RALLYE MATHÉMATIQUE DE FRANCHE-COMTÉ 2016
Finale du jeudi 31 mars 2016

Les classes de Troisième doivent résoudre les problèmes 1 à 6.

Les classes de Seconde doivent résoudre les problèmes 4 à 9.

La classe doit rendre une seule réponse par problème traité **en expliquant la démarche**.

---

1 – Les francs-comtois

Quelques élèves, matheux à souhait, se demandent combien de zéros comporte la factorielle de leur département et quel est son premier chiffre non nul ?

La factorielle d'un entier naturel n (que l'on note $n!$) est le produit des nombres entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à n. Par exemple factorielle 4 : $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

Donner pour chacun des départements de Franche-Comté le nombre de zéros et le premier chiffre non nul de sa factorielle.

Eléments de solution

Les zéros sont fournis par le produit de 2 et de 5.
Les chiffres pairs fournissent les 2 et il suffit donc chercher les multiples de 5 pour déterminer le nombre de zéros.
Dans la liste des termes de 25 ! ont en dénombre 6 (5, 10, 15 , 20 et 25). *A noter que 25 contribue à la confection de deux zéros.*

$25! = 25\times24\times23\times22\times21\times20\times19\times18\times17\times16\times15\times14\times13\times12\times11\times10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1 = 5\times5\times2\times5\times2\times2\times5\times3\times5\times2\times5\times2\times2\times24\times23\times22\times21\times19\times18\times17\times16\times3\times14\times13\times12\times11\times9\times8\times7\times6\times3\times1 = 1000000\times24\times23\times22\times21\times19\times18\times17\times16\times14\times13\times12\times11\times9\times8\times7\times6\times3\times1 = ?8000000$

Le premier chiffre non nul est formé par le produit des chiffres des unités de chaque terme de la factorielle.
On obtient donc (après avoir retirer les $2 \times 5 \longmapsto 0$) :

N (expurgé)	Chiffre retenu	Chiffre du Produit	N (expurgé)	Chiffre retenu	Chiffre du Produit
1	1		46	6	6
1	1	1	47	7	2
3	3	3	24	4	8
1	1	3	49	9	2
1	1	3	1	1	2
6	6	8	51	1	2
7	7	6	52	2	4
8	8	8	53	3	2
9	9	2	27	7	4
1	1	2	11	1	4
11	1	2	56	6	4
12	2	4	57	7	8
13	3	2	58	8	4
14	4	8	59	9	6
3	3	4	6	6	6
16	6	4	61	1	6
17	7	8	62	2	2
18	8	4	63	3	6
19	9	6	32	2	2
1	1	6	13	3	6
21	1	6	66	6	6
22	2	2	67	7	2
23	3	6	68	8	6
24	4	4	69	9	4
1	1	4	7	7	8
26	6	4	71	1	8
27	7	8	72	2	6
28	8	4	73	3	8
29	9	6	37	7	6
3	3	8	3	3	8
31	1	8	38	8	4
32	2	6	77	7	8
33	3	8	78	8	4
17	7	6	79	9	6
7	7	2	8	8	8
36	6	2	81	1	8
37	7	4	82	2	6
38	8	2	83	3	8
39	9	8	42	2	6
4	4	2	17	7	2
41	1	2	86	6	2
42	2	4	87	7	4
43	3	2	88	8	2
22	2	4	89	9	8
9	9	6	9	9	2

Le tableau ci-dessus a été réalisé au tableur avec les formules ci-dessous :

A	B	C	
1	=A1-ENT(A1/10)*10		
1	=A2-ENT(A2/10)*10	=B1*B2-ENT(B1*B2/10)*10	
3	=A3-ENT(A3/10)*10	=C2*B3-ENT(C2*B3/10)*10	

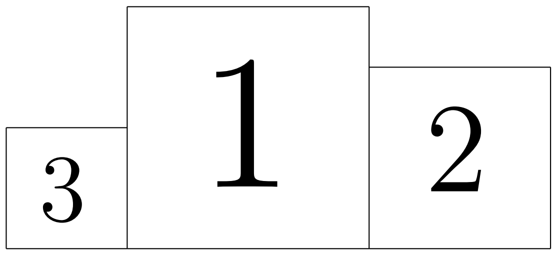
Les valeurs exactes calculées sur le site http ://www.dcode.fr/ :

25! = 15 511 210 043 330 985 984 000 000
39! = 20 397 882 081 197 443 358 640 281 739 902 897 356 800 000 000
70! = 11 978 571 669 969 891 796 072 783 721 689 098 736 458 938 142 546 425 857 555 362 864 628 009 582 789 845 319 680 000 000 000 000 000
90! = 1 485 715 964 481 761 497 309 522 733 620 825 737 885 569 961 284 688 766 942 216 863 704 985 393 094 065 876 545 992 131 370 884 059 645 617 234 469 978 112 000 000 000 000 000 000 000

réponses attentues :
25 ! se termine par un 4 suivi de 6 zéros
39 ! se termine par un 8 suivi de 8 zéros
70 ! se termine par un 9 suivi de 16 zéros
90 ! se termine par un 2 suivi de 21 zéros

2 – Podium

Pour ses récompenses de fin d'année, le Rallye RMFC envisage d'utiliser le podium suivant dont la face frontale représentée ci-contre est formée de trois carrés de dimensions exprimées en décimètre sont trois nombres entiers consécutifs .



L'IREM* souhaite que les deux couleurs de son logo, vert et blanc, soient représentées équitablement.

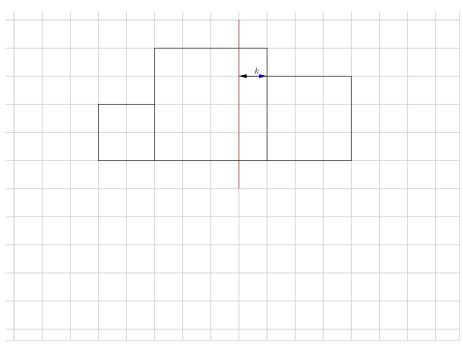
Sachant que l'aire totale de la face frontale de ce podium est de 365 dm^2, comment partager cette surface en deux parties de même aire avec un seul segment ?

* ***I****nstitut de* ***R****echerche sur l'****E****nseignement des* ***M****athématiques*

Eléments de solution

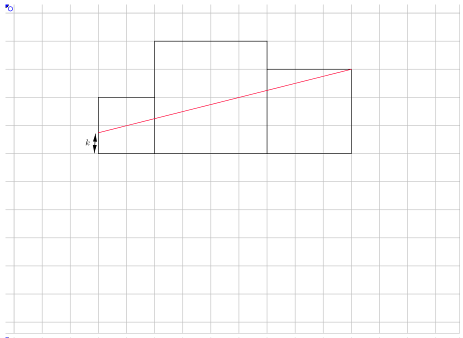
On appelle n l'entier naturel représentant la mesure du côté du carré moyen. ($n > 0$).
Donc, les trois dimensions sont : $n-1$; n et $n+1$, n entier et $n > 0$; donc $n \geqslant 1$.
L'aire totale du champ est de : $(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = n^2 - 2n + 1 + n^2 + n^2 + 2n + 1 = 3n^2 + 2$.
$3n^2 + 2 = 365$; $3n^2 = 363$; $n^2 = 121$; $n = \sqrt{121} = 11$.
Donc les dimensions des trois carrés sont 10 dm ; 11dm et 12 dm.

Premier partage : horizontalement



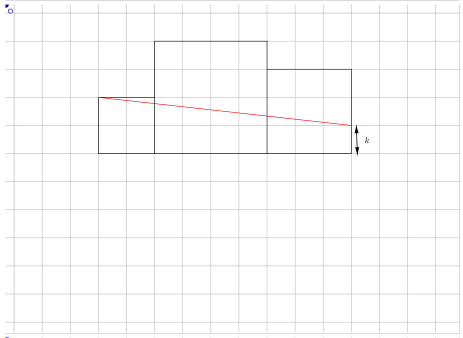
On suppose que la ligne de partage passe en dessous du plus petit carré à une distance égale à k.
Donc l'aire en dessous de la ligne vaut :
$(10 + 12 + 11)(10 - k) = 365/2$; $66(10 - k) = 365$; $660 - 66k = 365$; $66k = 660 - 365$; $66k = 295$; $k = 295/66$; $k \approx 4,47$ dm.

Deuxième partage : verticalement



$10^2 + 12(12 - k) = 365/2$; $100 + 144 - 12k = 365/2$ $2(244 - 12k) = 365$; $488 - 24k = 365$; $488 - 24k = 365$; $488 - 365 = 24k$, $123 = 24k$, $k = 123/24$; $k = 5,125$

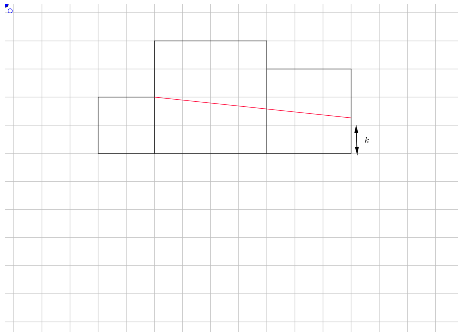
Troisième partage diagonale 1



La partie en dessous de la ligne rouge est un trapèze rectangle. Son aire est :

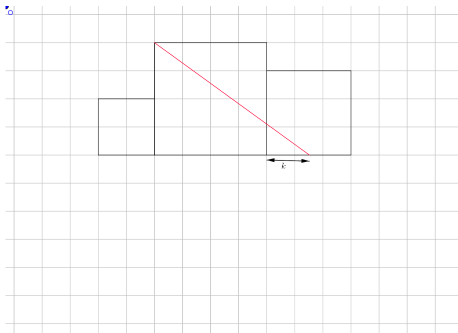
$((10 + 11 + 12)(11 + k))/2 = 365/2$
Donc $33 \times 11 + 33k = 365$; $363 + 33k = 365$; $33k = 2$, $k = 2/33$.

Quatrième partage : diagonale 2



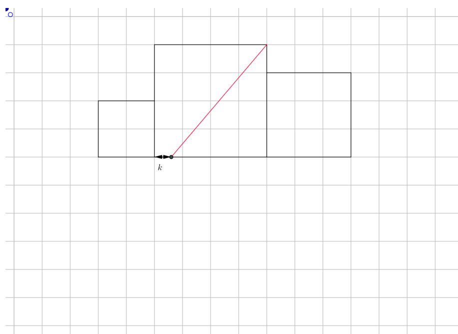
$33(10 + k) = 365$; $330 + 33k = 365$; $33k = 35$; $k = 35/33$.

Autres essais



$10^2 + (12 + 11)(10 + k) = 365/2$; $100 + 23 \times 10 + 23k = 365/2$; $100 + 230 + 23k = 365/2$; $2(330 + 23k) = 365$ $660 + 46k = 365$; k négatif ; impossible.

$100 + (12(12 + k))/2 = 365/2$; $100 + 6(12 + k) = 365/2$; $100 + 72 + 6k = 365/2$; $2(172 + 6k) = 365$; $344 + 12k = 365$; $12k = 365 - 344$; $12k = 21$; $k = 21/12$.



$100 + 12(12 + k)2 = 3652$; $200 + 12(12 + k) = 365$; $200 + 144 + 12k = 365$: $344 + 12k = 365$; $12k = 21$; $k = 2112$

3 – Packaging

Rémi est artisan-chocolatier. Pour les fêtes, il a fabriqué des chocolats en forme de boules de 3 cm de diamètre.
Pour les commercialiser, il fait fabriquer des boîtes parallélépipédiques faites en plastique transparent avec

des incrustations de fils dorés, pouvant contenir 24 chocolats.
Le coût d'une de ces boîtes est proportionnel à la surface de ce plastique spécial utilisé pour la fabriquer. Pour limiter le coût de ces boîtes, Rémi souhaite juxtaposer les chocolats en ne laissant aucun espace entre les chocolats, (ils peuvent donc se toucher) afin d'avoir des boîtes de surface minimale.

En considérant que les feuilles intercalaires entre les différentes couches de chocolat sont d'épaisseur négligeable, quelles sont les dimensions de la boîte permettant d'avoir un coût minimal ?

Elément de solution

Les dimensions sont des multiples de 3 puisqu'il n'y a aucun espace perdu. De plus, puisque la boîte contient 24 boules de diamètre 3 cm. Notons a , b et c le nombre de chocolats sur la longueur, la largeur et la hauteur de la boîte (la longueur est la plus grande dimension de la base de la boîte)
Nous avons la relation abc = 24 avec a, b, c entiers naturels.
La surface de la boîte est alors $S = 9(2ab + 2bc + 2ca)$, soit encore $S = 18(ab + bc + ca)$
Le tableau ci-dessous décrit toutes les possibilités.

a	b	c	S
1	1	24	882
2	1	12	684
2	2	6	504
3	1	8	630
3	2	4	468
4	1	6	612
4	2	3	468
4	3	2	468
6	1	4	612
6	2	2	504
6	4	1	612
8	1	3	630
8	3	1	630
12	1	2	684
12	2	1	684
24	1	1	882

Rémi devra alors choisir la boîte de dimensions 6 cm, 9 cm et 12 cm.
La boîte aura alors une surface de 468 cm^2
Il pourra pour le même coût mettre les chocolats sur deux rangs de 12, ou sur 3 rangs de 8 ou sur 4 rangs de 6.

4 – Vendanges

Ariane et Bacchus sont employés pour la saison des vendanges. Ils disposent chacun d'une hotte pouvant contenir respectivement 11 kg et 17 kg de raisin.

Ariane s'occupe d'aller chercher le raisin et Bacchus se charge de remplir une remorque. Leurs échanges se font à l'ombre d'un arbre situé entre les vignes et la remorque, au pied duquel leur bébé Céramos fait la sieste.

Ils décident de s'organiser ainsi :

- Ariane ne va remplir sa hotte que lorsqu'elle est vide ;
- Quand Ariane rejoint Bacchus, elle verse le maximum de raisin dans la hotte de Bacchus ;
- Bacchus ne part vider sa hotte dans la remorque que lorsqu'elle est pleine ;
- Quand Bacchus va vider sa hotte dans la remorque, il la vide complètement.
- Céramos ne reste jamais tout seul.

Combien de fois Ariane aura-t-elle rempli sa hotte et Bacchus vidé la sienne lorsque la masse totale des deux hottes sera de 19 kg, ?
Combien y aura-t-il de raisin dans la remorque lorsque leurs hottes seront toutes les deux vides ?

Elément de solution

Arianne	Bacchus	Arianne	Bacchus
0	0	0	14
11	0	11	14
0	11	8	17
11	11	8	0
5	17	0	8
5	0	11	8
0	5	2	17
11	5	2	0
0	16	0	2
11	16	11	2
10	17	0	13
10	0	11	13
0	10	7	17
11	10	7	0
4	17	0	7
4	0	11	7
0	4	1	17
11	4	1	0
0	15	0	1
11	15	11	1
9	17	0	12
9	0	11	12
0	9	6	17
11	9	6	0
3	17	0	6
3	0	11	6
0	3	0	17
11	3	0	0

Lorsque la masse des hottes est de 19 kg, sur la ligne (11,8) Arianne est allé 11 fois remplir sa hotte et Baccus l'a vidée 6 fois.

Lorsque les deux hottes sont à zéro, Bacchus a vidé 11 fois sa hotte et la remorque contient $11 \times 17 = 187$ kg.

5 – Pyramides de Giseh

Sur le site de Gizeh, les deux plus grandes pyramides sont Kheops et Khephren.

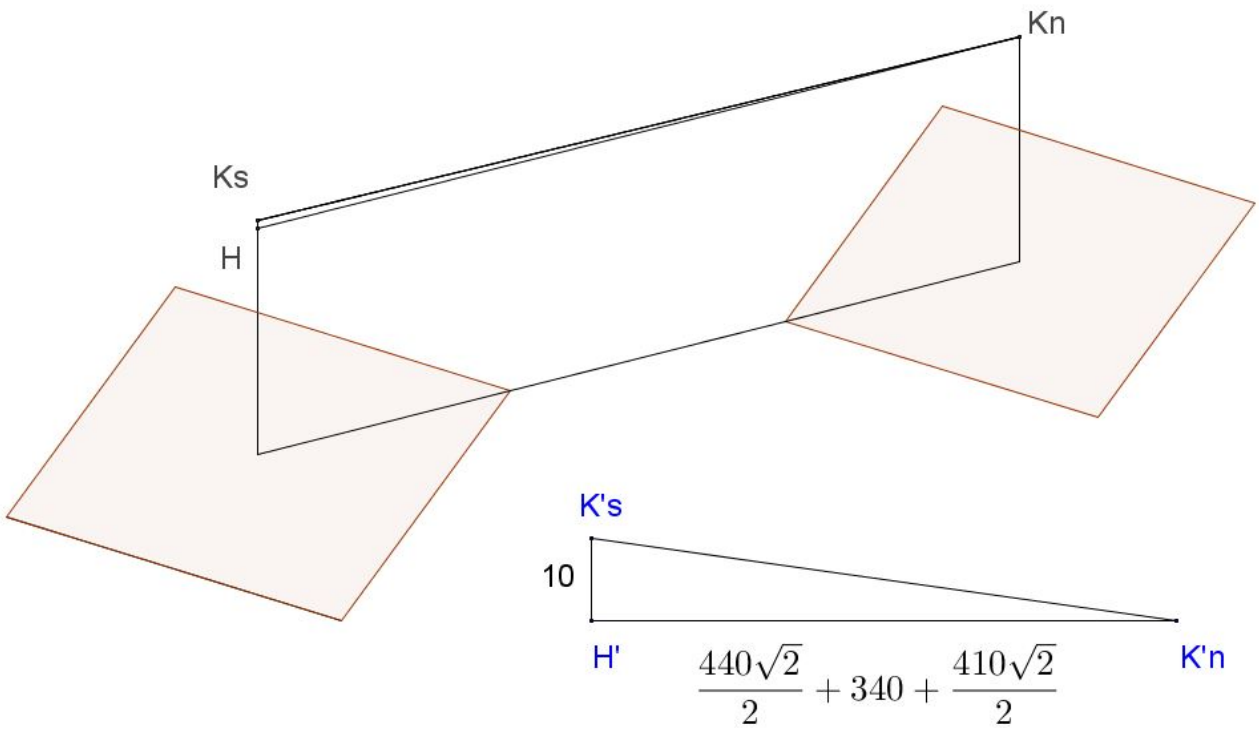
Kheops a une base carrée de 440 coudées et une hauteur de 280 coudées.
Khephren a une base carrée de 410 coudées et une hauteur de 270 coudées.

Les deux pyramides sont distantes de 340 coudées et leurs diagonales sont dans le prolongement l'une de l'autre. (Voir plan ci-contre)

La coudée est une mesure de longueur utilisée dans l'ancienne Egypte.

Déterminer la distance en coudées entre les deux sommets des pyramides de Kheops et de Khephren.

Eléments de solution



$HKnKs$ est un triangle rectangle en H.
$HKs = 280 - 270 = 10$ coudées.
$HKn = \dfrac{440\sqrt{2}}{2} + 340 + \dfrac{410\sqrt{2}}{2}$.
Donc $KsKn = \sqrt{(\dfrac{440\sqrt{2}}{2} + 340 + \dfrac{410\sqrt{2}}{2})^2 + 10^2} \approx 941$ coudées.

6 – Igloo 2000

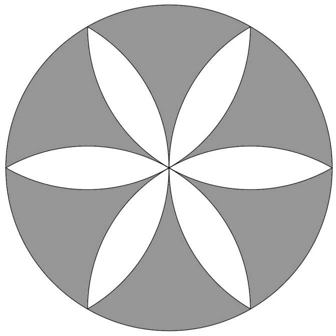
Pierre est en vacances à IGLOO 2000. Il est annoncé 1m30 de neige en bas de la station.
Pierre trouve un beau champ de neige et décide d'y tracer deux cercles de même centre dont le rayon du plus grand est le double du plus petit.
Entre les deux cercles, il creuse un fossé aux parois verticales et il place la neige au centre du petit cercle pour former un cône de révolution de base le petit cercle. Lorsqu'il a déblayé la neige sur une profondeur de 16 cm, il se redresse et s'aperçoit que le cône a exactement la même hauteur que lui debout dans le fossé.

Quelle est la taille de Pierre ?

Eléments de solution

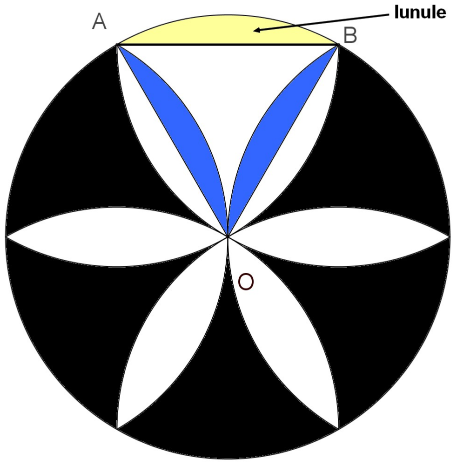
Volume de neige enlevée : $16 \times \pi \times \left[(2R)^2 - R^2\right] = 48\pi R^2$.
Volume du cône : $(\pi R^2 H)/3 = 48\pi R^2$.
Donc $H = 144$ cm
Taille de Pierre $= 144 + 16 = 160$ cm.
Pierre mesure 1m60.

7 – Fleur



Fleur veut peindre une rosace composée d'arcs de cercles de même rayon 1 m.
Le fond du motif est peint en noir et les pétales en blanc nacré.
Il faut un demi-litre de peinture pour peindre totalement une surface de 1 m^2.

Quelle quantité de peinture de chaque couleur utilisera-t-elle ?



Soit T l'aire du triangle OAB.
L l'aire d'une lunule.
S l'aire du secteur OAB.
$T = \sqrt{3}/2 \times 1)/2 = \sqrt{3}/4$.
$S = \pi R^2/6 = \pi/6$.
$L = S - T = \pi R^2/6 - \sqrt{3}/4 = \pi/6 - \sqrt{3}/4$.

Aire noire $= 6 \times (2\dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{\pi R^2}{6} = 3\sqrt{3} - \pi \approx 2$ m^2.

Aire blanche = aire du disque - aire noire $= \pi - (3\sqrt{3} - \pi) = 2\pi - 3\sqrt{3} \approx 1,09$ m^2.

Il faudra donc 2 litres de peinture blanche et 4 litres de peinture noire.

8 – Voyage scolaire

Une classe organise une vente de colliers et bracelets conçus par les élèves afin de financer un voyage scolaire.
L'école dispose de 40 pierres vertes façon émeraude et 300 perles nacrées.
La fabrication d'un collier nécessite 1 pierre et 10 perles.
La fabrication d'un bracelet nécessite 1 pierre et 6 perles.
Un collier rapporte un bénéfice de 4€ et un bracelet rapporte un bénéfice de 3€.

Combien de bracelets et de colliers faut-il confectionner pour garantir le meilleur bénéfice en supposant que tout sera vendu ?
De combien disposeront alors les élèves pour leur voyage ?

Solution experte

Notons x et y le nombre de colliers et de bracelets fabriqués
Les contraintes sont les suivantes :
$x > 0$ et $y > 0$ avec x et y entiers
$x + y \leqslant 40$ (contrainte de fabrication)
$10x + 6y \leqslant 300$ (contrainte de gravure)
Les programmes de fabrication sont donc représentés par les points entiers du polygone solution du système d'inéquations précédent.
Le bénéfice s'écrit $B(x, y) = 4x + 3y$
Il est constant sur des droites de niveau parallèles d'équations $y = -4x/3 + B/3$
Le bénéfice est maximum lorsque l'on prend la droite d'ordonnée à l'origine maximum, encore en contact avec le polygone. Cela se passe au sommet du polygone de coordonnées (15,25)
Le bénéfice maximum est alors de 135 euros

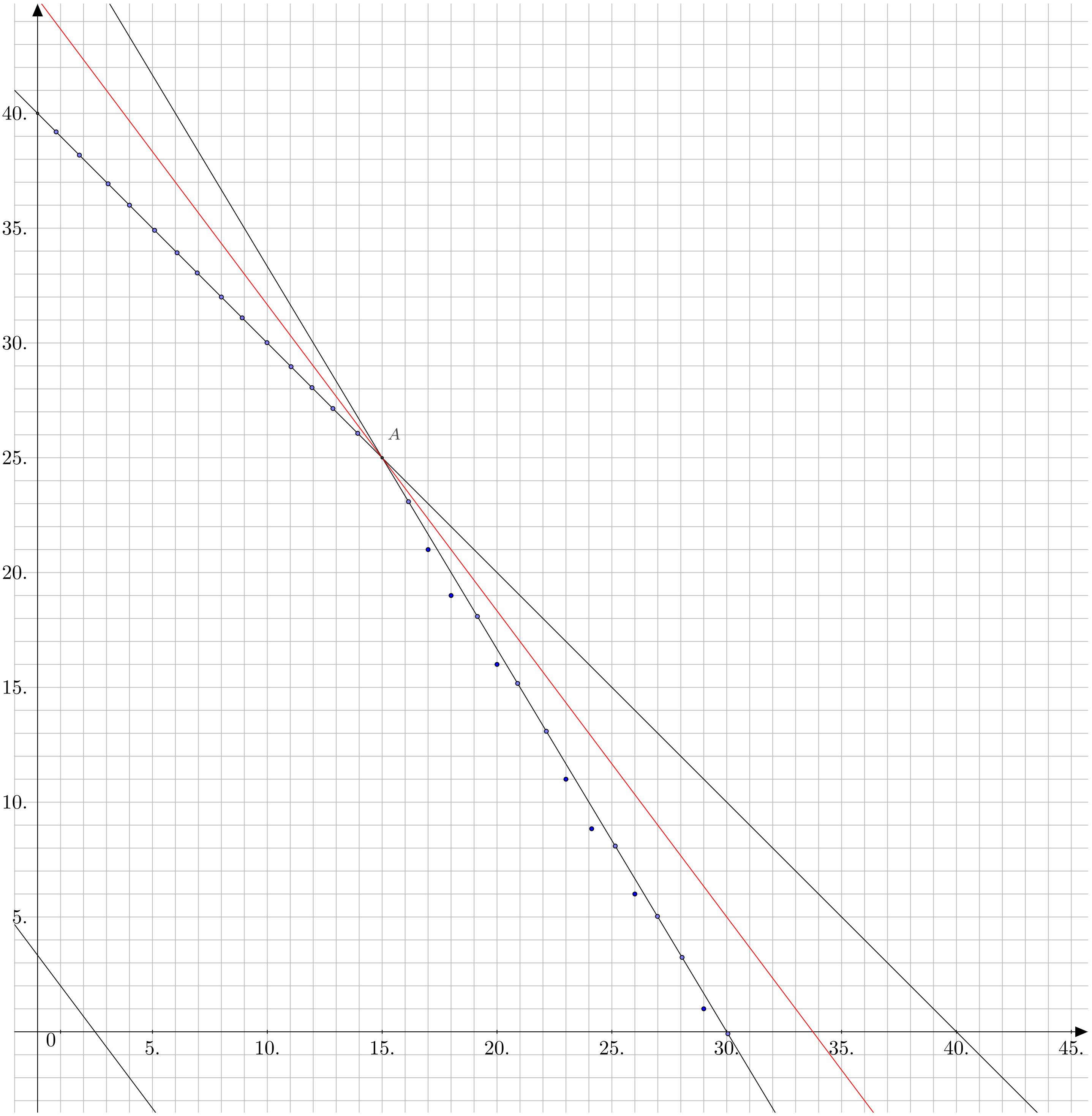
Solution mixte avec tableur

On fait varier le nombre de colliers de 0 à 40. On en déduit le nombre maximal de bracelets : $40 - x$ (puisqu'il n'y a que 40 pierres).
On peut ensuite regarder dans chaque cas le nombre de perles que cela représente.
On réajuste ensuite "à la main" le nombre de bracelets réalisable pour que le nombre de perles reste inférieur à 300.

Une fois ce réajustement opéré : on calcule le bénéfice : le meilleur bénéfice est de 135Ă pour 15 colliers et 25 bracelets.
Solution mixte avec graphique :
Notons x et y le nombre de colliers et de bracelets fabriqués
On peut s'aider des droites d'équations $x + y = 40$ et $10x + 6y = 300$ afin de représenter le nombre de colliers susceptibles de réaliser le meilleur bénéfice et de calculer pour chacun le bénéfice correspondant.

Nombre de colliers	nbre de bracelets maximum suivant le nbre	Réajustement suivant nombre de perles	Nbre de perles nécessaires	bénéfice correspondants
0	40	40	240	120
1	39	39	244	121
2	38	38	248	122
3	37	37	252	123
4	36	36	256	124
5	35	35	260	125
6	34	34	264	126
7	33	33	268	127
8	32	32	272	128
9	31	31	276	129
10	30	30	280	130
11	29	29	284	131
12	28	28	288	132
13	27	27	292	133
14	26	26	296	134
15	25	25	300	135
16	24	23	298	133
17	23	21	296	131
18	22	20	300	132
19	21	18	298	130
20	20	16	296	128
21	19	15	300	129
22	18	13	298	127
23	17	11	296	125
24	16	10	300	126
25	15	8	298	124
26	14	6	296	122
27	13	5	300	123
28	12	3	298	121
29	11	1	296	119
30	10	0	300	120
31	9		310	
32	8		320	
33	7		330	
34	6		340	
35	5		350	
36	4		360	
37	3		370	
38	2		380	
39	1		390	
40	0		400	

Représentation graphique sur Géogébra



9 – Bookmakers

Parier a toujours été une activité populaire en Angleterre. Les "bookmakers" donnent les cotes, encaissent les montants des paris et rétribuent les gagnants.
Une cote est une manière particulière d'exprimer la probabilité qu'un évènement se produise. Elle prend la forme d'une valeur défavorable contre une valeur favorable.
Par exemple, prenons un boxeur dont la cote est à 4 contre 3 sur un combat donné.
Le rapport de la probabilité de défaite sur la probabilité de victoire est alors égal à 4/3.
L'Euro 2016 est une compétition de football qui se déroulera en France en Juin 2016.
A quelques semaines de la compétition, un bookmaker donne : l'Allemagne favorite avec une cote de 5 contre 2. Il attribue à l'Espagne une cote de 10 contre 3 et à la France, pays organisateur, une cote de 4 contre 1. La probabilité de victoire de l'Albanie est 1/150.

Quelle est la probabilité de victoire de l'Allemagne ?
Quelle est la cote de l'Albanie ?
Quel pays, de la France ou de l'Espagne, a le plus de chance de gagner la compétition ?

Eléments de solutions
Notons V l'événement signifiant "victoire du pays considéré"

Nous avons les relations :
$p(V) + p(\overline{V}) = 1$ d'après le cours de probabilités.

$\dfrac{p(\overline{V})}{p(V)}$ = cote d'après la définition de la cote donnée dans l'énoncé

Pour l'Allemagne :
Avec la relation (2) $\dfrac{p(\overline{V})}{p(V)} = \dfrac{5}{2}$ donc $p(\overline{V}) = \dfrac{5}{2}p(V)$ et en utilisant (1), on obtient $\dfrac{7}{2}p(V) = 1$ et donc $p(V) = \dfrac{2}{7}$.

L'Allemagne a donc une probabilité de victoire de 2/7.

Pour la France et l'Espagne, le même raisonnement donne une probabilité de 3/13 pour la victoire de l'Espagne et une probabilité de 1/5 pour la victoire de la France.

Comme $3/13 \approx 0,23$ et $1/5 = 0,2$, l'Espagne a plus de chance de gagner que la France.

L'Albanie a une probabilité de victoire de 1/150.

$p(V) = 1/150$ et par suite $p(\overline{V}) = 149/150$. Le rapport des probabilités vaut donc 149.

La cote de l'Albanie est donc de 149 contre 1.