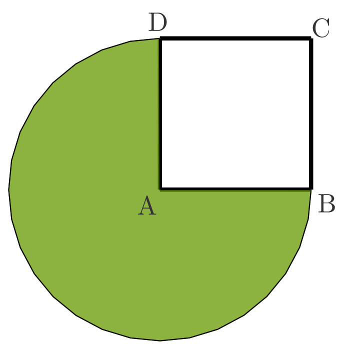


Son aire est égale à :

$\frac{3}{4} \times \pi \times 0,7^2$ m^2.

3.2.2 Deuxième cas

La longueur de la corde est de 1 m.
La surface disponible est constituée des $\frac{3}{4}$ de disque de centre A et de rayon 1.



Son aire est égale à :

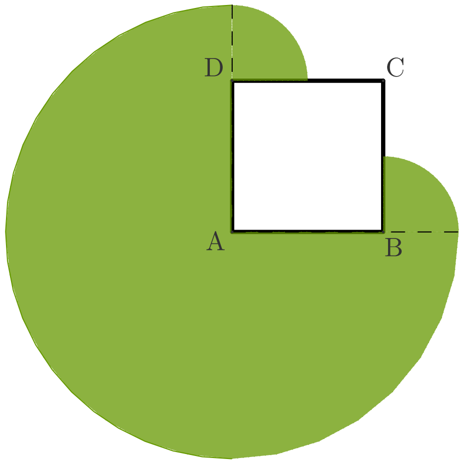
$\frac{3}{4} \times \pi$ m^2.

3.2.3 Troisième cas

La longueur de la corde est de 1,50 m.
La surface disponible est constituée des $\frac{3}{4}$ de disque de centre A et de rayon 1,5 m et des deux quarts de disque de centres B et D et de rayon 0,5 m.

Son aire est égale à :

$$\frac{3}{4}\pi \cdot 1,5^2 + 2 \cdot \frac{1}{4}\pi \cdot 0,5^2 \text{ m}^2 = \frac{29}{16}\pi \text{ m}^2 .$$

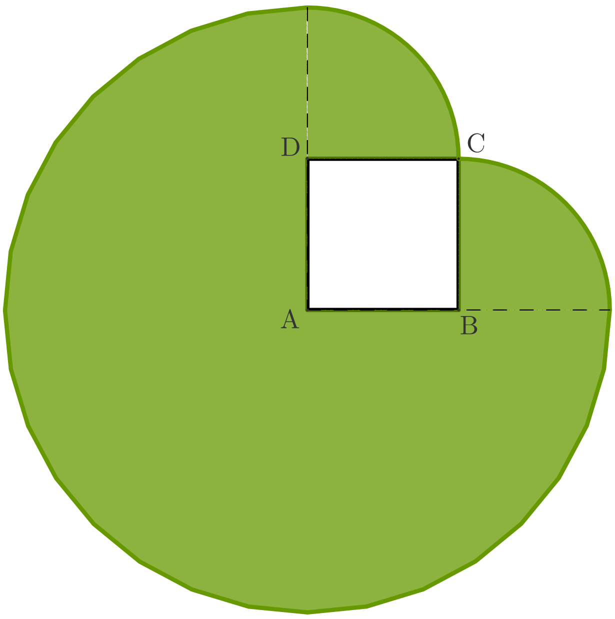


3.2.4 Quatrième cas

La longueur de la corde est de 2 m.
La surface disponible est constituée des $\frac{3}{4}$ de disque de centre A et de rayon 2 m et des deux quarts de disque de centres B et D et de rayon 1 m.

Son aire est égale à :

$$\frac{3}{4}\pi \cdot 2^2 + 2 \cdot \frac{1}{4}\pi \cdot 1^2 \text{ m}^2 = 3,5\pi \text{ m}^2.$$



4 Guirlande

4.1 Le sujet

Marc, directeur d'un parc de loisirs, souhaite réaliser une enseigne lumineuse qu'il fixera sur le mur à côté de l'entrée. Pour cela, il a acheté une guirlande lumineuse de 50 mètres de longueur et il explique à son fils Jules la manière dont il souhaite la poser :
« Au centre du mur, je vais fixer la guirlande sur un segment de 7 centimètres de longueur, puis je vais la tourner de 120 ° par rapport au segment précédent et la fixer sur un segment dont la longueur est égale à celle du précédent augmentée de 14 centimètres, puis la tourner de 120 °, toujours dans le même sens, et répéter cela jusqu'à ce que j'aie fixé toute la guirlande ! »

Pour mieux comprendre ce que Marc va obtenir, Jules dessine, à l'échelle $\frac{1}{5}$, les six premiers segments, s'arrête, réfléchit et annonce à son père :
« Tu vas réaliser une spirale triangulaire et je peux te donner la longueur du dernier segment que tu obtiendras quand tu auras fixé toute la guirlande. »
Marc, surpris, lui répond :
« D'accord, mais cela risque d'être long, non ? »
Il est encore plus étonné lorsque Jules lui rétorque :
« Pas du tout, cela se fait en moins de 10 opérations ! »

Réalisez le dessin de Jules, et expliquez comment il peut, en moins de dix opérations, trouver la longueur du dernier segment. Expliquez votre démarche.

4.2 Éléments de solution

Le premier segment placé a pour longueur 7 cm, la guirlande a pour longueur 1×7 cm, le deuxième segment $7 + 2 \times 7$ cm soit 3×7 cm, la longueur de la guirlande est 4×7 cm, le troisième $3 \times 7 + 2 \times 7$ cm soit 5×7 cm, la longueur est 9×7 cm. Le quatrième $5 \times 7 + 2 \times 7$ cm soit 7×7 cm, la longueur de la guirlande est 16×7 cm ainsi de suite.

Nombre de côtés de la spirale	Longueur du dernier côté, en cm	Longueur totale enroulée, en cm
1	7	$7 = 7 \times 1$
2	$21 = 7 + 2 \times 7 = 3 \times 7$	$28 = 7 + 3 \times 7 = 4 \times 7$
3	$35 = 3 \times 7 + 2 \times 7 = 5 \times 7$	$63 = 4 \times 7 + 5 \times 7 = 9 \times 7$
4	$49 = 5 \times 7 + 2 \times 7 = 7 \times 7$	$112 = 9 \times 7 + 7 \times 7 = 16 \times 7$
5	$63 = 7 \times 7 + 2 \times 7 = 9 \times 7$	$175 = 16 \times 7 + 9 \times 7 = 25 \times 7$
6	$77 = 9 \times 7 + 2 \times 7 = 11 \times 7$	$252 = 25 \times 7 + 11 \times 7 = 36 \times 7$

On peut remarquer que pour n segments tracés la longueur totale de la spirale est égale à $7n^2$ cm.

Ayant une guirlande de 50 mètres, on cherche le nombre de segments entiers qu'il est possible de tracer. $5000 \div 7 \approx 714,28$ donc, on cherche le plus grand entier n tel que $n^2 \leqslant 714$.

$20^2 = 400$ et $30^2 = 900$ donc $20 < n < 30$
$25^2 = 625$ donc $25 < n < 30$
$26^2 = 676$ et $27^2 = 729$ donc $n = 26$

$676 \times 7 = 4732$ et $5000 - 4732 = 268$

Après avoir tracé 26 segments complets, Marc aura fixé 47,32 mètres de guirlande et il lui en restera encore 2,68 mètres ; le dernier segment mesurera 2,68 mètres.

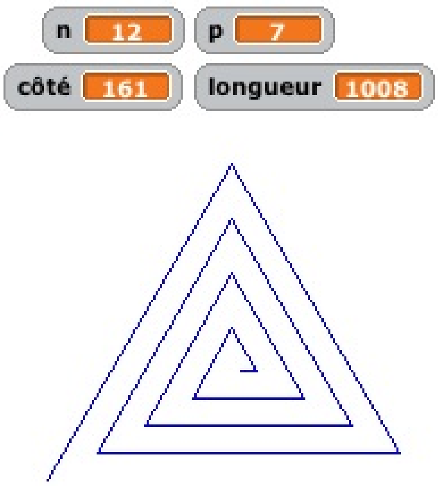
Pour aller plus loin

a. Algorithme permettant de calculer la longueur d'une spirale à n côtés.
La démonstration par récurrence n'est pas accessible à un élève de 3e ou de 2e.
Cependant, on peut imaginer qu'un algorithme permette de vérifier pour différentes valeurs (en particulier pour 20, 30, 25, 26 et 27 segments) que :
si le dernier segment tracé est complet, pour n segments la longueur totale de la spirale est égale à $7n^2$.

<u>Entrées</u>
Saisir n
<u>Initialisations</u>
côté prend la valeur 7
longueur prend la valeur 0
<u>Traitement</u>
Pour i de 1 à n
Ajouter la longueur du côté à la longueur totale
Augmenter la longueur du côté de 14
Calculer $7n^2$
<u>Sortie</u>
Afficher la longueur totale enroulée
Afficher $7n^2$

Le programme ci-dessous, écrit avec **Scratch**, permet en plus de dessiner la spirale et d'afficher la longueur du dernier côté, mais n'affiche pas $7n^2$.
La variable p permet de fixer la longueur du premier côté et peut ainsi être modifiée.
Les indications de taille et de coordonnées en début et fin d'algorithme permettent de dessiner la spirale centrée à l'écran sans être gêné par le chat. . .

Guirlande à 12 côtés



Avec ALGOBOX

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  p EST_DU_TYPE NOMBRE
  c EST_DU_TYPE NOMBRE
  l EST_DU_TYPE NOMBRE
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  p PREND_LA_VALEUR 7
  c PREND_LA_VALEUR p
  l PREND_LA_VALEUR 0
  i PREND_LA_VALEUR 1
  TANT_QUE (i<=n) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    i PREND_LA_VALEUR i+1
    l PREND_LA_VALEUR l + c
    c PREND_LA_VALEUR c +2*p
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER l
FIN_ALGORITHME
```

b. Autre algorithme

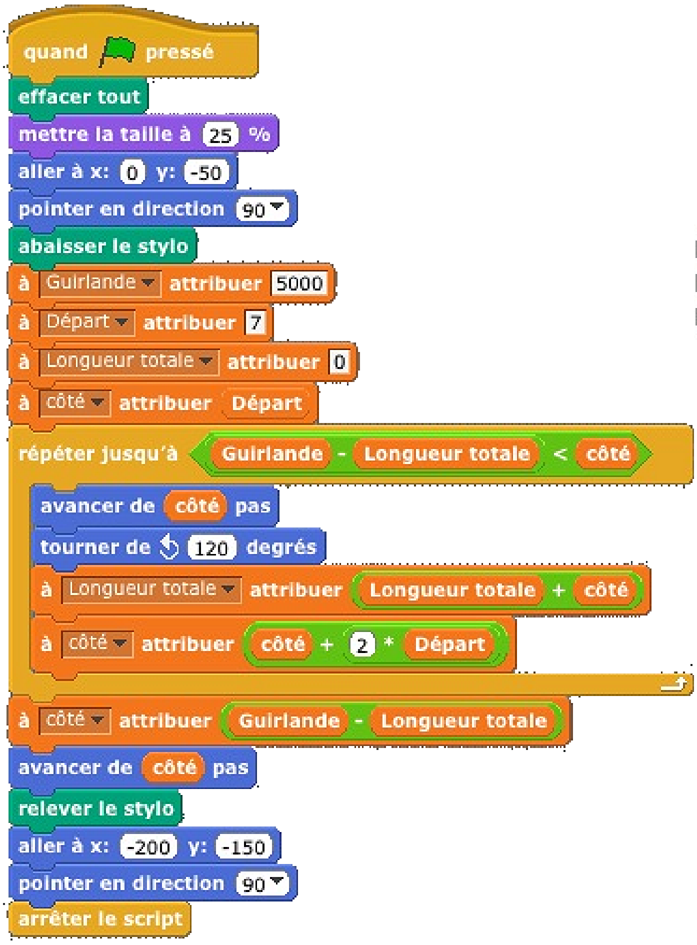
On peut également concevoir un autre algorithme permettant, lorsqu'on connaît la longueur de la guirlande (*guirlande*) et la longueur du premier côté (*départ*), de connaître la longueur du dernier côté (*côté*) de la spirale.

<u>Entrées</u>
Saisir *guirlande*
Saisir *départ*
<u>Initialisations</u>
côté prend la valeur *départ*
longueur enroulée prend la valeur 0
<u>Traitement</u>

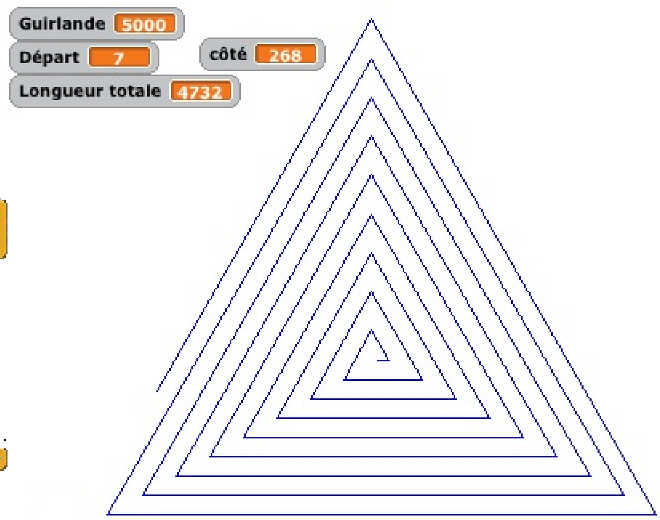
Tant qu'il reste assez long de guirlande pour faire un côté complet.
    Augmenter la *longueur enroulée* de la longueur du dernier côté tracé.
    Augmenter la longueur du *côté* du double du premier côté.

Calculer la longueur de guirlande restante pour le dernier côté.
<u>Sortie</u>
Afficher *guirlande*
Afficher *départ*
Afficher *côté*

Avec SCRATCH



Le résultat à l'écran



Avec ALGOBOX

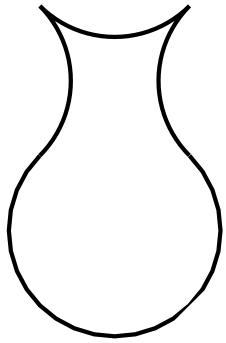
```
VARIABLES
  p EST_DU_TYPE NOMBRE
  c EST_DU_TYPE NOMBRE
  l EST_DU_TYPE NOMBRE
  g EST_DU_TYPE NOMBRE
  r EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE g
  p PREND_LA_VALEUR 7
  c PREND_LA_VALEUR p
  l PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (g-l>=c) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    l PREND_LA_VALEUR l+c
    c PREND_LA_VALEUR c+2*p
    r PREND_LA_VALEUR g-l
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER r
FIN_ALGORITHME
```

5 Amphore

5.1 Le sujet

Le contour de cette figure, dont la forme est celle d'une amphore, est composé de six quarts de cercle de même rayon.

En découpant judicieusement cette surface, réalisez un carré dont l'aire est égale à l'aire de cette figure. Expliquez.



5.2 Éléments de solutions

Cette figure est composée de six quarts de cercle de même rayon r.

Il est possible de préciser qu'elle est composée des $\frac{3}{4}$ d'un cercle C de rayon r et de trois quarts de cercle de rayon r ; de plus, cette figure admet un axe de symétrie.

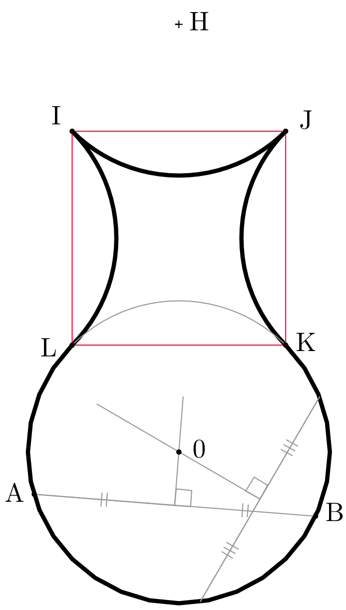
On peut déterminer le centre du cercle C.

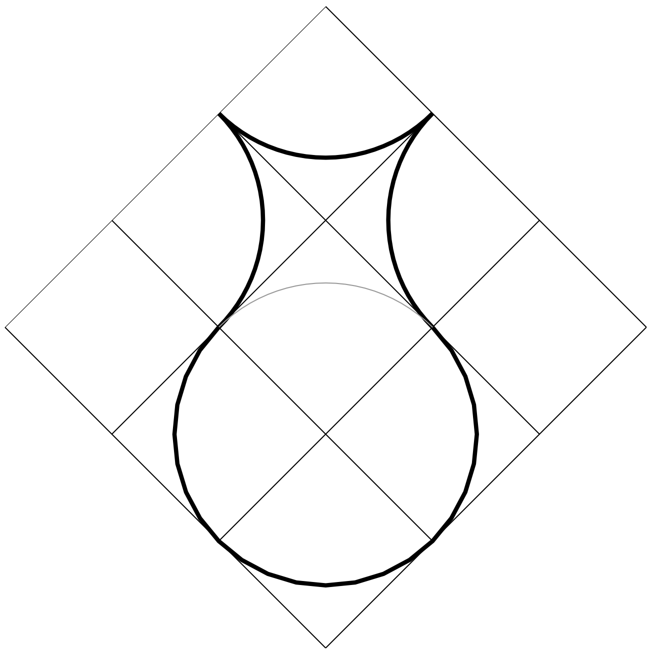
Pour cela, plaçons deux points A et B sur C et traçons la médiatrice de [AB]. On procède de la même manière avec deux autres points de C. Le point d'intersection O des deux médiatrices est le centre du cercle C et son rayon r est OA.

Traçons le cercle de centre O et de rayon r.

La figure peut être complétée en plaçant le point H, centre de l'arc d'extrémités I et J, de rayon r puis le carré IJKL.

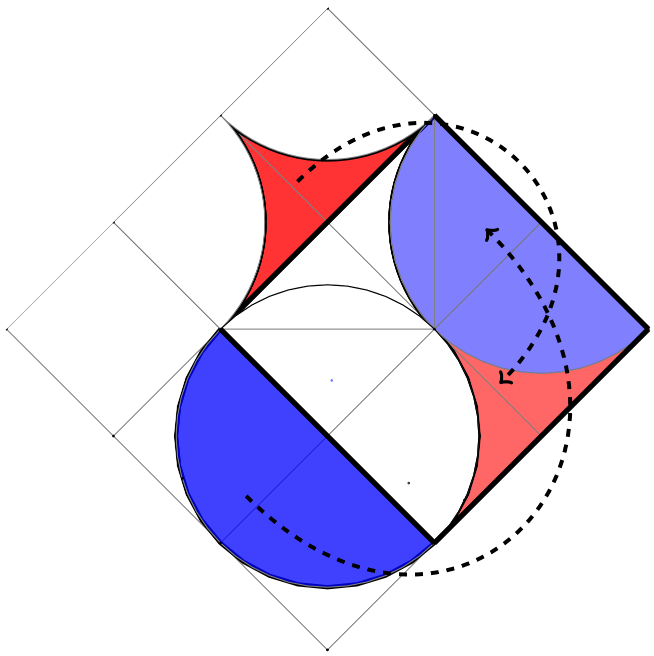
L'amphore peut alors se situer dans un réseau carré.



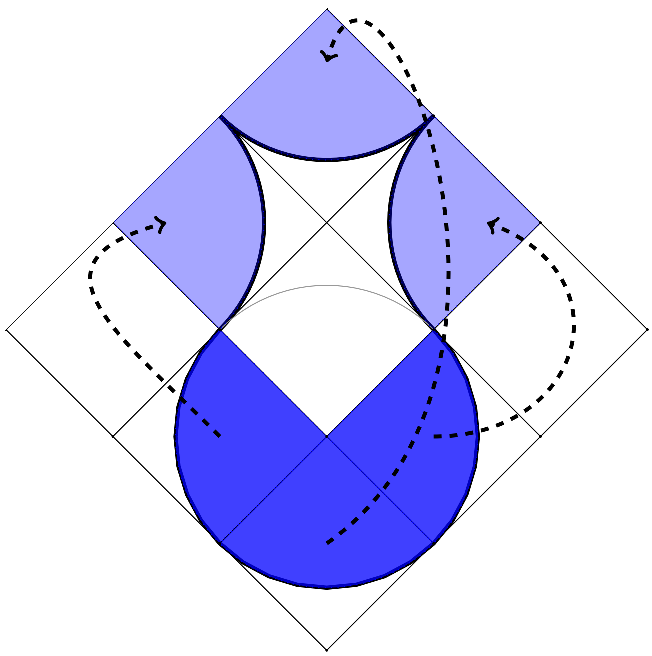


Voici trois découpages possibles :

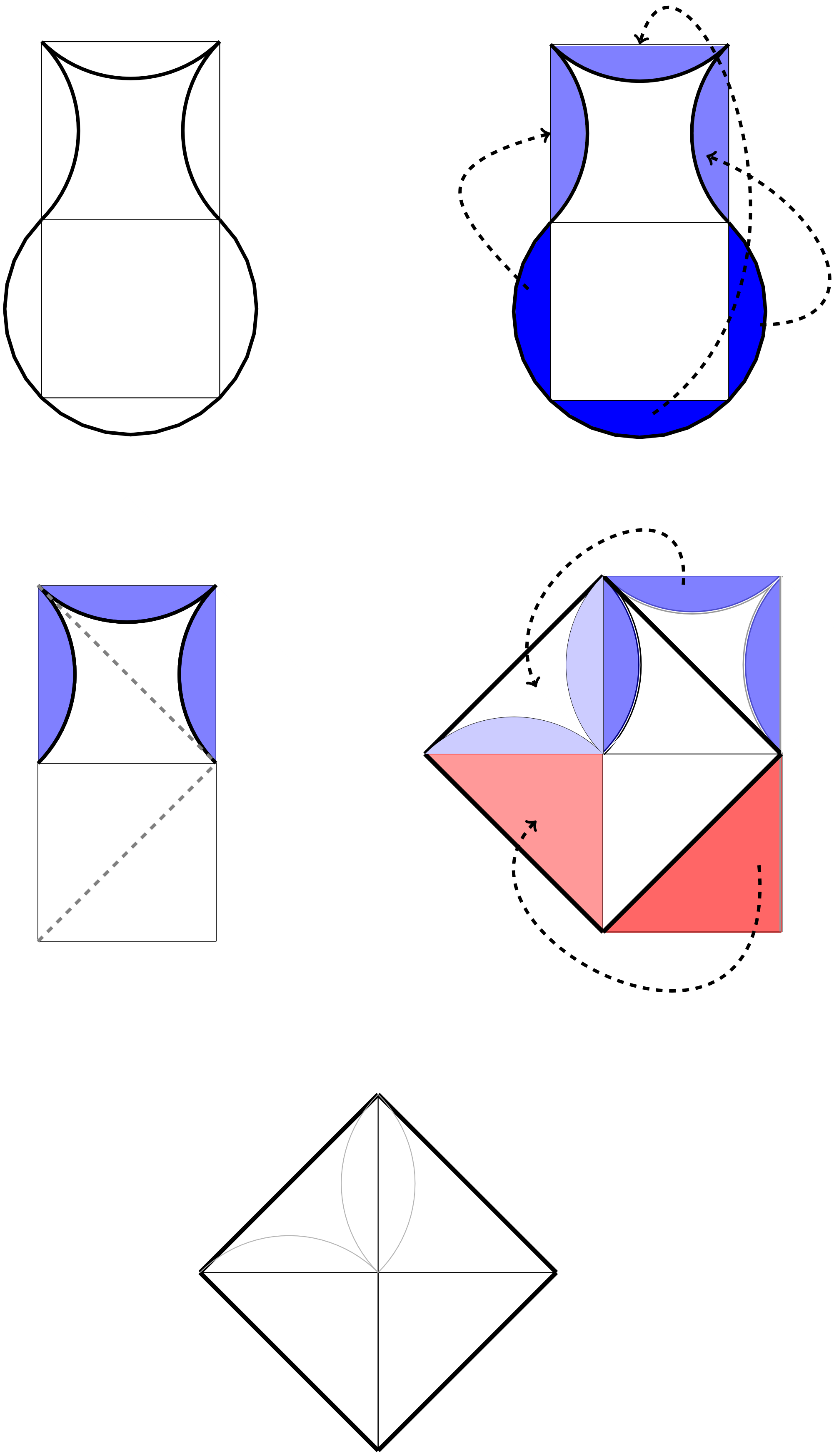
Premier découpage



Deuxième découpage



Troisième découpage

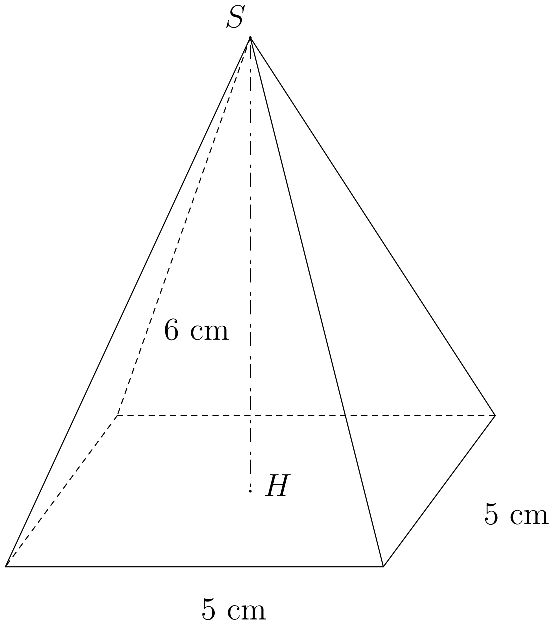


6 Pyramides

6.1 Le sujet

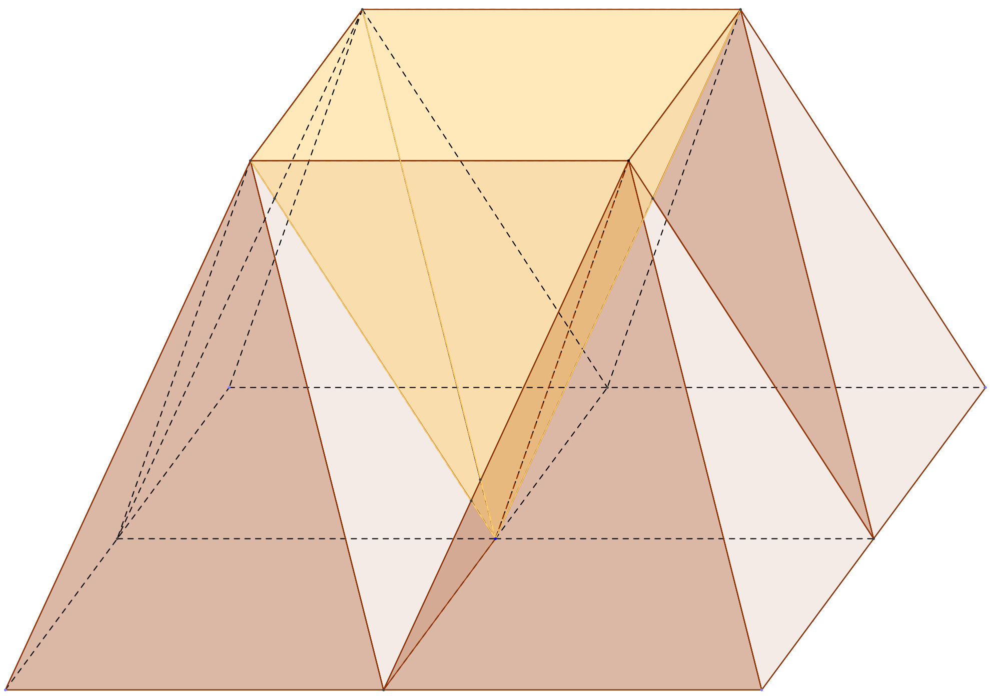
Cinq élèves doivent fabriquer chacun une pyramide régulière à base carrée.
Chaque côté de la base mesure 5 cm et chaque hauteur mesure 6 cm.
Leur travail terminé, Louis dispose quatre pyramides sur leur base de manière à former un carré de 10 cm de côté.
Puis il prend la dernière, la retourne et la pose, sommet en bas dans l'espace laissé libre.
« Il reste quatre espaces vides, identiques, à remplir afin d'obtenir un tronc de pyramide ! » dit-il.

A vous maintenant de réaliser un patron d'un de ces espaces vides.
Donnez les différentes étapes de votre raisonnement.

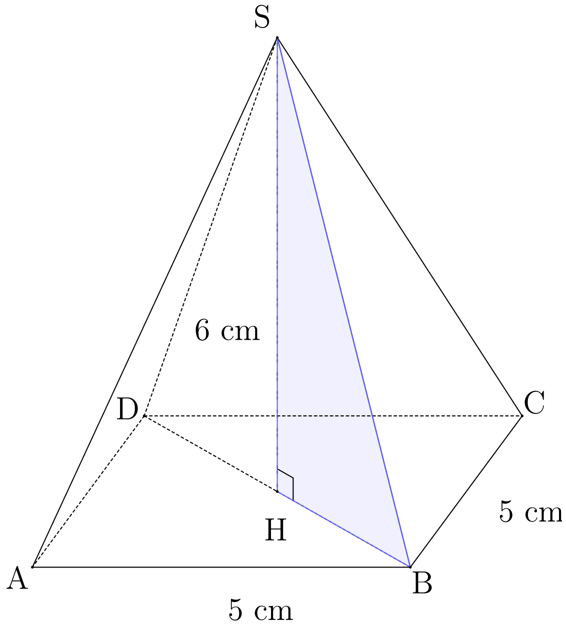


6.2 Éléments de solution

Voici l'agencement des 5 pyramides.



Il s'agit tout d'abord de calculer la longueur de l'arête [SB].
Pour cela, nous utilisons le théorème de Pythagore, deux fois de suite :



a. Dans le triangle DAB, rectangle en A :

   $DB^2 = 5^2 + 5^2 = 50$ d'où DB= $\sqrt{50}$.

   Ceci nous permet de calculer la longueur de la demi-diagonale [HB] :

   HB= $\sqrt{50} \div 2 \approx 3,5$

b. Dans le triangle SHB, rectangle en H :

   $SB^2 = 6^2 + (\frac{\sqrt{50}}{2})^2 = 48,5$

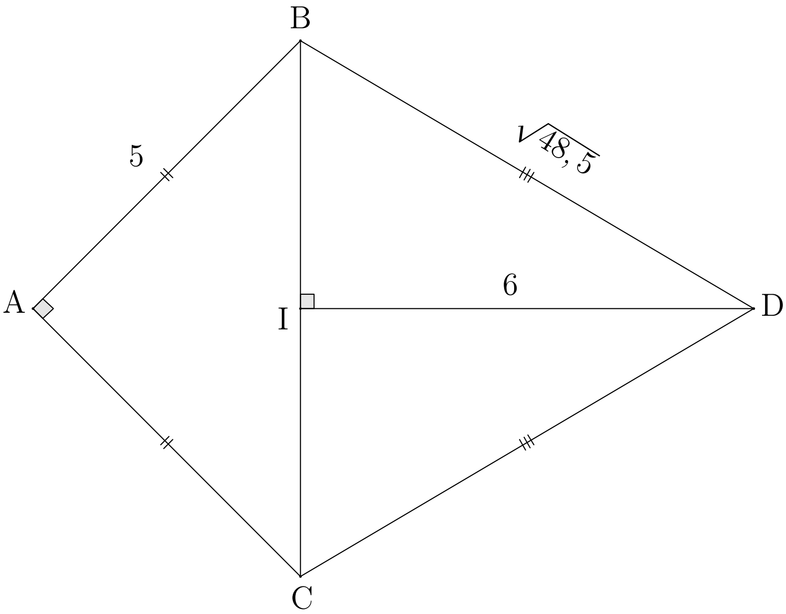
   d'où SB= $\sqrt{48,5} \approx 7$.

   Les pyramides régulières ont ainsi quatre arêtes de base de 5 cm et quatre arêtes latérales de longueur $\sqrt{48,5}$ cm.

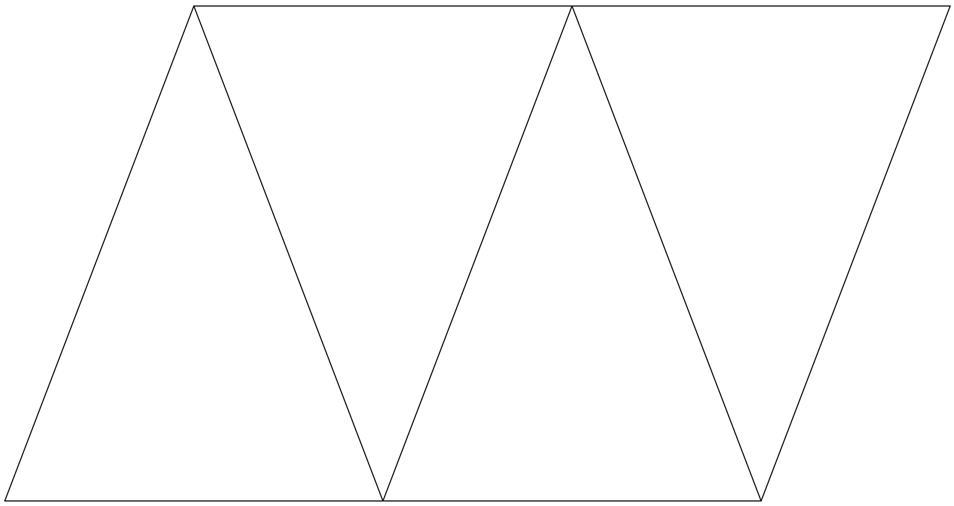
Le patron demandé est constitué de quatre triangles isocèles de mêmes dimensions.
La base d'un triangle isocèle a pour longueur 5 cm et ses côtés $\sqrt{48,5}$ cm.

Figure permettant d'obtenir un segment de longueur $\sqrt{48,5}$ cm.

Traçons un triangle rectangle isocèle de côté 5 cm, son hypoténuse a pour longueur $5\sqrt{2}$.
Puis un des triangles rectangles de côtés $5\frac{\sqrt{2}}{2}$ et 6 cm, son hypoténuse mesure $\sqrt{48,5}$ cm.

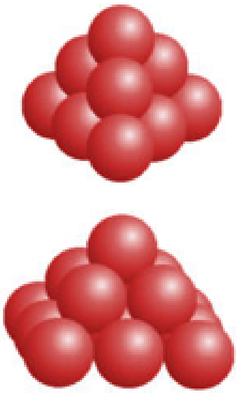


Voici un exemple de patron :



7 Garderie « Pyramide »

7.1 le sujet



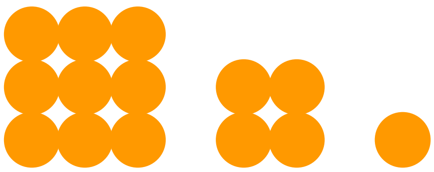
Une dispute éclate à la garderie « Pyramide » entre Victor et Fleur.

Fleur : « Victor m'a volé des boules rouges ! »
Victor : « Je ne t'en ai pris qu'une ! »
Fleur : « Oui mais avant je pouvais les empiler pour former un tétraèdre ! » (Suivant le modèle ci-contre).
Victor : « Tu en as encore suffisamment pour faire une pyramide à base carrée ! » (Suivant le modèle ci-contre).

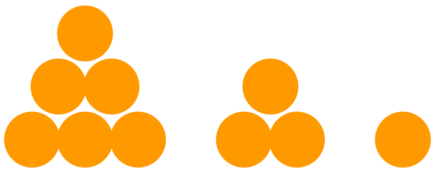
Sachant que Fleur possède moins de 100 boules, combien lui en reste-t-il exactement ?

7.2 Éléments de solution

Les trois premiers niveaux pour une pyramide à base carrée.



Les trois premiers niveaux pour une pyramide à base triangulaire.



Tableaux donnant le nombre de boules dans chacun des cas.

Pyramides à base carrée

Nombre de niveaux	1	2	3	4	5	6	7
Nombre par niveau	1	4	9	16	25	36	49
Nombre total	1	5	14	30	55	91	140

Pyramides à base triangulaire

Nombre de niveaux	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre par niveau	1	3	6	10	15	21	28	36
Nombre total	1	4	10	20	35	56	84	120

En comparant les dernières lignes de chacun des deux tableaux, on constate que pour un nombre de boules inférieur à 100, les seuls nombres qui diffèrent d'une unité sont 55 et 56.

Conclusion : La différence d'une unité entre la pyramide à base triangulaire et la pyramide à base carrée est obtenue lorsqu'il reste à Fleur 55 boules.

8 Quinté

8.1 Le sujet

Max et Mike ont joué aux courses et ont décidé de se retrouver à l'hippodrome pour vivre le quinté en direct. Mais Max arrive en retard et manque l'arrivée de la course. Son ami lui annonce qu'ils ont bien trouvé les cinq chevaux gagnants, mais dans le désordre !
Mike, grand joueur devant l'Eternel, propose à Max le défi suivant : deviner l'ordre du quinté en faisant au maximum 10 propositions auxquelles Mike répondra par Vrai ou Faux.
Si Max trouve l'ordre d'arrivée des chevaux, il empochera les trois quarts de leur gain, sinon il n'en aura qu'un quart !

Max accepte et se concentre...
Il se souvient qu'ils ont parié sur Salsa, Samba, Samoa, Sherwood et Sunset. Il sait que Samba et Salsa sont montés par des jockeys portant une casaque bleue, que le jockey de Samoa porte une casaque rouge et que les jockeys de Sherwood et de Sunset portent une casaque verte.
Max fait six propositions et annonce alors le quinté dans l'ordre !
Mike est déçu, mais reconnaît sa défaite et tous deux repartent bons amis récupérer leur gain !

Voici les six propositions de Max et les réponses de Mike :

a. Samba n'est pas arrivé le dernier : VRAI
b. Samoa est arrivé après Salsa : FAUX
c. Tous les chevaux sont arrivés avant Sunset : FAUX
d. Il existe au moins deux chevaux qui arrivent après Salsa : VRAI
e. Il existe exactement deux casaques bleues dans le tiercé gagnant : FAUX
f. Tous les chevaux arrivés après Sunset ont une couleur différente : VRAI

Avec ces renseignements, saurez-vous retrouver le quinté dans l'ordre ? Expliquez.

8.2 Éléments de solution

« Il existe au moins deux chevaux qui arrivent après Salsa» est une proposition vraie, donc Salsa ne peut pas arriver en 4^e ou en 5^e position.
Par conséquent, Salsa est dans le tiercé gagnant.
Salsa et Samba sont les seuls chevaux montés par un jockey portant une casaque bleue.

« Il existe exactement deux casaques bleues dans le tiercé gagnant » est une proposition fausse donc Samba ne peut pas arriver dans le tiercé gagnant.

« Samba n'est pas arrivé le dernier » est une proposition vraie donc Samba ne peut pas occuper la position 5.
Samba, casaque bleue, est donc arrivé en 4^e position.

« Samoa est arrivé après Salsa » est une proposition fausse et Salsa est dans le tiercé gagnant donc Samoa est dans le tiercé gagnant.

« Tous les chevaux sont arrivés avant Sunset » est une proposition fausse donc il y a au moins un cheval arrivé après Sunset donc Sunset ne peut pas arriver en position 5.
Il ne peut pas être arrivé 4^e, donc il est lui aussi dans le tiercé gagnant.

On a donc le tiercé dans le désordre et on connaît le 4^e.

Sherwood , casaque verte, est donc arrivé en 5^e position.

« Samoa est arrivé après Salsa » est une proposition fausse donc Salsa ne peut pas occuper la 1^{re} position.
Si Salsa est arrivé en 3^e position, alors Sunset sera en 1^{re} ou en 2^e position, ce qui est en contradiction avec la proposition vraie : « Tous les chevaux arrivés après Sunset ont une couleur différente » donc Salsa n'est pas arrivé en 3^e position.

Salsa, casaque bleue, est donc arrivé en 2^e position.

« Samoa est arrivé après Salsa » est une proposition fausse.
Samoa, casaque rouge, est donc arrivé en tête et Sunset, casaque verte, en 3^e position.

Conclusion : Le quinté dans l'ordre est donc Samoa, Salsa, Sunset, Samba et Sherwood.

9 Partage triangulaire

9.1 Le sujet

Dessinez un hexagone convexe dont les longueurs des côtés, en centimètre, sont les entiers de un à six. Céline découpe cet hexagone en triangles dont les trois sommets sont des sommets de celui-ci. Ainsi elle réalise un puzzle de l'hexagone.

Déterminez le nombre de puzzles différents qu'il lui est possible de réaliser et dessinez-les.

Hexagone convexe : tout segment, joignant deux points quelconques pris à l'intérieur de l'hexagone, est à l'intérieur de l'hexagone.

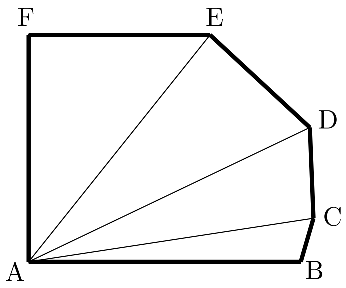
9.2 Éléments de solution

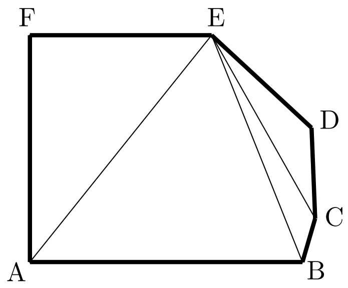
Problème de dénombrement.

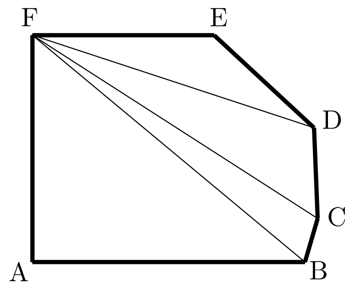
Il s'agit de tracer, convenablement, trois segments reliant deux sommets de l'hexagone pour partager cet hexagone par des triangles.
On peut classer les différentes figures en trois catégories :

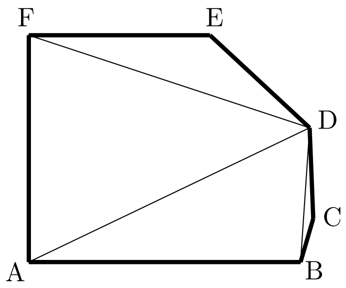
- D'un sommet de l'hexagone part trois segments. Triangles en éventail. On en compte six.
- D'un sommet de l'hexagone part deux segments. Triangles « intérieur ». On en compte deux.
- D'un sommet de l'hexagone part un ou deux segments. Triangles en « Z ». On en compte six.

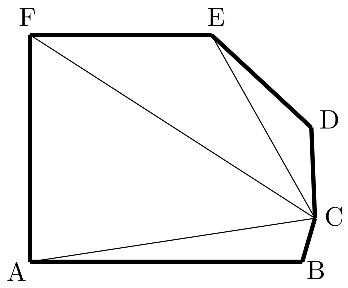
Il existe quatorze puzzles différents de cet hexagone.

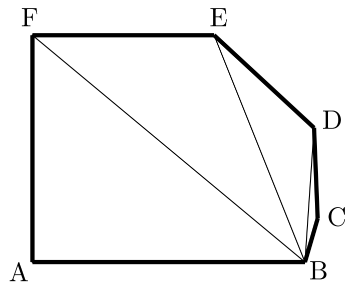


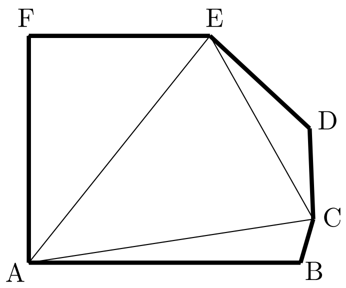


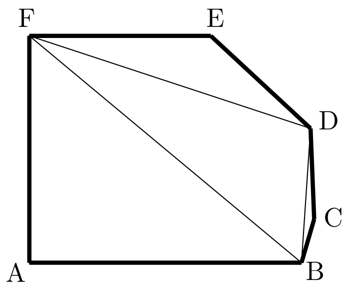


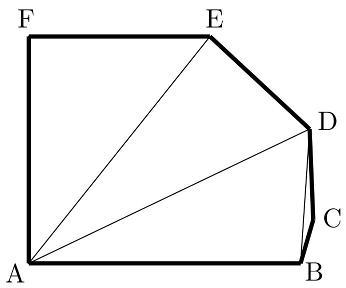


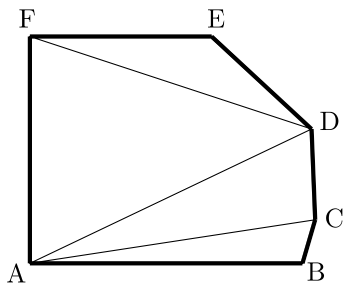


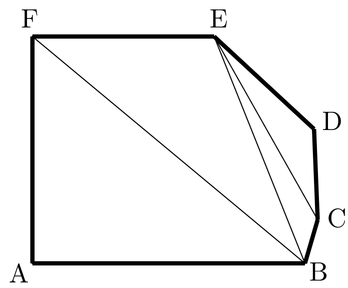


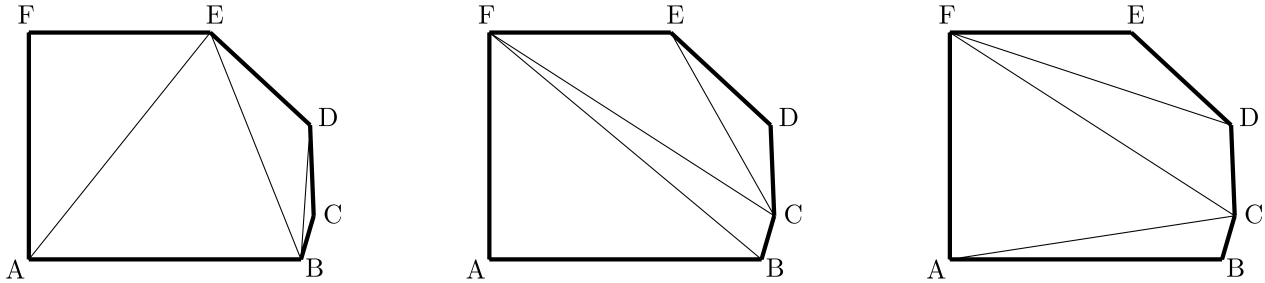











F
E
D
C
A
B
F
E
D
C
A
B
F
E
D
C
A
B