RALLYE MATHÉMATIQUE DE FRANCHE-COMTÉ 2014
Éléments de solution de la finale 2014

Les classes de Troisième doivent résoudre les problèmes 1 à 6.

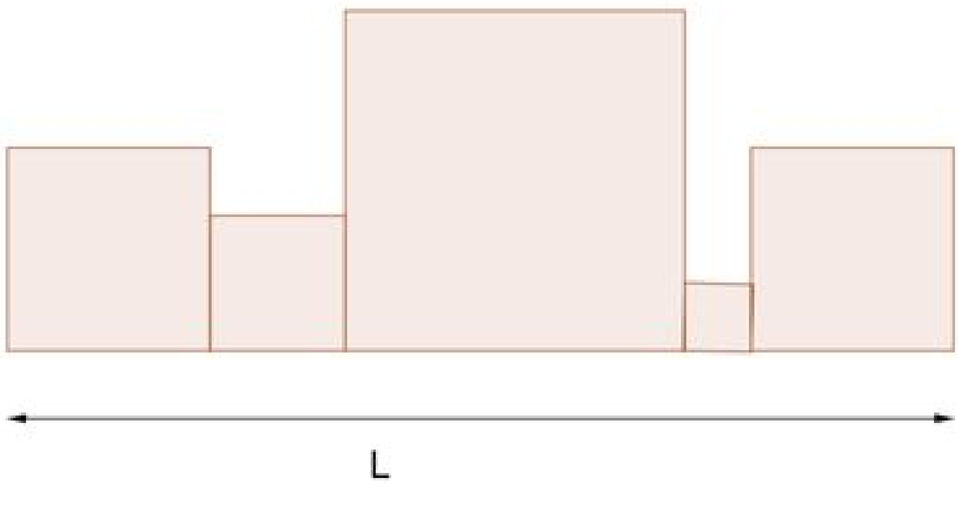
Les classes de Seconde doivent résoudre les problèmes 4 à 9.

La classe doit rendre une seule réponse par problème traité **en expliquant la démarche**.

---

1 – Les carrés de Anne

Au Vietnam, Anne se promène dans des rues où les maisons sont regroupées par bloc de cinq.
Les façades de ces maisons ont toutes la forme de carrés mais il n'y a pas plus de deux façades de même dimension. La somme des aires des cinq façades vaut 243 m^2.
Anne vient de lire dans son guide que les impôts locaux sont payés en fonction de la longueur de ces blocs donnant sur la rue.



Quelles sont les dimensions des cinq façades qui correspondent aux impôts les moins chers ?

Donner deux solutions différentes.

Éléments de solutions

Parmi toutes les solutions qui existent, on s'intéresse aux solutions entières.

On recherche cinq nombres entiers dont la somme des carrés vaut 143 , dont au plus deux sont égaux.

La recherche s'est faite à partir du carré le plus grand.

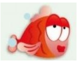
					Longueur L
15^2	3^2	2^2	2^2	1^2	23
14^2	6^2	3^2	1^2	1^2	25
14^2	5^2	3^2	3^2	2^2	27
13^2	6^2	5^2	3^2	2^2	29
12^2	9^2	4^2	1^2	1^2	27
12^2	8^2	5^2	3^2	1^2	29
12^2	7^2	5^2	4^2	3^2	31
11^2	10^2	3^2	3^2	2^2	29
11^2	9^2	6^2	2^2	1^2	29
11^2	7^2	6^2	6^2	1^2	31
10^2	9^2	7^2	3^2	2^2	31
10^2	9^2	6^2	5^2	1^2	31
10^2	7^2	7^2	6^2	3^2	33
9^2	9^2	8^2	4^2	1^2	31
9^2	8^2	8^2	5^2	3^2	33

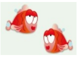
Les longueurs L les plus petites sont 23 et 25.
Elles correspondent aux carrés de côtés 15 - 3 - 2 - 2 - 1 et 14 - 6 - 3 - 1 - 1

2 – Pensée franc-comtoise

Deux mathématiciens francs-comtois, Monsieur Quatre et Monsieur Cinq, se posent des questions sur deux nombres "bien du coin" :

$$4^{25} \times 5^{90} \quad \text{et} \quad 4^{70} \times 5^{39}$$

 **Par combien de zéros se terminent-ils ?**

 **Quel est leur premier chiffre non nul ?**

Éléments de solutions

$4^{25} \times 5^{90} = 2^{50} \times 5^{50+40} = 10^{50} \times 5^{40}$

Le premier nombre a donc **50** zéros et le premier chiffre non nul est un **5** car toutes les puissances entières positives de 5 se terminent par un 5.

$4^{70} \times 5^{39} = 2^{140} \times 5^{39} = 2^{101+39} \times 5^{39} = 10^{39} \times 2^{101}$

Le deuxième nombre a donc **39** zéros.
Pour le premier chiffre non nul, nous observons les puissances de 2 :

$2^1 = \mathbf{2}$	$2^2 = \mathbf{4}$	$2^3 = \mathbf{8}$	$2^4 = 1\mathbf{6}$
$2^5 = 3\mathbf{2}$	$2^6 = 6\mathbf{4}$	$2^7 = 12\mathbf{8}$	$2^8 = 25\mathbf{6}$
$2^9 = 51\mathbf{2}$	$2^{10} = 102\mathbf{4}$	$2^{11} = 204\mathbf{8}$	$2^{12} = 409\mathbf{6} \dots$

Il faut alors effectuer la division euclidienne de l'exposant par **4** :

- si le reste est 0, il se terminera par 6,
- si le reste est 1, il se terminera par 2,
- si le reste est 2, il se terminera par 4

- et s'il est 3, il se terminera par 8.

Ici $101 = 4 \times 25 + 1$ donc le premier chiffre non nul du deuxième nombre est **2**.

3 – Ah, les maths

C'est sous ce titre que circule sur Internet le document ci-dessous :

Pointure de chaussures...

>>>>>>>> IMPRESSIONNANT !

Prends ta calculatrice,
mets **ta pointure de chaussures**
et multiplie par 5,
rajoute 50,
multiplie le total par 20,
rajoute 1014,
puis soustrais **ton année de naissance.**

Maintenant tu as un nombre avec 4 chiffres :
Les 2 premiers te donnent ta pointure de chaussures
Les 2 derniers te donnent l' âge que tu as (ou que tu auras) durant l'année 2014 !!!!

Expliquer le "prodige" décrit ci-dessus.

En fait, il y a au moins une personne en France pour laquelle le "truc" ci-dessus ne marche pas. **Donner l'année de naissance et la pointure d'une telle personne.**

Éléments de solutions

1. Soit $x = \overline{ab}$ la pointure (c'est un nombre entier à deux chiffres où a est le chiffre des dizaines et b celui des unités.
   On note y l'année de naissance.

On multiplie par 5 :	$5x$
On ajoute 50 :	$5x + 50$
On multiplie par 20	$100x + 1000$
On ajoute 1014	$100x + 2014$
On soustrait l'année de naissance	$100x + (2014 - y)$

   $100x$ s'écrit dans le système décimal $x = \overline{ab00}$.
   $2014 - y$ représente l'âge. Si c'est un nombre à deux chiffres d'écriture décimale $x = \overline{cd}$, le nombre calculé a pour écriture décimale $x = \overline{abcd}$ et la conclusion du " prodige " est correcte.

2. Le "truc" ne marche pas si l'âge est un nombre à 3 chiffres.
   par exemple, Pépé est né en 1912 et chausse du 41.
   Le nombre calculé est alors $4100 + 2014 - 1912 = 4202$.
   La conclusion serait deux ans et une pointure de 42 !

4 – La piscine de Monsieur Lambda

A l'arrivée de l'été, Monsieur Lambda souhaite mettre en eau sa piscine.
Elle est ronde, a un diamètre de $3,50$ mètres et une hauteur de $1,20$ mètre.

Pour la remplir, il dispose de trois tuyaux d'arrosage branchés sur trois robinets différents du même réseau.
Lorsqu'il utilise un seul tuyau, celui-ci a un débit de 12 litres en 30 secondes.
Lorsqu'il ouvre plusieurs tuyaux branchés sur le même réseau, le débit des tuyaux ouverts baisse et chaque tuyau a le même débit.
Au branchement d'un deuxième tuyau, il constate sur le premier tuyau une perte de 30% du débit précédent.
Au branchement du troisième tuyau, il constate toujours sur le premier tuyau une perte de 20% du débit précédent.
Il commence le montage à 10h. Il ne pourra commencer la mise en eau qu'une fois le montage de la structure terminé. Cela lui prend trois quarts d'heure.

A quelle heure Monsieur Lambda terminera-t-il de remplir sa piscine sachant qu'il utilise tous ses tuyaux et qu'il veut atteindre le niveau maximum autorisé qui est de 90 centimètres ?

Éléments de solutions

Calcul du volume d'eau nécessaire pour remplir la piscine : $V = \pi \times \dfrac{3,5^2}{4} \times 0,9 = 2,75625\pi \approx 8,659\ \text{m}^3$ soit $2756,25\pi$ litres donc environ 9659 litres.

Débit avec un tuyau : 12 litres en 30 secondes soit 24 litres par minute.
Débit avec 2 tuyaux :$2 \times 24 \times 0,7 = 33,6$ litres par minute.
Débit avec 3 tuyaux : $3 \times \dfrac{33,6}{2} \times 0,8 = 40,32$ litres par minute.

$\dfrac{2756,25\pi}{40,32} \approx 215$ minutes.

$215 = 60 \times 3 + 35$ donc 215 min = 3h35min.

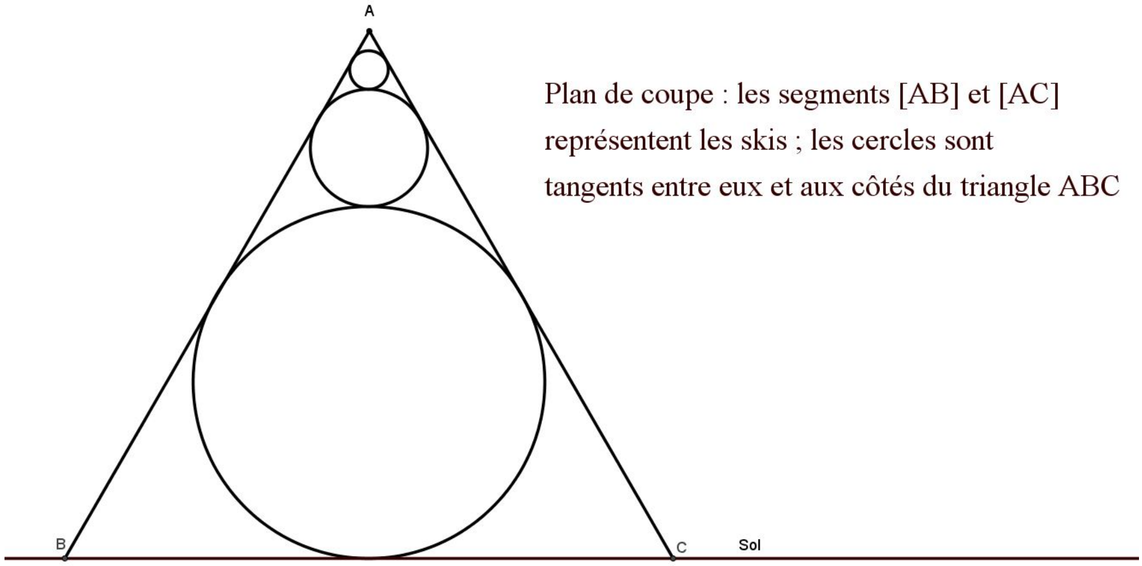
10h + 45min + 3h35min =14h20min

Donc il sera 14h20min.

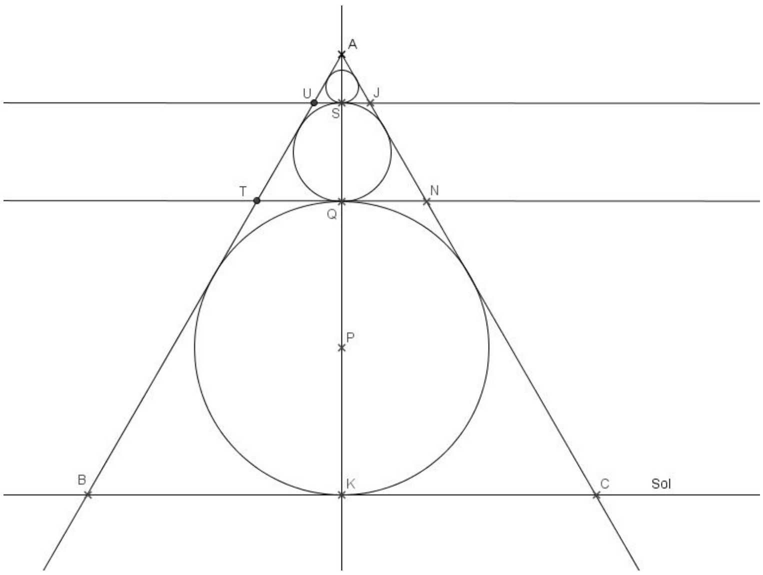
5 – Le bonhomme de neige

Gigi rentre du ski et trouve un "bonhomme de neige" formé de trois boules devant sa crêperie.
Elle pose ses skis de part et d'autre de ce drôle de bonhomme et constate qu'ils forment avec le sol un triangle équilatéral. De plus, la plus petite boule a un diamètre de 12 cm.

Déterminer au centimètre près la longueur des skis de Gigi.



Éléments de solutions



1ère méthode :

Soient $r = 6$ cm le rayon du petit cercle, r_1 le rayon du moyen cercle et R le rayon du grand cercle.

On cherche l la longueur des skis qui correspond au côté du triangle équilatéral ABC.

Soit h la hauteur du triangle équilatéral ABC. On a donc : $h = l\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Comme le grand cercle est tangent au côté du triangle équilatéral ABC, c'est le cercle inscrit à ce triangle. Le point P est donc le centre de gravité du triangle et est situé au tiers de la médiane en partant du côté.

Ainsi $R = \frac{1}{3}h = l\frac{\sqrt{3}}{6} = AQ$.

De même, dans le triangle ATN : $AS = \frac{1}{3}AQ = l\frac{\sqrt{3}}{18}$.

Dans le triangle AUJ, le petit cercle est le cercle inscrit donc : $r = \frac{1}{3}AS = l\frac{\sqrt{3}}{54}$.

Ainsi : $l = r\frac{54}{\sqrt{3}} = 18r\sqrt{3} = 108\sqrt{3} \approx 187$.

2ème méthode :
Soit h_{AUJ},h_{ATN} et h les hauteurs des triangles AUJ, ATN et ABC.

Le diamètre du petit cercle vaut 12 cm et correspond aux deux tiers de la hauteur du petit triangle AUJ donc $h_{AUJ} = 18$ cm.

Cette hauteur $h_{AUJ} = AS$ correspond au tiers de la hauteur h_{ATN} du moyen triangle ATN
donc $h_{ATN} = 18 \times 3 = 54$ cm.

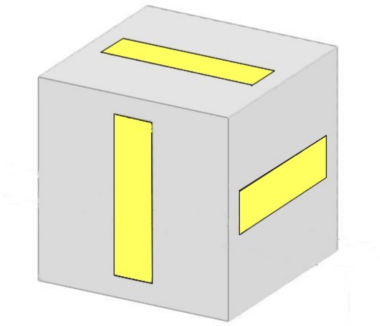
Cette hauteur $h_{ATN} = AQ$ correspond au tiers de la hauteur h du grand triangle ABC
donc $h = 54 \times 3 = 162$ cm.

Or $h = l\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $l = 2 \times \frac{162}{\sqrt{3}} = 2 \times 54\sqrt{3} \approx 187$.

Les skis de Gigi mesurent donc environ 187 cm.

6 – Le pendentif Argent/Or

Un bijoutier décide de fabriquer un pendentif qui a la forme d'un cube en argent d'un centimètre d'arête.
Il perce de part en part trois fentes rectangulaires parallèlement aux arêtes du cube.
Chaque fente est un rectangle de dimensions 8 mm par 2 mm et elle est centrée sur la face du cube comme le montre le dessin.
Ensuite, le bijoutier remplit exactement la partie évidée ainsi créée par de l'or. Il prévoit un prix de vente de 1400 euros.



Masse volumique de l'or : $19,3$ g par cm^3
Masse volumique de l'argent : $10,5$ g par cm^3
Cours de l'Or : $30,95$ € le gramme
Cours de l'Argent : $0,49$ € le gramme

Sachant que le coût de la matière première représente un cinquième du prix de vente, le bijoutier arrivera-t-il à respecter le prix de vente qu'il s'est fixé ?

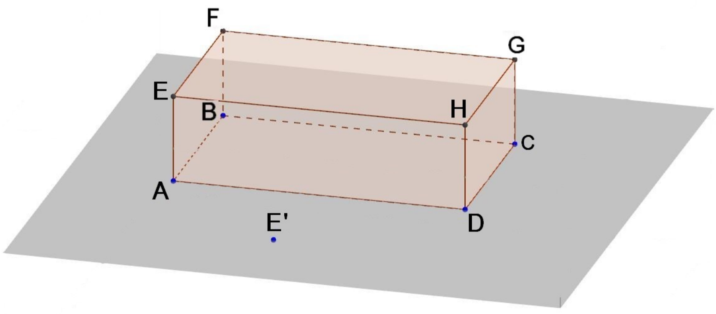
Éléments de solutions

En cours de rédaction ...

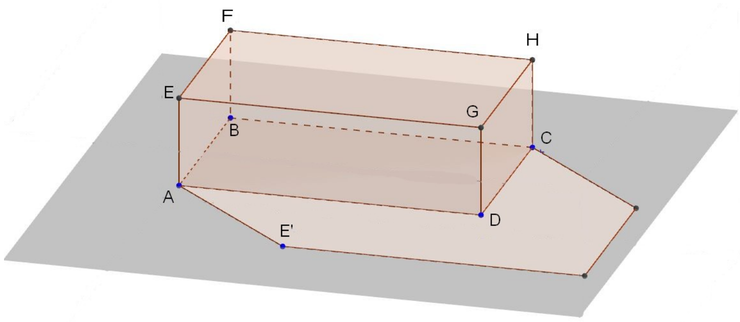
7 – Ombre

Un parallélépipède rectangle est posé sur une table éclairée par le soleil.
Sur le dessin ci-dessous, Sébastien a marqué l'ombre E' du point E.

Dessiner l'ombre du pavé, en supposant que les rayons du soleil sont tous parallèles.



Solution



Résultats utilisés :

Si une droite est parallèle à un plan, alors sa projection sur ce plan suivant une direction de droite, est une droite qui lui est parallèle.

Si deux points A et B sont projetés en A' et B' respectivement sur un plan dans une direction donnée et (AB) parallèle à ce plan alors AB = A' B'.

8 – CXXI

Dans le jeu qu'Anne a inventé, les deux joueurs lancent un dé octaédrique bien équilibré.
Les 8 faces sont numérotées de 1 à 8.
Chaque joueur lance le dé l'un après l'autre et marque le carré de la face obtenue.
Exemple : le dé tombe sur 5 et je marque 25 points.
Le vainqueur de la partie est celui qui a obtenu, en lançant au maximum 6 fois le dé, un total le plus proche possible de 121, sans toutefois dépasser 121.

Déterminer quatre solutions différentes pour obtenir 121 au maximum en six lancers. (deux solutions où seul l'ordre des chiffres change sont considérées comme identiques).

Anne et Bertrand jouent un match en deux parties gagnantes. Voici le résumé du match jusqu'à l'instant actuel :

Partie 1 :
Anne obtient 7, 2, 7 ce qui lui donne 102 points ($7^2 + 2^2 + 7^2 = 102$)
Bertrand obtient 5, 3, 6 ce qui lui donne 70 points ($5^2 + 3^2 + 6^2 = 70$)
Anne décide d'arrêter et Bertrand décide de continuer.
Bertrand obtient 6 et son total passe à 106. Bertrand a gagné !

Partie 2 :
Anne obtient 8, 5, 3 ce qui lui donne 98 points ($8^2 + 5^2 + 3^2 = 98$)
Bertrand obtient 7, 7, 1 ce qui lui donne 99 points ($7^2 + 7^2 + 1^2 = 99$)
Les deux joueurs décident de continuer.
Anne obtient 5 et son total passe à 123. Bertrand obtient 6 et son total passe à 135.
Les deux joueurs ont perdu !

Partie 3 :
Anne et Bertrand ont déjà lancé 5 fois le dé.
Anne a obtenu successivement 2, 7, 6, 3, 2 et Bertrand a obtenu 4, 8, 3, 2, 2.
Bertrand, qui est en retard, décide évidemment de continuer.
Anne se demande si elle doit s'arrêter ou relancer le dé une sixième fois.

Aider Anne à prendre la meilleure décision. Justifier la réponse.

Éléments de solutions

1. (8,5,4,4), (7,6,5,4,2,1) et (6,6,5,5,3) permettent par exemple de réaliser le total 121 en respectant les règles du jeu.
2. A l'issue de cinq lancers, Anne a obtenu 102 points et Bertrand en a obtenu 97
Anne est donc en position favorable à ce moment précis de la partie.
Premier cas : Anne décide d'arrêter.
Bertrand effectue son dernier lancer

Lancer	1	2	3	4	5	6	7	8
Total Bertrand	98	101	106	113	122	133	146	161
Vainqueur de la partie	A	A	B	B	A	A	A	A

Le dé est bien équilibré, donc les 8 éventualités sont équiprobables et dans ce cas, Anne gagne avec une probabilité de 6/8, soit 0,75.
Bertrand gagne avec une probabilité de 2/8, soit 0,25.

Second cas : Anne décide d'effectuer son sixième lancer. Les deux joueurs vont donc lancer.
Dans le tableau ci-dessous est indiqué soit A si Anne gagne, soit B si Bertrand gagne, soit N s'il n'y a aucun vainqueur. Cela arrive lorsque que les deux joueurs ont dépassé 121 ou ont obtenu le même total inférieur ou égal à 121.

Bertrand \ Anne	1	2	3	4	5	6	7	8
1	A	A	A	A	B	B	B	B
2	A	A	A	A	B	B	B	B
3	B	N	A	A	B	B	B	B
4	B	B	B	A	B	B	B	B
5	A	A	A	A	N	N	N	N
6	A	A	B	B	A	A	A	A
7	A	A	B	B	A	A	A	A
8	A	A	B	B	A	A	A	A

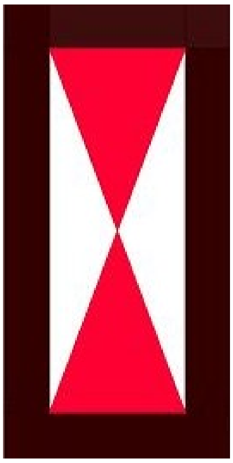
Il y a 64 cas équiprobables

Anne gagne avec une probabilité de 27/64, soit environ 0,42
Bertrand gagne avec une probabilité de 20/64, soit environ 0,31
La probabilité qu'il n'y ait aucun vainqueur est 17/64, soit environ 0,27

Conclusion : Anne ne doit pas effectuer son sixième lancer. Elle aura alors trois fois plus de chance que son adversaire de gagner.

9 – Les volets bataves

En Hollande, les volets traditionnels sont bicolores ou tricolores.



Le panneau rectangulaire ci-contre est tricolore. Il est composé d'une bande de largeur constante notée a et le rectangle intérieur à cette bande est partagé en quatre triangles selon ses deux diagonales. Les triangles acutangles (trois angles aigus) sont rouges et les triangles obtusangles (un angle obtus) sont blancs. La bande extérieure est noire.
Les dimensions du rectangle sont 60 cm et 120 cm et ce volet a la particularité que les aires correspondant à chacune des couleurs sont identiques.

A l'aide éventuellement d'un tableur, déterminer à 1 mm près la largeur de la bande noire.

Éléments de solutions

BD = 60cm ; AB= 120 cm.
BK= a
Aire noire = aire blanche = aire rouge
Aire noire $= 2a(60-2a) + 2a \times 120 = 2a(120+60-2a) = 2a(180-2a)$

Aire rouge $= \dfrac{(60-2a)(120-2a)}{2}$

Aire rouge = aire noire $= 2a(180-2a)$
$(60-2a)(120-2a) = 4a(180-2a)$

$7200 - 120a - 240a + 4a^2 = 720a - 8a^2$
$12a^2 - 360a - 720a + 7200 = 0$

$12a^2 - 1080a + 7200 = 0$
$12(a^2 - 90a + 600) = 0$
$a^2 - 90a + 600 = 0$
$a^2 - 2 \times a \times 45 + 45^2 - 45^2 + 600 = 0$ delta ou canonique (seconde)
$(a-45)^2 - 1425 = 0$

$(a-45)^2 = 1425$

$a - 45 = \sqrt{1425}$ ou $a - 45 = -\sqrt{1425}$

$a = \sqrt{1425} + 45$ ou $a = -\sqrt{1425} + 45$
$a = 82,8$ non ou $a = 7,25$
$a = 7,25$
aire commune $= 2400$ environ.
vérification : $120 \times 60 = 7200$ et $7200/3 = 2400$.

Autre méthode
Aire totale $/3 = 2400$
Donc aire noire $= 2400$
Donc $360a - 4a^2 = 2400$;
$90a - a^2 = 600$

$a^2 - 90a + 600 = 0$.

Autre méthode

Si on note l et L les largeurs et longueurs du rectangle intérieur, on peut observer que :

- l'aire d'un triangle rouge est $1/2 \times l \times (L/2)$
- l'aire d'un tringle blanc est $1/2 \times L \times (l/2)$.

Ainsi, ces deux aires sont égales.
On a donc prouvé que l'aire blanche et l'aire rouge sont égales.

Les trois aires seront donc égales si et seulement si l'aire noire est égale au tiers de l'aire totale.
L'aire totale est 120×60, soit 7200 cm^2, donc l'aire noire devra être de 2400 cm^2.

Notons a la largeur de la bande en cm, l'aire noire s'exprime alors comme $7200 - (120 - 2a) \times (60 - 2a)$, soit en développant $360a - 4a^2$

Les trois aires seront donc égales si et seulement si $360a - 4a^2 = 2400$.

Solution algébrique (à partir de la classe de première) :

L'équation équivaut a $a^2 - 90a + 600 = 0$

Cette équation a deux solutions réelles, dont une seule est dans l'intervalle $[0; 60]$. Elle vaut $a = 45 - 5\sqrt{57}$ soit $a \approx 7,3$ cm à 1 mm près.

Solution tableur ou calculatrice

De manière évidente, l'aire noire est une fonction croissante de a. Il suffit donc de programmer le calcul de l'aire noire jusqu'à ce qu'elle dépasse 2400.

Extrait du tableau (réalisé avec le tableur ou le mode tableau de la calculatrice)

a (cm)	aire noire (cm^2)
7	2324
7,1	2354,56
7,2	2384,64
7,3	2414,84
7,4	2444,96
7,5	2475
7,6	2504,96
7,7	2534,84