

RALLYE MATHÉMATIQUE DE FRANCHE-COMTÉ 2016

Qualifications du mardi 19 janvier 2016

Les classes de Troisième doivent résoudre les problèmes 1 à 6.

Les classes de Seconde doivent résoudre les problèmes 4 à 9.

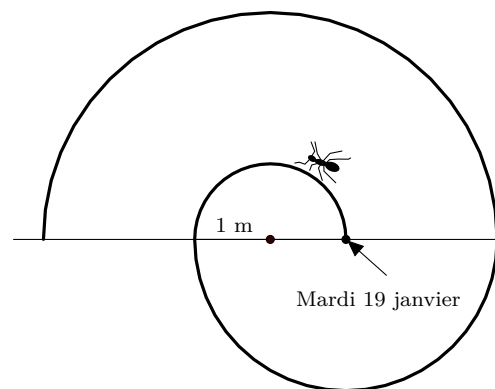
La classe doit rendre une seule réponse par problème traité **en expliquant la démarche**.

1 – Drôle de fourmi

Une fourmi très spéciale ne se déplace que sur des demi-cercles qui forment une spirale comme sur le dessin ci-contre. Le 1^{er} jour, elle parcourt un demi-cercle de rayon 1 mètre, le 2^{ème} jour de rayon 2 mètres, le 3^{ème} jour de rayon 3 mètres et ainsi de suite.

Le dimanche, elle se repose et ne se déplace pas.

Le mardi 19 janvier 2016, elle décide de prendre la route. Elle se demande quel jour et à quelle date, elle aura dépassé un kilomètre.



Elément de solution

		date	distance parcourue = $\pi \times R$	distance cumulée
1	er jour	mardi 19/01	3,141592654	
2	ème jour	mercredi 20	6,283185307	9,424777961
3	ème jour	jeudi 21	9,424777961	18,84955592
4	ème jour	vendredi 22	12,56637061	31,41592654
5	ème jour	samedi 23	15,70796327	47,1238898
	repos	dimanche 24	0	47,1238898
6	ème jour	lundi 25	18,84955592	65,97344573
7	ème jour	mardi 26	21,99114858	87,9645943
8	ème jour	mercredi 27	25,13274123	113,0973355
9	ème jour	jeudi 28	28,27433388	141,3716694
10	ème jour	vendredi 29	31,41592654	172,7875959
11	ème jour	samedi 30	34,55751919	207,3451151
	repos	dimanche 31	0	207,3451151
12	ème jour	lundi 1/02	37,69911184	245,044227
13	ème jour	mardi 2	40,8407045	285,8849315
14	ème jour	mercredi 3	43,98229715	329,8672286
15	ème jour	jeudi 4	47,1238898	376,9911184
16	ème jour	vendredi 5	50,26548246	427,2566009
17	ème jour	samedi 6	53,40707511	480,663676
	repos	dimanche 7	0	480,663676
18	ème jour	lundi 8	56,54866776	537,2123438
19	ème jour	mardi 9	59,69026042	596,9026042
20	ème jour	mercredi 10	62,83185307	659,7344573
21	ème jour	jeudi 11	65,97344573	725,707903
22	ème jour	vendredi 12	69,11503838	794,8229414
23	ème jour	samedi 13	72,25663103	867,0795724
	repos	dimanche 14	0	867,0795724
24	ème jour	lundi 15	75,39822369	942,4777961
25	ème jour	mardi 16	78,53981634	1021,017612

La fourmi aura dépassé 1 km le mardi 16 février 2016.

2 – Soirée crêpes

En se dirigeant vers l'hôtellerie du Franc Meunier, les trois mousquetaires discutent :

« Je ferais bien des crêpes pour la soirée de samedi » dit Athos, « mais c'est un peu long à préparer. »
« Je peux t'aider » dit Porthos, « dis-moi combien tu en fais et avec ma nouvelle crêpière j'en ferai trois fois plus que toi. »

« Je participe aussi » dit Aramis, « je peux en faire quatre de plus que Porthos. »

« En tous cas, il en faudra plus de cent » disent en cœur les mousquetaires.

D'Artagnan rejoignant ses trois amis ajoute : « Quoi qu'il en soit, faites-en autant à la farine de blé, de sarrasin et de châtaigne. En plus, il faut que ce soit un multiple de quatre ! »

Combien de crêpes chacun des trois mousquetaires va-t-il devoir préparer ?

Elément de solution

x	$4x$	$4x+7$	somme	somme/12
1	3	7	11	0,91666667
2	6	10	18	1,5
3	9	13	25	2,08333333
4	12	16	32	2,66666667
5	15	19	39	3,25
6	18	22	46	3,83333333
7	21	25	53	4,41666667
8	24	28	60	5
9	27	31	67	5,58333333
10	30	34	74	6,16666667
11	33	37	81	6,75
12	36	40	88	7,33333333
13	39	43	95	7,91666667
14	42	46	102	8,5
15	45	49	109	9,08333333
16	48	52	116	9,66666667
17	51	55	123	10,25
18	54	58	130	10,83333333
19	57	61	137	11,41666667
20	60	64	144	12
21	63	67	151	12,58333333
22	66	70	158	13,16666667
23	69	73	165	13,75
24	72	76	172	14,33333333

Soit x le nombre de crêpes préparées par Athos, le nombre total de crêpes sera de $7x + 4$ et ce nombre doit être un multiple de 3 et de 4 donc de 12, supérieur à 100.

Le premier nombre solution est 144.

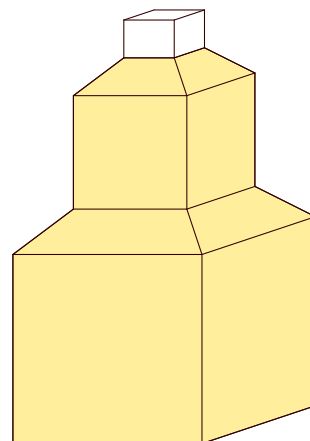
Athos devra prépaer 20 crêpes, Porthos 60 et Aramis 64.

Ils auront 144 crêpes en tout et 48 de chacune des farines.

3 – Flacon de parfum

Anaïs a conçu un flacon de parfum formé de trois cubes et deux troncs de pyramides. Les troncs de pyramides ont une hauteur de 1 cm. Le cube de base a une arête de longueur 5 cm. Les faces des troncs de pyramides sont inclinées de 45° par rapport à l'horizontale.

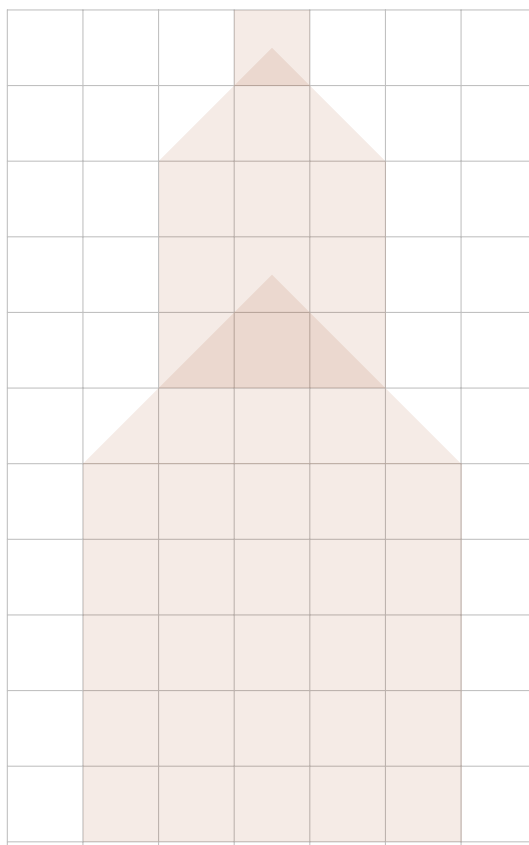
Quelle quantité exacte de parfum (en cl) ce flacon pourra-t-il contenir sachant qu'il ne sera rempli que jusqu'à la base du dernier cube ?



Elément de solution

Eléments de correction Flacon de parfum

Voici une coupe du flacon de parfum :



Notre flacon est composé de deux cubes et de deux troncs de pyramide (on ne compte pas le cube supérieur.

Les faces sont inclinées à 45° le cube intermédiaire mesure 3 cm de côté.

Les volumes des cubes sont respectivement de 5^3 cm^3 et 3^3 cm^3

Pour les volumes des troncs de pyramide, on utilise la différence entre deux volumes de pyramide : $\mathcal{V}_{\text{pyramide}} = \frac{\mathcal{B} \times \text{hauteur de pyramide}}{3}$ où $\mathcal{B}$ représente l'aire de la base de la pyramide. On obtient donc :

$$1. \text{ Pour la pyramide inférieure : } \frac{5^2 \times 2.5}{3} - \frac{3^2 \times 1.5}{3}$$

$$2. \text{ Pour la pyramide supérieure : } \frac{3^2 \times 1.5}{3} - \frac{1^2 \times 0.5}{3}$$

$$\text{Ce qui nous donne : } \mathcal{V}_{\text{Flacon}} = 5^3 + 3^3 + \frac{5^2 \times 2.5}{3} - \frac{3^2 \times 1.5}{3} + \frac{3^2 \times 1.5}{3} - \frac{1^2 \times 0.5}{3} \simeq 172.66$$

On peut donc le remplir avec environ 173 ml de parfum

4 – Laissons le hasard décider

L'animateur d'un camp de vacances où séjournent 36 adolescents, décide d'attribuer à chacun d'eux un numéro entre 1 et 36.

Sur le ton de la plaisanterie, il leur propose qu'un dé à 6 faces, (*numérotées de 1 à 6*), désignera ceux qui devront éplucher les pommes de terre pour la soirée moules/frites prévue le soir !

Il lancera le dé et seuls ceux ayant un numéro multiple du nombre désigné par le dé seront de corvée d'épluchage. Quelques ados poussent un soupir de soulagement en étant presque sûr de ne pas être de corvée et d'autres au contraire râlent en disant "C'est injuste on est presque sûr d'avoir à éplucher les patates !"

Est-il possible que toute la "colo" soit de corvée ?

Donnez le maximum d'arguments des ados mécontents.

Élément de solution

Début de Solution :

1) Si le dé tombe sur le chiffre 1, toute la colo sera de corvée car tous les nombres entiers sont multiples de 1.

2) Faisons la liste des diviseurs entre 1 et 6 des nombres entiers entre 1 et 39

1	1	14	1-2	27	1-3
2	1-2	15	1-2-3-5	28	1-2-4
3	1-3	16	1-2-4	29	1
4	1-2-4	17	1	30	1-2-3-5-6
5	1-5	18	1-2-3-6	31	1
6	1-2-3-6	19	1	32	1-2-4
7	1	20	1-2-4-5	33	1-3
8	1-2-4	21	1-3	34	1-2
9	1-3	22	1-2	35	1-5
10	1-2-5	23	1	36	1-2-3-4-6
11	1	24	1-2-3-4-6	37	1
12	1-2-3-4-6	25	1-5	38	1-2
13	1	26	1-2	39	1-2-3

5 – La découpe du chef

Philippe, pâtissier renommé de Besançon, doit réaliser un gâteau pour la fête de la science.

Pour cela, il confectionne une boule de chocolat noir de 5 cm de rayon. Elle est entourée d'un délicieux biscuit de Savoie formant un cube de 10 cm d'arête.

Il le découpe en tranches d'épaisseur 1 cm parallèles à une face du cube, puis les pose chacune à plat sur une assiette.

Représenter chacune des faces de la cinquième tranche.

Quel est le nombre maximum d'assiettes différentes ?

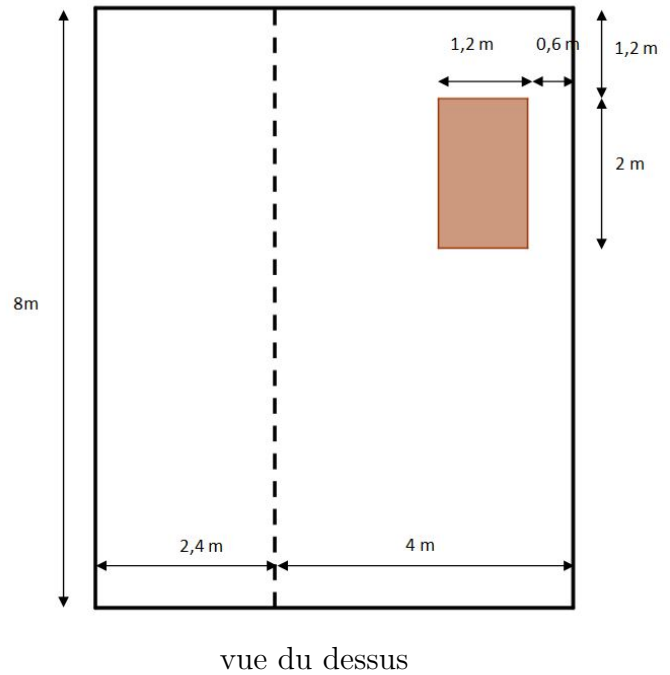
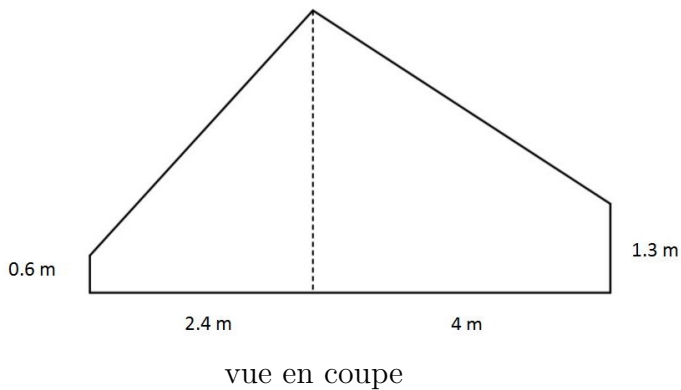
6 – Le loft

La surface privative, appelée superficie Carrez (d'après la loi Carrez de 1996), est la superficie des planchers des locaux après déduction des surfaces :

- a) occupées par les murs, cloisons, marches et cages d'escaliers.
- b) des parties de locaux d'une hauteur inférieure à 1,80 m.

Le loft représenté ci-dessous a une surface au sol rectangulaire de 6,40 m sur 8 m. La hauteur maximale est 3,80 m. Les parties au sol de part et d'autre du pied de la ligne de faite mesurent 4 m et 2,4 m.

L'arrivée de l'escalier dans le loft est un rectangle de 1,20 m sur 2 m.

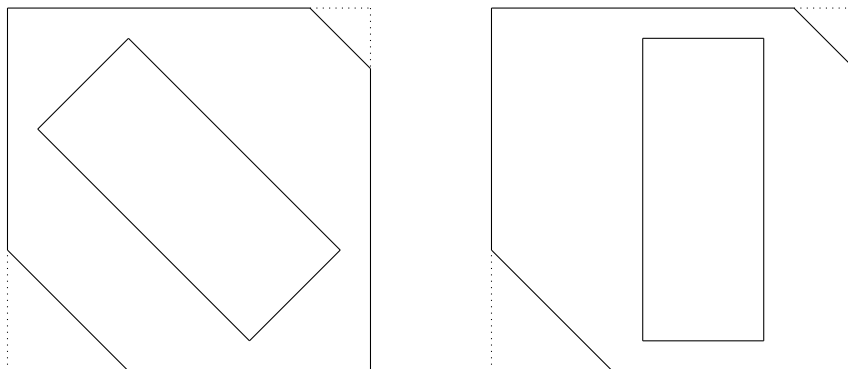


Quelle est la surface Carrez du loft ?

7 – La piscine de Georges

Georges dispose d'un terrain hexagonal devant sa maison. Cet hexagone est inscrit dans un carré de 29 mètres de côté. Les quatre angles obtus mesurent 135° . Les côtés relatifs à chaque angle droit mesurent l'un 19 mètres et l'autre 24 mètres.

Ancien champion de natation, Georges souhaite installer une piscine. Le fabricant lui propose plusieurs modèles, mais celui qui retient l'attention de Georges est le bassin de 25 mètres sur 15 mètres. Georges envisage deux dispositions dans lesquelles la longueur de la piscine est parallèle à un des côtés du terrain.



Georges pourra-t-il profiter de la piscine de ses rêves ?

Éléments de solutions

Dans la disposition 2, la largeur disponible n'est que de $29 - 10 - 5$, soit 14 mètres. Le bassin de 25 mètres sur 15 mètres ne pourra donc pas être édifié dans cette disposition.

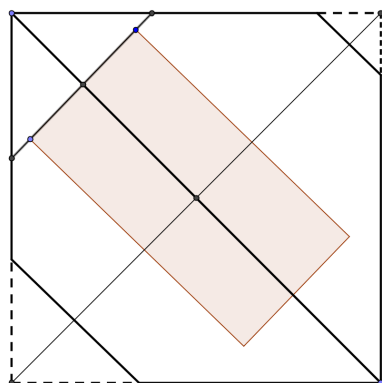
Dans la disposition 1, supposons la piscine centrée (le centre du bassin est le centre du carré dans lequel le terrain est inscrit) et supposons les côtés de la piscine parallèles aux diagonales de ce même carré initial. La demi-diagonale mesurant $29\sqrt{2}/2$, soit environ 20,5 mètres, nous pouvons fixer $OH = 12,5$.

Le triangle CMN est isocèle rectangle et $CH = 29\sqrt{2}/2 - 12,5$.

Comme H est le centre du cercle circonscrit à ce triangle, l'hypoténuse MN vaut alors : $MN = 29\sqrt{2}/2 - 12,5$, soit environ 16,01 m.

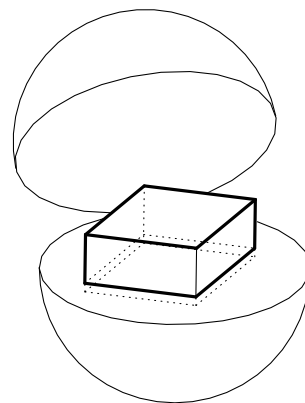
Dés lors, on peut prendre A et B sur [MN] avec $BH = HA = 7,5$ et donc $AB = 15$

Le bassin de 25 m sur 15 m pourra être édifié en utilisant la disposition 1.



8 – Travail d'orfèvre

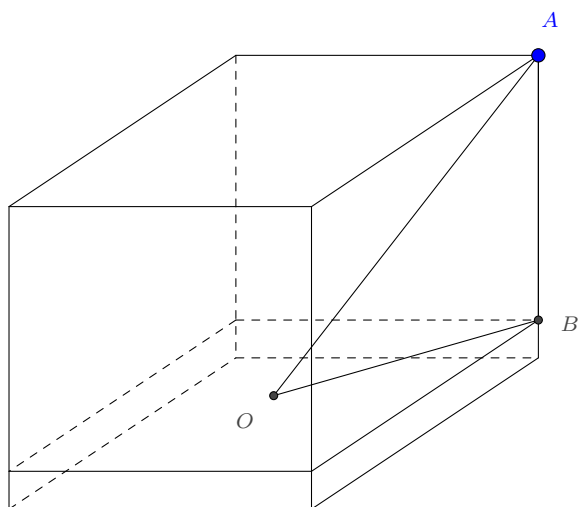
Pour récompenser un concours scientifique sur les travaux de Jean-Baptiste Delambre et Pierre Méchain*, Priscilla a fabriqué un cube d'arête 1792 dixièmes de millimètre qu'elle veut enchâsser dans une sphère. Elle veut que le huitième de la hauteur du cube soit encastré dans la demi-sphère inférieure.



Quel doit être le rayon minimum de cette sphère ?

* En 1792 ils ont été chargés par l'Assemblée nationale française de préciser la mesure de la méridienne entre Dunkerque et Barcelone.

Éléments de solutions

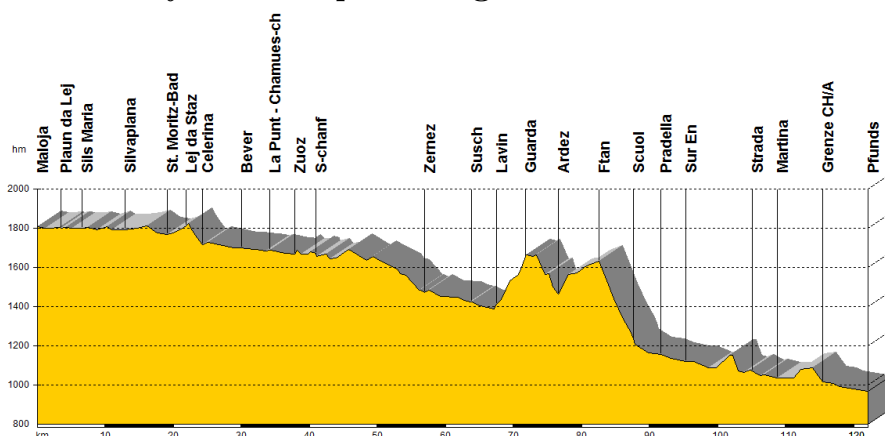


AB mesure $\frac{7}{8}$ de 1792 donc 1568 dixièmes de millimètre. OB mesure la moitié de la diagonale du carré de côté 1792 donc $1792 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$. OAB est un triangle rectangle en B et donc le rayon de la sphère est de : $\sqrt{(1792 \times \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + 1568^2} = 2016$ **dixièmes de millimètre.**

9 – Mortelle randonnée

Elle paraissait facile, cette étape de 76 km entre Maloja et Ardez, situées en Engadine (vallée de l'Inn en Suisse). En effet, un quart du parcours était montant et le reste était descendant. Et pourtant, à l'arrivée, Eugène le randonneur cycliste a constaté que son temps de montée était de 50% supérieur à son temps de descente. Il faut dire qu'à cause de la charge de son vélo, Eugène ne monte qu'à 8km/h en moyenne.

Quelle était la vitesse moyenne à laquelle Eugène a roulé en descente ?



Eléments de solutions

La longueur du parcours montant est le quart de la longueur totale. Elle est donc de 19 km.

La longueur du parcours descendant est donc, par différence, de 57 km.

Si Eugène monte à 8km.h^{-1} , le temps de montée, en heures, est donc de $19/8$.

Son temps de montée est de 50% supérieur à son temps de descente, donc son temps de descente t vérifie :
 $(1+1/2) t = 19/8$, soit $t = 38/24$

Enfin, sa vitesse en descente est donc de $57/t$, soit $57 \times 24 / 38 = 36$

En descente, la vitesse moyenne d'Eugène est de 36 km.h^{-1}