RALLYE MATHÉMATIQUE DE FRANCHE-COMTÉ 2017
Qualifications du mardi 17 janvier 2017

Les classes de Troisième doivent résoudre les problèmes 1 à 6.
Les classes de Seconde doivent résoudre les problèmes 4 à 9.
La classe doit rendre une seule réponse par problème traité **en expliquant la démarche**.

1 – Le temps révolutionnaire

C'est une des inventions les plus remarquables de la révolution française mais elle ne dura que 500 jours! Pourtant les scientifiques la réclamaient depuis des années, et elle nous aurait bien simplifié la vie.
Durant la Première République, le temps décimal fut officiellement introduit en France par le décret XI du 4 frimaire de l'An II (24 novembre 1793) :
Une journée, de minuit à minuit, était divisée en 10 heures, une heure en 100 minutes décimales et une minute en 100 secondes décimales.
Des horloges révolutionnaires furent construites avec ce nouveau partage du temps.

Une horloge murale comtoise à Morbier

Une montre à gousset

Aujourd'hui, on fabrique encore des montres décimales pour le "fun" !

A midi, aujourd'hui, quelle heure marque une horloge révolutionnaire ?
Et s'il est 9h15, aujourd'hui, quelle heure indique une horloge révolutionnaire ?
Trouvez quelle heure il est sur l'horloge à Morbier.

Eléments de solution
A midi, l'horloge révolutionnaire indique 5h00.
1 journée $= 24 \times 60$ min $= 1440$ min
Temps révolutionnaire : 1j $= 10 \times 100$ minR $= 1000$ minR

9h15 $= 9 \times 60 + 15 = 555$ min

L'horloge de Morbier indique 8hR20minR = 820 minR

min	1440	555	y
minR	1000	x	820

$$x = \frac{555 \times 1000}{1440} = \frac{4625}{12} \approx 385,42$$

Donc à 9h15, au temps révolutionnaire, une horloge révolutionnaire indique 3hR85minR42sR.

$$y = \frac{820 \times 1440}{1000} = 1180,8$$

$1180 = 19 \times 60 + 40$ et $0,8 \times 60 = 48$

Donc à 8hR20minR, une horloge actuelle indique 19h40min48s

2 – Chasse aux Bémaths

Paul, le meilleur élève de la classe en programmation informatique, a inventé un jeu de chasse aux Bémaths pour ses camarades. Pierre est très fier de sa récolte. Il fait les remarques suivantes à ses camarades : "J'en ai attrapé entre 500 et 600 exemplaires ! Si je les range 2 par 2, il m'en reste un, si je les range 3 par 3 il m'en reste 2, si je les range 4 par 4, il m'en reste 3, si je les range 5 par 5, il m'en reste 4, si je les range 6 par 6 il m'en reste 5 et si je les range 7 par 7, il ne m'en reste aucun ! "

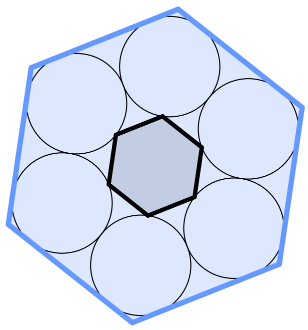
Combien Pierre a-t-il attrapé de Bémaths ?
Expliquez votre réponse.

Eléments de solution

Soit N le nombre cherché.
Le nombre N + 1 est un multiple de 2, 3, 4, 5 et 6 donc un multiple de 60.
Les multiples de 60 entre 501 et 601 sont : 540 et 600.
On a $539 = 7 \times 77$ et $599 = 7 \times 85 + 4$
Donc Pierre a attrapé 539 Bémaths.

3 – Fresque

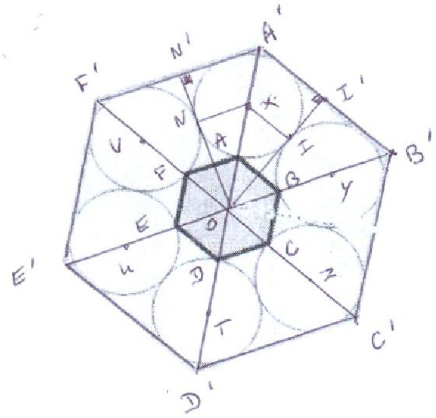
David doit tracer une fresque dans la cour de son collège. Elle est composée de deux hexagones réguliers de même centre et dont les côtés sont parallèles deux à deux. Le côté du petit hexagone mesurera un mètre. Puis il devra placer des cercles tangents deux à deux et tangents aux côtés du grand hexagone comme l'indique le dessin ci-contre.



Donnez un programme de construction à David, sachant qu'il a à sa disposition une ficelle d'un mètre de long, une équerre avec un angle de 30^o et une planche d'un peu plus de 3 mètres pour tracer des traits droits. Réalisez un dessin à l'échelle 1/20.

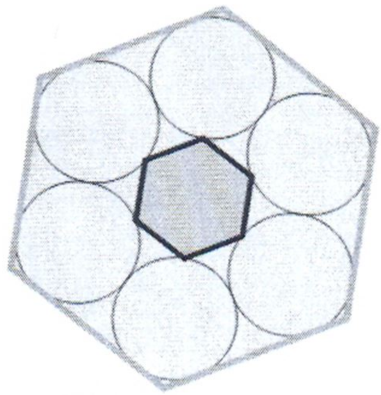
Eléments de solution

1- Etude de la configuration.
ABCDEF est le premier hexagone régulier de côté 1m.
La symétrie de la configuration permet de faire une étude dans le triangle (A'OB')
AOB est un triangle équilatéral de côté 1m.
A'OB' est un triangle équilatéral de hauteur [OI']. I étant le point de contact des deux demi cercles de centre X et Y.
(A'B') est tangente à ces deux demi-cercles. Le reste de la configuration est obtenue en effectuant des rotations de centre 0, d'angle 60^o.
I est le centre du triangle (A'OB'). $A'B' = 3AB$. Si $AB = 1$ m alors $A'B' = 3$ m et $B'E' = 6$ m.



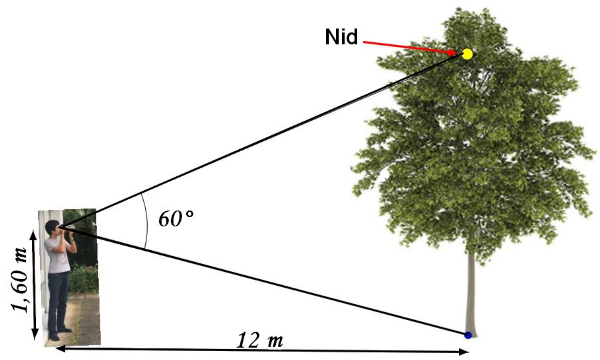
2- Tracé de la figure.

Tracé du cercle de centre O et de rayon 1m. Sur celui-ci, on trace un hexagone régulier ABCDEF en utilisant les outils indiqués dans l'énoncé.
Tracé du triangle équilatéral (OA'B') de centre I, tracé du demi-cercle de diamètre [BB'] passant par I , tracé du demi-cercle de diamètre [AA'] passant par I.
La figure est complétée par rotation de 60^o.
Réaliser un dessin à l'échelle 1/20 signifie que 1m sera représenté par 5cm.
La plus grande dimension de ce dessin est donc de 30cm.
Le dessin sera réalisé sur une feuille de format A3 ou deux feuilles A4 collées.
Au besoin : on pourra aussi prendre une échelle de 1/40



4 – Tombé du nid

Arthur est tombé de l'arbre de son jardin. Il se retrouve à terre intact après une chute impressionnante.
Il lève la tête et regarde le nid qu'il a voulu attraper. Pour impressionner ses amis il cherche à calculer la hauteur de sa chute. Son équerre lui permet de mesurer des angles de 30^o et de 60^o.
Quand il utilise l'angle de 60^o , il doit se situer à 12 m pour voir l'arbre du pied jusqu'au nid "dans son équerre" comme sur le croquis (non à l'échelle) ci-contre :

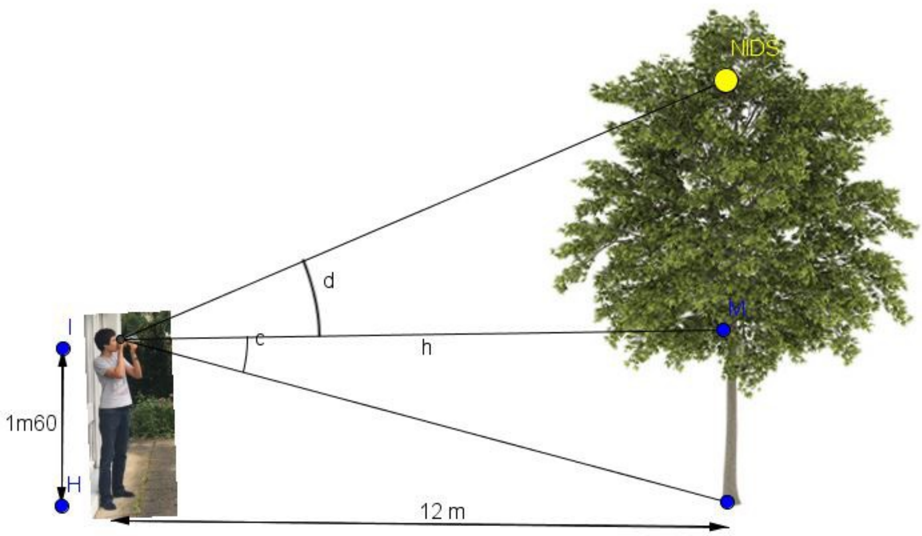


Sachant que son oeil se situe à $1,60$ m du sol, **quelle est la hauteur du nid ?**

Eléments de solution

On commence par rechercher les angles c et d (cf figure ci-dessous)
$\tan c = \dfrac{1.6}{12}$ et $c \simeq 7.59$ ainsi $d = 60 - 7.59 = 52.41$ puis :

hauteur $- 1.6 = 12 \times \tan 52.41$ et la hauteur du nid est à 17.2 mètres



5 – Top 14

	Championnat top 14		2014-2015 : 20ème journée		
Equipe locale	Nombre de points marqués	Nombre d'essais marqués	Equipe visiteuse	Nombre de points marqués	Nombre d'essais marqués
Clermont	31	1	Bordeaux	23	1
Bayonne	21	0	Castres	19	1
Toulouse	31	2	Montpellier	23	1
La Rochelle	35	3	Oyonnax	20	2
Stade Français	21	3	Grenoble	30	2
Lyon O.U	14	1	Toulon	22	3
Brive	36	3	Racing métro	12	0

1) Les colonnes 2 et 5 du tableau indiquent les scores des 7 matchs de la $20^{ème}$ journée du top 14 de la saison 2014-2015 (championnat de France de rugby). Un essai transformé vaut 7 points, un essai non transformé vaut 5 points, et un coup de pied réussi (pénalité, drop) vaut 3 points.

Combien d'essais transformés y a-t-il eu lors du match La Rochelle-Oyonnax ?

2) Dans un championnat, chaque équipe rencontre exactement deux fois tous ses adversaires (match aller et match retour). Le classement du championnat est établi avec la règle suivante :
Dans le cas d'un match nul, 2 points sont attribués à chaque équipe. Sinon l'équipe gagnante obtient 4 points et l'équipe perdante 0 point. D'autre part, 1 point de bonus défensif est accordé à l'équipe perdante si l'écart avec le vainqueur n'excède pas 5 points. Enfin, 1 point de bonus offensif est accordé à toute équipe ayant marqué au minimum 3 essais de plus que son adversaire.
Au classement final du top 14, c'est-à-dire à la fin du championnat, le cumul des points obtenus par les 14 équipes a été de 839.

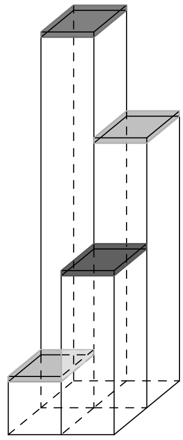
Combien de points de bonus ont-ils été attribués ?

Eléments de solution

1) Sur le match La Rochelle-Oyonnax :
35 points marqués pour La Rochelle et 3 essais
0 essai transformé : $35 - 5 \times 3 = 20$ non divisible par 3 => impossible
1 essai transformé : $35 - 5 \times 2 - 7 = 18$ => 6 coup de pieds réussis
2 essais transformé : $35 - 5 - 2 \times 7 = 16$ => impossible
7 essais transformés => impossible
Donc seule possibilité : 1 essai transformé pour La Rochelle
Du côté d'Oyonnax : seule possibilité : les deux essais ont été transformés.
Résultat : au total : 3 essais transformés

2) 26 jours de championnat, 7 matchs par jour et 4 point par match : $26 \times 7 \times 4 = 728$
$839 - 728 = 111$ points bonus.

6 – Colonnes de Besac



Cette sculpture est composée de quatre colonnes qui ont la forme de parallélépipèdes rectangles disposés comme l'indique le dessin ci-contre.
Elles sont en bronze, elles ont toutes une base carrée de 1 dm de côté et les hauteurs sont, respectivement, 1 dm, 3 dm, 5 dm, et 7 dm.

Chacune d'elles est coiffée d'un petit parallélépipède rectangle de même base et de 1 cm de hauteur. Le premier et le troisième chapeaux sont en cuivre, le deuxième et le quatrième sont en zinc.

Calculez la masse de l'ensemble sachant que les colonnes sont pleines et que la masse volumique du bronze les constituant est de 8 500 kg/m^3, celle du cuivre est de 8 920 kg/m^3 et celle du zinc est de 7 150 kg/m^3.

Eléments de solution

On cherche la masse de bronze utilisé.
Volume de la colonne 1 = 1 dm^3
Volume de la colonne 2 = 3 dm^3
Volume de la colonne 3 = 5 dm^3
Volume de la colonne 4 = 7 dm^3
Volume de bronze = 16 dm^3
La masse volumique du bronze indique que 1 m^3, soit 1 000 dm^3 pèse 8500 kg donc 1 dm^3 pèse 8,5 kg.
Donc il y a $16 \times 8,5 = 136$ kg de bronze.

On cherche la masse de cuivre utilisé.
1 cm = 0,1 dm
Volume des deux chapeaux en cuivre = 0,2 dm^3
La masse volumique du cuivre indique que 1 m^3, soit 1 000 dm^3 pèse 8 920 kg donc 1 dm^3 pèse 8,92 kg.
Donc il y a $0,2 \times 8,92 = 1,784$ kg de cuivre.

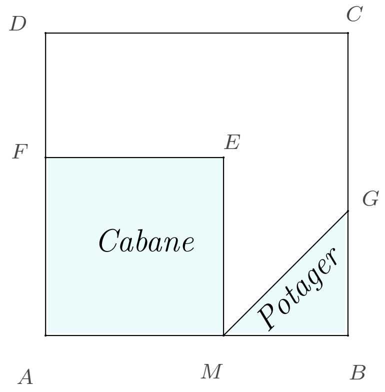
On cherche la masse de zinc utilisé.
Volume des deux chapeaux en zinc = 0,2 dm^3
La masse volumique du zinc indique que 1 m^3, soit 1 000 dm^3 pèse 7 150 kg donc 1 dm^3 pèse 7,15 kg.
Donc il y a $0,2 \times 7,15 = 1,43$ kg de zinc.

La masse totale de la sculpture est de 136 + 1,784 + 1,43 = 139,214 kg.

7 – Cabane du jardin

Philippe dispose d'un terrain carré.
Il veut tracer un emplacement pour une cabane de base carrée et pour un potager attenant qui aura la forme d'un triangle rectangle isocèle comme l'indique la figure.

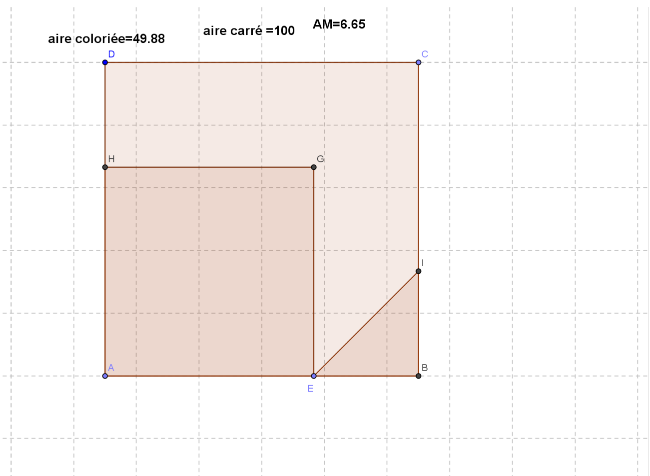
Où placer M sur [AB] pour que l'aire coloriée soit égale à la moitié de l'aire du grand terrain ?



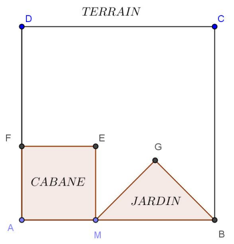
Eléments de solution

On pose $AM = x$. L'aire du terrain carré est de 100 m^2.
L'aire au sol de la cabane est x^2
L'aire du potager est $((10 - x)^2)/2$
Donc $x^2 + ((10 - x)^2)/2 = 50$; soit $2x^2 + (10 - x)^2 = 100$;
$2x^2 + 100 - 20x + x^2 = 100$
$3x^2 - 20x = 0$; $x(3x - 20) = 0$; $x = 0$ ou $x = 20/3$;
Pour $x = 0$; la cabane n'existe pas, donc $x = 20/3$; on place M à environ 6,67m de A sur le segment [AB].

Solution géogebra :



Prolongement
On dispose d'un terrain carré de 10m de côté.
On veut y tracer un emplacement pour une cabane de base carrée et d'un jardin attenant qui aura la forme d'un triangle rectangle isocèle comme l'indique la figure.
Où placer M sur [AB] pour que l'aire coloriée soit égale à la moitié de l'aire du grand terrain ?



Solution
On pose $AM = x$
$2MG^2 = (10-x)^2$; $MG^2 = ((10-x)^2)/2$
Aire coloriée $= x^2 + ((10-x)^2)/4$
$x^2 + ((10-x)^2)/4 = 50$; $4x^2 + (10-x)^2 = 200$; $4x^2 + 100 - 20x + x^2 = 200$;
$5x^2 - 20x - 100 = 0$; $x^2 - 4x - 20 = 0$; $x^2 - 4x + 4 - 24 = 0$; $(x-2)^2 = 24$
$x - 2 = \sqrt{24}$; $x = 2 + \sqrt{24} \approx 6,9$ m

8 – Grattage

Pour doper sa fréquentation du dimanche matin, un hypermarché donne au passage en caisse à chaque client, un ticket jeu pour chaque vingtaine d'euros dépensés.

Chaque ticket présente 6 cases grisées grattables. Les six cases masquent un produit du magasin, mais sur chaque ticket, trois cases et trois seulement masquent le même produit. Le joueur ne peut gratter que trois cases. Il gagne si les trois cases grattées montrent le même produit.

1. Marc a dépensé 23 euros et a donc reçu un ticket jeu.
   Quelle est la probabilité qu'il gagne au grattage ?

2. Claire a rempli son caddy pour 205 euros.
   Elle a donc reçu 10 tickets jeu.

Sauriez-vous évaluer la probabilité qu'elle perde 10 fois au grattage ?

Eléments de solution

De combien de manières peut on choisir les trois cases à gratter parmi les six possibles.
Si on numérote les 6 cases de 1 à 6, les choix sont les suivants :
123 234 345 456
124 235 346
125 236 356
126 245
134 246
135 256
136
145
146
156

Il ya 20 choix, tous équiprobables donc la probabilité que Marc gagne au grattage est de 1/20, soit 0,05.

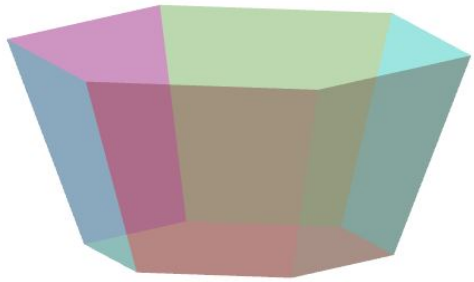
Remarque : le dénombrement peut se faire avec un arbre de choix.
20 est le nombre de combinaisons de 3 parmi 6

La probabilité que Claire perde avec son premier ticket est de 19/20 puisqu'il y a 19 mauvaises manières de gratter trois cases.
Pour chacun de ses tickets la probabilité de perdre au grattage est 19/20 (les expériences sont indépendantes !)
La probabilité de perdre 10 fois est alors $(19/20)^{10}$, soit environ 0,60

Remarque : cette question est hors programme. De bons élèves de seconde peuvent-ils intuitivement trouver la bonne réponse en multipliant les probabilités de perdre à chaque ticket gratté ?

9 – Moule à gâteau

Un moule à gâteau est composé de la façon suivante :



- sa base est un hexagone régulier de côté 2 cm.
- ses faces latérales sont des trapèzes isocèles dont les bases mesurent 2 cm et 5 cm et les côtés non parallèles 4 cm.

Déterminez le volume d'un tel moule.
Combien de gâteaux peut-on faire avec un litre de pâte ?

Eléments de solution

Thalès : $\frac{AO}{AC} = \frac{AB}{AD} = \frac{OB}{CD} = \frac{2}{5}$ car les bases sont des hexagones réguliers de longueurs 2 et 5.

$BD = 4$
Donc $\frac{AB}{AB+4} = \frac{2}{5}$; $2(AB+4) = 5AB$; $8 = 3AB$ et $AB = \frac{8}{3}$.

Pythagore
$AO^2 = AB^2 - OB^2$
$AO^2 = \frac{8}{3}^2 - 2^2$
$AO^2 = \frac{64}{9} - 4$; $AO = \frac{\sqrt{28}}{3}$

$AC = \frac{\sqrt{28}}{3} \times \frac{5}{2} = \frac{5\sqrt{28}}{6}$

Hauteur de la grande base
$5^2 - (\frac{5}{2}^2 = 25 \times \frac{3}{4}$, donc hauteur $= \frac{5\sqrt{3}}{2}$

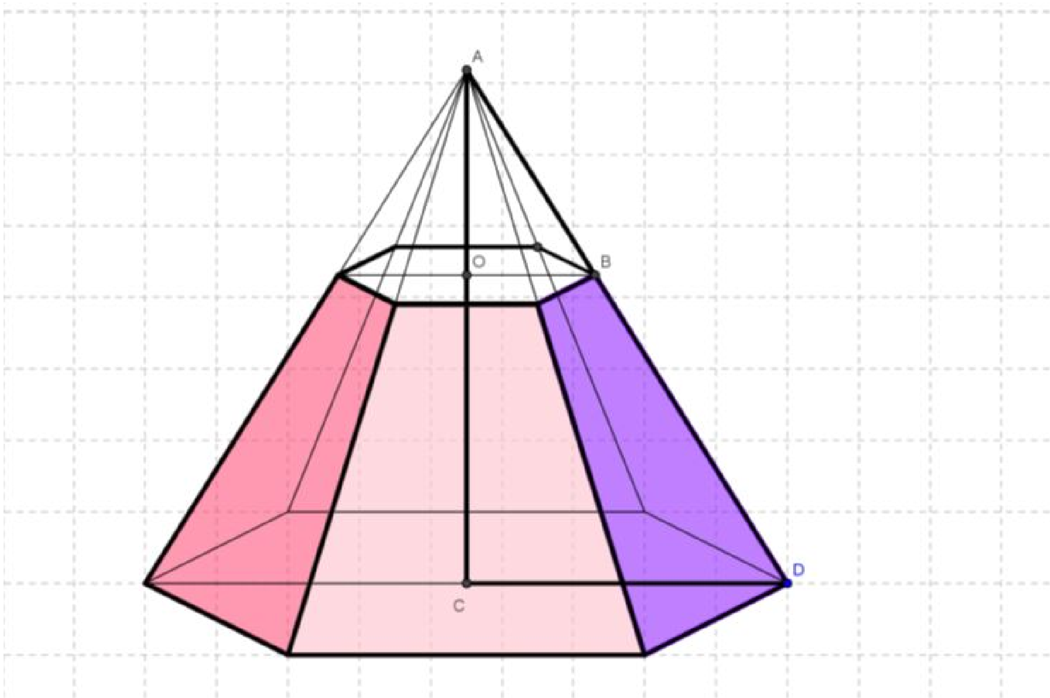
$$\text{Aire base} = 6 \times \frac{5 \times \frac{5\sqrt{3}}{2}}{2} = 75\sqrt{32}$$

$$\text{Volume grande pyramide} = \frac{\frac{75\sqrt{3}}{2} \times \frac{5\sqrt{28}}{6}}{3} = \frac{12584}{12} = \frac{125\sqrt{21}}{6}$$

Volume petite pyramide $= (\frac{2}{5})^3 \times$ volume grande pyramide

Volume tronc $=$ volume grande pyramide $1 - (\frac{2}{5})^3 =$ volume grande pyramide $\times \frac{117}{125}$

$$\text{Volume tronc} = 125\sqrt{216} \times \frac{117}{125} = \frac{117\sqrt{21}}{6} = \frac{39\sqrt{21}}{2} \approx 89,36 \text{ cm}^3.$$


A
O
B
C
D