RALLYE MATHÉMATIQUE DE FRANCHE-COMTÉ 2014
Éléments de solution de l'épreuve de qualification de 2014

Les classes de Troisième doivent résoudre les problèmes 1 à 6.
Les classes de Seconde doivent résoudre les problèmes 4 à 9.
La classe doit rendre une seule réponse par problème traité **en expliquant la démarche**.

---

1 – La maison des associations

La maison des associations du village compte 4 salles.
Il y a 5 associations actives dans le village :

- le club de football dont le bureau se réunit 1 semaine sur 2
- le club marche/cyclotourisme dont le bureau se réunit 1 semaine sur 5
- Le club d'échecs dont le bureau se réunit 1 semaine sur 4
- le tennis club dont le bureau se réunit 1 semaine sur 3
- le club photo dont le bureau se réunit 1 semaine sur 6

L'assemblée générale de la maison des associations, regroupant autour du maire les 5 présidents et les 5 secrétaires-trésoriers des clubs a eu lieu le mercredi 4 septembre 2013 à 20 heures.
Il a été décidé que les réunions internes à chaque club auront lieu les mercredis à 20 heures, à la maison des associations selon le rythme indiqué ci-dessus. On considère que la première réunion était pour chaque association celle du 4 septembre.

Le maire se pose deux questions :

1. **Y aura-t-il d'ici le 1^{er} septembre 2014 un mercredi où se posera le problème d'organiser 5 réunions alors qu'il n'y a que 4 salles ?**
2. **Y aura-t-il (au moins) un mercredi à 20 heures où la maison des associations sera vide ?**

Éléments de solutions

1. Les 5 associations se retrouveront à la maison des associations si et seulement si le nombre de semaines écoulées depuis le 4 septembre est multiple commun à 2, 3, 4, 5 et 6.
   Sachant que les multiples communs à 5 et 6 ($= 2 \times 3$) sont les multiples de 30, et que 30 n'est pas divisible par 4, le plus petit multiple commun à 2, 3, 4, 5 et 6 est donc 60.
   Comme une année ne compte que 52 semaines entières, soit 52 ou 53 mercredis, **il n'y aura donc pas de problème d'organisation d'ici le 1 septembre 2014**.
   Il ya aussi la solution évidente que la maison sera vide la semaine qui suit l'AG.

2. La maison sera vide si et seulement si le nombre de semaines écoulées depuis le 4 septembre n'est divisible par aucun des entiers 2, 3, 4, 5 et 6
   C'est le cas de 7, 11, 13 ,17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47 et 49
   Ainsi le mercredi 23 octobre 2013, situé 7 semaines après le mercredi 4 septembre, il n'y aura aucune réunion à la maison des associations.

2 – Anniversaire

Cette année deux mille quatorze, le Rallye Mathématique de Franche-Comté va fêter joyeusement son onzième anniversaire et cette phrase contient exactement ... R, ... M, ... F et ... C.

Compléter les pointillés par des nombres écrits en toutes lettres pour que la phrase ci-dessus soit vraie.

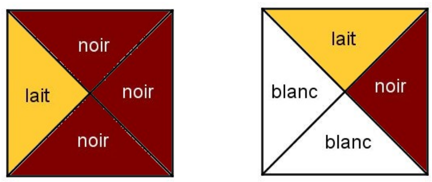
Solutions

Cette année deux mille quatorze, le Rallye Mathématique de Franche-Comté va fêter joyeusement son onzième anniversaire et cette phrase contient exactement **neuf** R, **huit** M, **quatre** F et **sept** C.

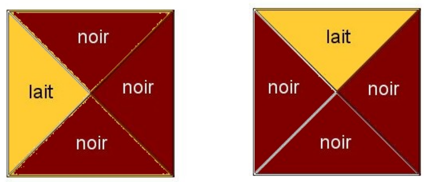
Après dénombrement de l'occurence de chacune des lettres dans le texte brut, on trouvait respectivement 8, 8, 3 et 7 pour R, M, F et C.
Une fois écrit en lettres, ces nombres ainsi réinjectés dans le texte donnait un R de plus, donc 9 R au lieu de 8, ce qui donnait un F de plus donc 4 F, ce qui ne changeait rien donc 9, 8, 4, 7 convenaient.
La nouvelle phrase contenait alors le nombre de lettres qu'elle indiquait.

3 – Tablette de chocolat

Un chocolatier fabrique des chocolats carrés dans un moule carré de côté 3 cm, partagé en quatre triangles rectangles isocèles identiques comme l'indique les figures ci-contre.
Pour fabriquer un carré, il remplit chaque partie en forme de triangle soit par du chocolat noir, soit par du chocolat au lait ou soit par du chocolat blanc.
Il a réalisé tous les carrés de chocolat différents qu'il était possible de faire. Il met une épaisseur de chocolat de 1 cm.
Il doit maintenant commander les boîtes d'emballage rectangulaires lui permettant de ranger exactement un carré de chaque sorte, sans laisser de vide, sans les empiler et sans en oublier un seul.



↑ exemple de deux carrés différents ↑



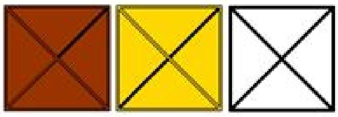
↑ exemple de deux carrés identiques ↑

Quelles sont les dimensions des boîtes qu'il peut commander ?

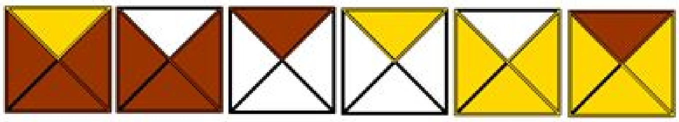
Eléments de solution :

Il faut trouver un moyen logique de trouver les différents carrés. Il y a 4 triangles à remplir, on peut regarder ceux qui en ont :

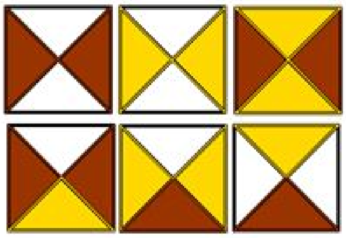
- 4 de la même couleur :



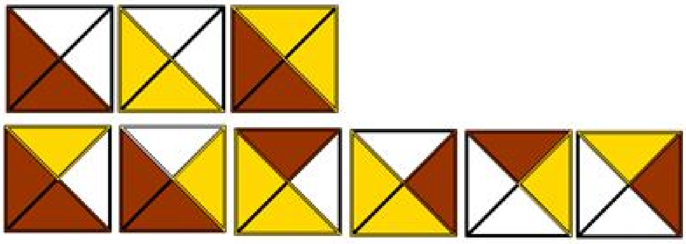
- puis 3 :



- puis 2 face à face



- puis 2 adjacents :



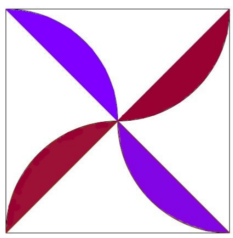
Il y a donc 24 carrés différents.

On peut donc les disposer de 4 manières différentes :

1.
   - soit 1 par 24 ce qui donne en cm une boite de dimension $3 \times 72 \times 1$.
   - soit 2 par 12 ce qui donne en cm une boite de dimension $6 \times 36 \times 1$.
   - soit 3 par 8 ce qui donne en cm une boite de dimension $9 \times 24 \times 1$.
   - soit 4 par 6 ce qui donne en cm une boite de dimension $12 \times 18 \times 1$.

Ce problème fait référence aux carrés de Mac Mahon.

4 – Tableau de Phil



Phil a peint le tableau suivant qui a la forme d'un carré de 80 cm de côté.
Chaque arc de cercle a pour centre le milieu d'un côté du carré.

Quelle est la proportion du tableau peinte en blanc ?

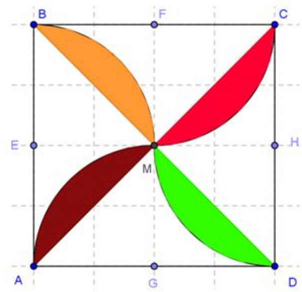
Analyse a priori :Calcul d'aires ; Calcul de proportions

Eléments de solution :

Rayon $= EM = 40$ cm .

Aire rouge $= \dfrac{R \times R \times \pi}{4} - \dfrac{R \times R \times \pi}{2} = \dfrac{40 \times 40 \times \pi}{4} - \dfrac{40 \times 40 \times \pi}{2} = \dfrac{1600(\pi - 2)}{4} = 400(\pi - 2)$

Aire de la fleur $= 4 \times 400(\pi - 2) = 1600(\pi - 2)$.



Aire carré $= 80 \times 80 = 6400$.

Proportion de la fleur $= \dfrac{1600(\pi - 2}{6400} = \dfrac{\pi - 2}{4} \approx 0,285$.

Aire blanche $= 6400 - 1600(\pi - 2) = 1600(4 - \pi + 2) = 1600(6 - \pi)$.

Proportion blanche $= \dfrac{1600(6 - \pi)}{6400} = \dfrac{6 - \pi}{4} \approx 0,715$.

On peut aussi faire $1 - 0,285 = 0,715$.

5 – Le sucre

Les deux boîtes de sucre présentées ci-dessous (voir photos) sont exactement de mêmes dimensions, soient 17 cm $\times$ 11 cm $\times$ 5 cm.

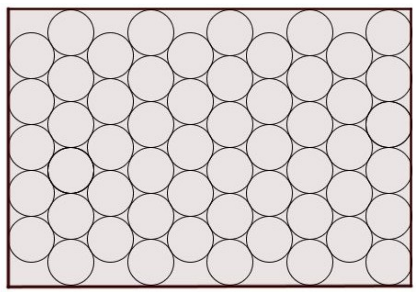
La boîte "classique" contient 1kg et est vendue 1,05 €.

Dans cette première boîte, les sucres sont des pavés droits "classiques" et ils occupent tout le volume de la boîte.

La seconde boîte est vendue 1,41 €. Elle contient des sucres cylindriques formant des piles disposées comme le montre la photo ci-dessous au centre.

Toutefois, la hauteur de ces piles n'est que de 4,82 cm.

Dans cette seconde boîte, les sucres cylindriques forment donc des piles rangées comme le montre la figure ci-dessous à droite.



Sucre classique

Prix : 1 € 05
Prix au kg : 1 € 05

Sucre cylindrique

Prix :1 € 41
Prix au kg : ?

Quel est le prix au kg du sucre acheté dans la seconde boîte ?

Elements de solutions

Calculons le volume de sucre dans chaque boite.
Dans la boite classique, le volume est celui de la boite et on obtient $V = 17 \times 11 \times 5$, soit $V = 935$ cm^3.
Dans la boite cylindrique, le volume du sucre est donné par 22 cylindres de hauteur 5 cm et de rayon 17/12 puisqu'on aligne 6 cylindres tangents dans la plus grande dimension de la boite.

Ainsi $V' = 22 \times \pi \times \left(\dfrac{17}{12}\right)^2 \times 5$ soit $V' \approx 693,55$ cm^3.
La masse de sucre est proportionnelle au volume donc sachant que la masse de sucre dans la boite classique est 1 kg, la masse de sucre dans la boite cylindrique est soit $m = \dfrac{V' \times 1}{V}$ soit $m \approx 0,742$ kg.

Le prix est proportionnel à la masse, donc si la masse m coute $1,35$ €, 1 kg coutera $\dfrac{1,35 \times 1}{m}$.
Le sucre cylindrique coute environ 1,82 € le kilo

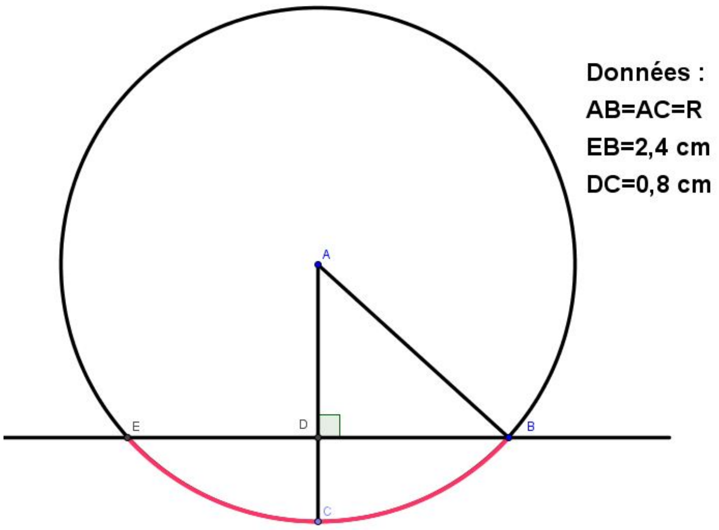
6 – Le solitaire

Un ébéniste fabrique des plateaux et des billes de jeux de solitaire en bois.
Chaque cavité épouse parfaitement la bille.
La cavité est un trou de 2,4 cm de diamètre et de 0,8 cm de profondeur.

Retrouver le rayon de la bille.

Eléments de solution

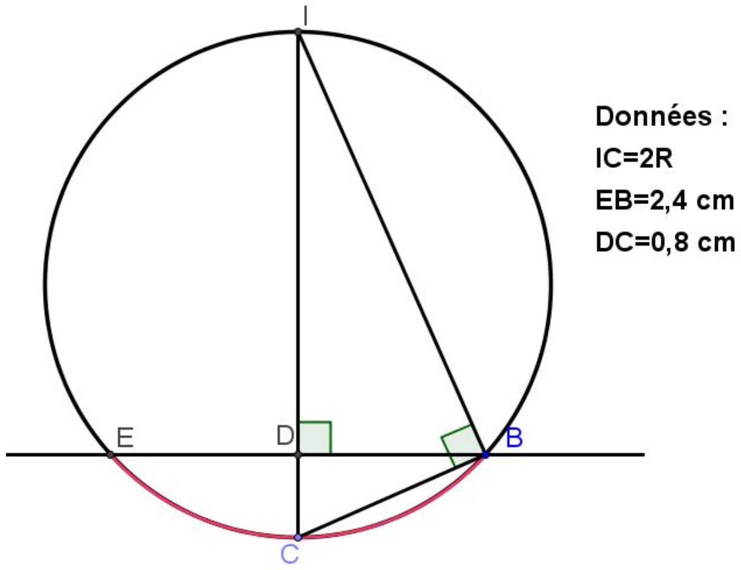
1^{ere} méthode :



On utilise le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ABD, ce qui permet d'obtenir :

$R^2 = (R - 0,8)^2 + 1,2^2$ et donc $1,6R = 1,44 + 0,64$ et $R = \dfrac{2,08}{1,6} = 1,3$.

2^{eme} méthode :



On utilise la trigonométrie dans le triangle rectangle BDC : $cosC = \dfrac{DC}{BC} = \dfrac{0,8}{BC}$

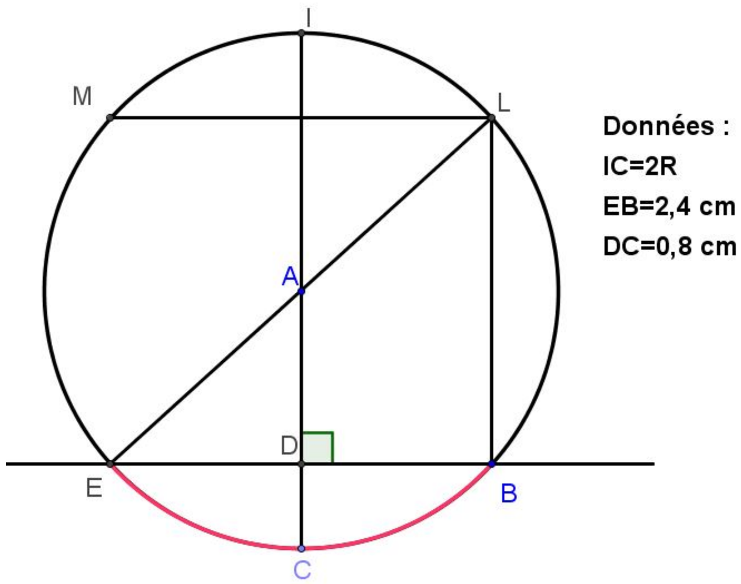
Puis on utilise la trigonometrie dans le triangle CBI : $cosC = \dfrac{BC}{IC} = \dfrac{BC}{2R}$

Donc $\dfrac{0,8}{BC} = \dfrac{BC}{2R}$, c'est-à-dire $2R = \dfrac{BC^2}{0,8}$

En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle BCD : $BC^2 = 2,08$

Donc $R = \dfrac{2,08}{1,6} = 1,3$

3^{eme} méthode :



On utilise le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle LEB, ce qui permet d'obtenir

$(2R)^2 = (2R - 2 \times 0,8)^2 + 2,4^2$ et donc $4R^2 = 4R^2 - 6,4R + 2,56 + 5,76$ et finalement $R = \dfrac{8,32}{6,4} = 1,3$

Remarque : Une construction géométrique détaillée et précise du cercle circonscrit au triangle EBC, à une échelle 5 par exemple, permettait d'approcher R mais ne permettait pas d'affirmer une valeur exacte.

7 – Exponentielle

En 1976, Emmanuelle a participé au jeu suivant. Pour cela, elle a acheté à Miloude la carte représentée en figure a pour la somme de 50 francs.
Elle a ensuite envoyé un chèque de 70 francs à Michel, numéro 1 sur la carte de participation et enfin elle a fait parvenir 30 francs à l'organisateur Alfred.
En retour, Alfred lui a fait parvenir trois cartes identiques représentées en figure b.
Emmanuelle a alors vendu ses trois cartes à trois nouveaux joueurs.
Ces nouveaux joueurs ont envoyé un chèque de 70 francs à Dominique, 30 francs à l'organisateur Alfred, ... et le jeu a continué selon le même principe.

	Carte de participation
	Valeur : 50 francs
1.	Michel
2.	Dominique
3.	Alain
4.	Sandrine
5.	Philippe
6.	Miloude

figure a

	Carte de participation
	Valeur : 50 francs
1.	Dominique
2.	Alain
3.	Sandrine
4.	Philippe
5.	Miloude
6.	Emmanuelle

figure b

1. L'organisateur affirme que l'investissement de chaque joueur est nul et que chaque joueur peut gagner une somme supérieure à 50 000 francs. **Est-ce vrai ?**
2. On considère qu'en 1976, en France, il y avait sept millions de personnes susceptibles de participer à ce jeu.
   On considère que l'organisateur est la génération 1, qu'il a vendu ses trois cartes à la génération 2, que chacune des personnes de la génération 2 a vendu ses trois cartes à la génération 3, etc.
   Au bout de combien de générations y aura-t-il saturation et par conséquent extinction du jeu ?

Remarque : on rappelle pour mémoire que 1 franc représente 0,15625 euro.

Eléments de solution

1. Un joueur paye 50F (carte) + 70F (chèque au $n^o 1$) + 30F (organisateur)
Il paye donc 150F qu'il va retrouver en vendant les 3 cartes que l'organisateur lui a envoyées. L'investissement est donc nul.
Dans le meilleur des cas, le nom du joueur figurera 3 fois en numéro 6, $9 = 3^2$ fois en numéro 5 et ainsi $3^6 = 729$ fois en numéro 1.
Dans le meilleur des cas, le joueur recevra 729 chèques de 70F. Il gagnera donc 51030 F.
Les affirmations de l'organisateur sont exactes.

2. On recense les participants ainsi :
Génération 1 : 1 participant
Génération 2 : $3 + 1 = 4$ participants
Génération 3 : $3^2 + 3 + 1 = 13$ participants
...
Génération k : $3^{k-1} + \cdots + 3 + 1$ participants
On cherche donc le premier entier k tel que $3^{k-1} + \cdots + 3 + 1 \geqslant 7000000$

Réponse élèves :
Le nombre de participants étant croissant avec le nombre de générations, les élèves trouveront la réponse en cumulant les puissances successives de 3 avec la calculatrice ou le tableur.

Génération	Nombre de participants
1	1
2	4
3	13
4	40
5	121
6	364
7	1093
8	3280
9	9841
10	29524
11	88573
12	265720
13	797161
14	2391484
15	7174453

Il y aura saturation à la 15ème génération.

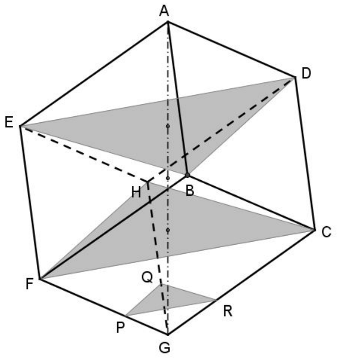
Réponse experte (profs) :
On utilise le résultat sur la somme des termes successifs d'une suite géométrique.
L'inéquation équivaut à $3^{k-1} \geqslant 14000000$, soit $3^k \geqslant 14000001$ et après un passage au logarithme, $k\,ln3 \geqslant ln(14000001)$
et puisque $ln(3) > 0$, on obtient enfin $k \geqslant ln(14000001)/ln(3)$

Cette constante valant environ 14,98, on en déduit qu'**il y aura saturation à la 15ème génération**.

8 – Kubus-huis

En 1984, l'architecte néerlandais Piet Blom a créé à Rotterdam l'ensemble des maison-cubes.
Ces maisons sont des cubes posés sur la pointe, une grande diagonale étant verticale (voir figure ci-dessous).
De plus, ce cube repose sur un pilier en béton de section carrée.
L'appartement est constitué de trois niveaux :

- le niveau "Entrée" a au sol une surface représentée par le triangle PQR, ces points étant situés au tiers des arêtes [GF], [GC] et[GH] en partant de G,
- le niveau "Intermédiaire" a au sol une section représentée par le triangle CFH,
- le niveau "Supérieur" a au sol une section représentée par le triangle BDE.



L'architecte a conçu cette maison de manière à ce que la surface totale au sol soit de 40 m^2.

Quelle est alors l'arête du cube (au dm près) ?

Eléments de solution

Nature des trois triangles formant les pièces de l'appartement
Le triangle BDE est équilatéral puisque ses côtés sont des diagonales de face.
Si on note a l'arête inconnue du cube, la diagonale de face mesure $a\sqrt{2}$.

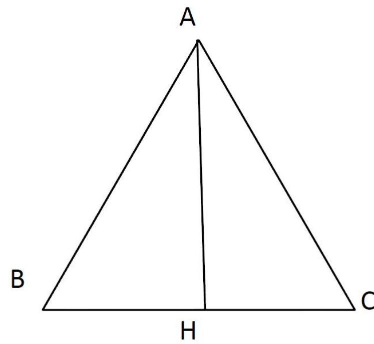
De même le triangle BFG est équilatéral de côté $a\sqrt{2}$.
Dans le triangle GFH, P et Q sont situés au tiers des côtés respectifs $[FG]$ et $[GC]$.
La réciproque du théorème de Thalès nous permet de conclure que (PQ) est parallèle à (FH) et que $PQ = \frac{1}{3}FH$, soit $PQ = a\frac{\sqrt{2}}{3}$. Le même raisonnement peut s'appliquer aux triangles GHC et GFC.

En conclusion, le triangle PQR est équilatéral de côté $a\frac{\sqrt{2}}{3}$

La surface de l'appartement est donc la somme des aires de trois triangles équilatéraux.

Calcul de l'aire d'un triangle équilatéral de côté c :

La hauteur $[AH]$ est aussi médiane, donc H est le milieu de $[BC]$
Le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ABH (ou le calcul de $sin 60^o$ dans ce triangle) nous permet de trouver $AH = c\frac{\sqrt{3}}{2}$



L'aire du triangle ABC est alors aire $= \frac{1}{2}BC.AH$, soit aire $= \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$
Calcul de la surface de l'appartement :
$S =$ aire $(PQR)+$ aire $(BED)+$ aire (BCF),
soit $S = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[\left(a\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2\right]$
On a alors $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\left(\frac{2}{9}+2+2\right)$ et enfin $S = \frac{19\sqrt{3}}{18}a^2$
La surface est de 40 m^2, donc l'arête a vérifie l'équation $\frac{19\sqrt{3}}{18}a^2 = 40$, soit $a^2 = \frac{720}{19\sqrt{3}}$ ou enfin $a^2 = \frac{240\sqrt{3}}{19}$
On trouve finalement $a = \sqrt{\frac{240\sqrt{3}}{19}}$, soit en arrondissant $a \approx 4,67$
Conclusion : l'arête de la maison cube vaut 4,70 mètres, au décimètre près.

9 – Alerte anti-pollution au Chili

A Santiago, durant les mois de forte pollution (mai à septembre), se met en place la restriction de circulation selon la règle suivante :

- tout véhicule à moteur sera interdit de circulation 1 jour parmi les 5 jours ouvrables (lundi à vendredi),
- le dernier chiffre de la plaque d'immatriculation du véhicule détermine le jour où le véhicule ne peut pas rouler,
- chaque jour ouvrable, la restriction concerne deux chiffres, soit 20% du parc automobile.

Début du calendrier des restrictions de circulation

Jours	Interdits de circulation
Lundi 6 mai	1 et 6
Mardi 7 mai	2 et 9
Mercredi 8 mai	3 et 5
Jeudi 9 mai	4 et 8
Vendredi 10 mai	0 et 7

Jours	Interdits de circulation
Lundi 13 mai	4 et 7
Mardi 14 mai	0 et 3
Mercredi 15 mai	2 et 8
Jeudi 16 mai	1 et 9
Vendredi 17 mai	5 et 6

La famille Hernandez a deux voitures dont les immatriculations sont les suivantes :

On suppose que la répartition des 10 chiffres sur les jours de la semaine est totalement aléatoire.

1. Le jeudi 30 mai, M. et Mme Hernandez doivent absolument disposer d'un véhicule.
   Quelle est la probabilité que leurs deux voitures soient interdites de circulation ce jour-là ?
2. Le vendredi 28 juin, M. et Mme Hernandez ont absolument besoin de leurs deux voitures.
   Quelle est la probabilité que leurs deux véhicules puissent rouler ce jour-là ?

Eléments de solution

Comme le montre le tableau ci-dessous, il y a 45 combinaisons équiprobables pour le choix des deux chiffres concernés par l'interdiction de circuler.
1. La famille Hernandez possède deux véhicules dont les plaques se terminent par 5 et 9.
Le jeudi 30 mai , elle disposera d'un véhicule dans tous les cas, sauf celui où les deux chiffres concernés par l'interdiction sont 5 et 9. Ainsi la probabilité cherchée est 1/45.
2. Le vendredi 28 juin, la famille Hernandez a besoin de ses deux véhicules. Cela signifie que ni le 5, ni le 9 ne doivent être soumis à l'interdiction ce-jour là.
Dans le tableau ci-dessous, en éliminant les lignes du 5 et du 9, ainsi que les colonnes du 5 et du 9, il nous reste 28 cas favorables. La probabilité cherchée est alors 28/45.

premier chiffre second chiffre	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	01	02	03	04	05	06	07	08	09
1		12	13	14	15	16	17	18	19
2			23	24	25	26	27	28	29
3				34	35	36	37	38	39
4					45	46	47	48	49
5						56	57	58	59
6							67	68	69
7								78	79
8									89