Puissantes mathématiques

H. Languereau, 12 juin 2013

IREM de Franche-Comté

Qu'est ce que faire des mathématiques ?

Que sont les mathématiques ?

« La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes. »

Henri Poincaré (1854-1912)

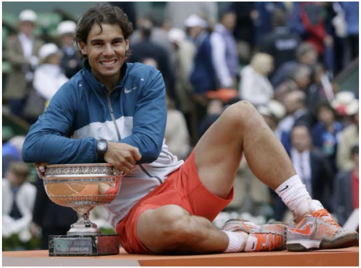
Un tournoi est une compétition qui se déroule en plusieurs tours.

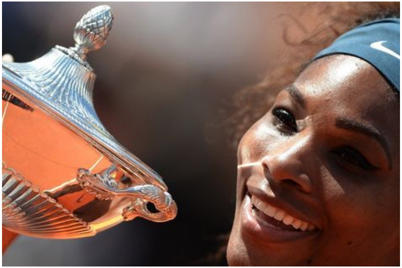
À chaque tour, chaque joueur rencontre un autre joueur.

Le perdant est éliminé et le vainqueur passe au tour suivant.

Le tournoi est terminé lorsqu'il reste un unique joueur.

Combien Rafael Nadal et Serena Williams ont-ils joué de matchs ?





128 joueurs sont engagés :

- premier tour : 128 joueurs ; 64 passent au deuxième tour ;
- deuxième tour 64 joueurs ; 32 passent au troisième tour ;
- troisième tour : 32 joueurs ; 16 passent au quatrième tour ;
- quatrième tour : 16 joueurs ; 8 passent au quatrième tour ;
- cinquième tour : 8 joueurs ; 4 passent au quatrième tour ;
- sixième tour : 4 joueurs ; 2 passent au quatrième tour ;
- septième tour : 2 joueurs ; un vainqueur.

Tournoi de tennis

128 joueurs sont engagés :

- premier tour : 128 joueurs ; 64 passent au deuxième tour ;
- deuxième tour 64 joueurs ; 32 passent au troisième tour ;
- troisième tour : 32 joueurs ; 16 passent au quatrième tour ;
- quatrième tour : 16 joueurs ; 8 passent au quatrième tour ;
- cinquième tour : 8 joueurs ; 4 passent au quatrième tour ;
- sixième tour : 4 joueurs ; 2 passent au quatrième tour ;
- septième tour : 2 joueurs ; un vainqueur.

128 joueurs sont engagés :

- premier tour : 128 joueurs ; 64 passent au deuxième tour ;
- deuxième tour 64 joueurs ; 32 passent au troisième tour ;
- troisième tour : 32 joueurs ; 16 passent au quatrième tour ;
- quatrième tour : 16 joueurs ; 8 passent au quatrième tour ;
- cinquième tour : 8 joueurs ; 4 passent au quatrième tour ;
- sixième tour : 4 joueurs ; 2 passent au quatrième tour ;
- septième tour : 2 joueurs ; un vainqueur.

Tournoi de tennis

128 joueurs sont engagés :

- premier tour : 128 joueurs ; 64 passent au deuxième tour ;
- deuxième tour 64 joueurs ; 32 passent au troisième tour ;
- troisième tour : 32 joueurs ; 16 passent au quatrième tour ;
- quatrième tour : 16 joueurs ; 8 passent au quatrième tour ;
- cinquième tour : 8 joueurs ; 4 passent au quatrième tour ;
- sixième tour : 4 joueurs ; 2 passent au quatrième tour ;
- septième tour : 2 joueurs ; un vainqueur.

Tournoi de tennis

128 joueurs sont engagés :

- premier tour : 128 joueurs ; 64 passent au deuxième tour ;
- deuxième tour 64 joueurs ; 32 passent au troisième tour ;
- troisième tour : 32 joueurs ; 16 passent au quatrième tour ;
- quatrième tour : 16 joueurs ; 8 passent au quatrième tour ;
- cinquième tour : 8 joueurs ; 4 passent au quatrième tour ;
- sixième tour : 4 joueurs ; 2 passent au quatrième tour ;
- septième tour : 2 joueurs ; un vainqueur.

128 joueurs sont engagés :

- premier tour : 128 joueurs ; 64 passent au deuxième tour ;
- deuxième tour 64 joueurs ; 32 passent au troisième tour ;
- troisième tour : 32 joueurs ; 16 passent au quatrième tour ;
- quatrième tour : 16 joueurs ; 8 passent au quatrième tour ;
- cinquième tour : 8 joueurs ; 4 passent au quatrième tour ;
- sixième tour : 4 joueurs ; 2 passent au quatrième tour ;
- septième tour : 2 joueurs ; un vainqueur.

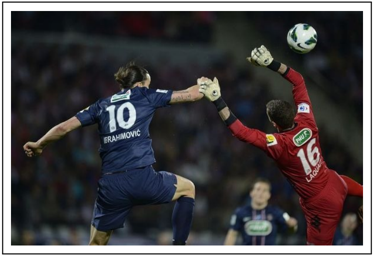
128 joueurs sont engagés :

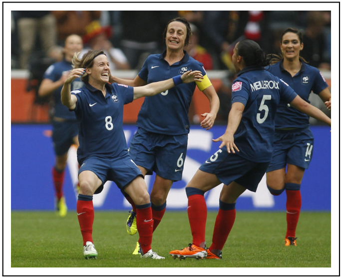
- premier tour : 128 joueurs ; 64 passent au deuxième tour ;
- deuxième tour 64 joueurs ; 32 passent au troisième tour ;
- troisième tour : 32 joueurs ; 16 passent au quatrième tour ;
- quatrième tour : 16 joueurs ; 8 passent au quatrième tour ;
- cinquième tour : 8 joueurs ; 4 passent au quatrième tour ;
- sixième tour : 4 joueurs ; 2 passent au quatrième tour ;
- septième tour : 2 joueurs ; un vainqueur.

Coupe de France 2013

Combien d'équipes jouent les 32èmes de finale ?

Combien de matchs l'équipe gagnante a-t-elle joués ?





Un peu de maths

Le nombre de tours dans un tournoi se calcule de la même façon pour tous les tournois : tennis, foot, rugby, échecs ...

Pour obtenir le nombre de tours, on divise le nombre de joueurs engagés par deux, puis par deux, puis... jusqu'à obtenir 1. Le nombre de divisions compte le nombre de tours.

$$2^{\text{nombre de tours}} = \text{nombre de joueurs engagés.}$$

Et si l'on avait commencé avec 1024 joueurs ?

1024 compétiteurs débutent un tournoi.

À l'issue du premier tour, 512 sont sélectionnés...

$1024 \rightarrow 512 \rightarrow 256 \rightarrow 128 \rightarrow 64 \rightarrow 32 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1.$

10 "$\rightarrow$". Le nombre de tours est donc 10.

Sauriez-vous déterminer le nombre de joueurs lorsqu'on connaît le nombre de tours ?

- 0 tour : 1 joueur engagé dans le tournoi ;
- 1 tour : 2 joueurs engagés ;
- 2 tours : 4 joueurs engagés ;
- 3 tours : 8 joueurs engagés ;
- 4 tours : 16 joueurs engagés ;
- ... ;
- n tours : 2^n joueurs engagés.

- 0 tour : 1 joueur engagé dans le tournoi ;
- 1 tour : 2 joueurs engagés ;
- 2 tours : 4 joueurs engagés ;
- 3 tours : 8 joueurs engagés ;
- 4 tours : 16 joueurs engagés ;
- ... ;
- n tours : 2^n joueurs engagés.

Un peu de maths

- 0 tour : 1 joueur engagé dans le tournoi ;
- 1 tour : 2 joueurs engagés ;
- 2 tours : 4 joueurs engagés ;
- 3 tours : 8 joueurs engagés ;
- 4 tours : 16 joueurs engagés ;
- ... ;
- n tours : 2^n joueurs engagés.

- 0 tour : 1 joueur engagé dans le tournoi ;
- 1 tour : 2 joueurs engagés ;
- 2 tours : 4 joueurs engagés ;
- 3 tours : 8 joueurs engagés ;
- 4 tours : 16 joueurs engagés ;
- ... ;
- n tours : 2^n joueurs engagés.

Un peu de maths

- 0 tour : 1 joueur engagé dans le tournoi ;
- 1 tour : 2 joueurs engagés ;
- 2 tours : 4 joueurs engagés ;
- 3 tours : 8 joueurs engagés ;
- 4 tours : 16 joueurs engagés ;
- ... ;
- n tours : 2^n joueurs engagés.

- 0 tour : 1 joueur engagé dans le tournoi ;
- 1 tour : 2 joueurs engagés ;
- 2 tours : 4 joueurs engagés ;
- 3 tours : 8 joueurs engagés ;
- 4 tours : 16 joueurs engagés ;
- ... ;
- n tours : 2^n joueurs engagés.

- 0 tour : 1 joueur engagé dans le tournoi ;
- 1 tour : 2 joueurs engagés ;
- 2 tours : 4 joueurs engagés ;
- 3 tours : 8 joueurs engagés ;
- 4 tours : 16 joueurs engagés ;
- ... ;
- n tours : 2^n joueurs engagés.

Et si l'on avait 50 joueurs ?

$50 \to 25$ et après ?

$50 \to 25 \to 13 \to 7 \to 4 \to 2 \to 1.$

Il faut à nouveau six tours. On divise le nombre de joueurs par deux en arrondissant à l'entier supérieur et on itère jusqu'à obtenir 1.

Le nombre de divisions donne le nombre de tours.

Trop compliqué !

On divise par deux, par deux, ... jusqu'à obtenir un nombre inférieur ou égal à un et on compte le nombre de divisions :

$50 \to 25 \to 12.5 \to 6.25 \to 3.125 \to 1.5625 \to 0.78125.$

On a bien le même résultat ... mais est-ce que c'est général ?

Oui, mais on l'admet !

Le nombre de fois qu'il faut diviser un nombre n par 2 jusqu'à l'obtention d'un nombre inférieur ou égal à un s'appelle le logarithme binaire entier du nombre n.

Pourquoi un tel nom ?

logos : rapport ou raisonnement arithmos : nombre

$$2^{\text{nombre de tours}} = \text{nombre de joueurs engagés.}$$

$$\text{nombre de tours} = \log_2(\text{nombre de joueurs engagés}).$$

Le nombre de tours permettant de déterminer le vainqueur dans un tournoi de 1024 jours, qui est 10 se dira dès maintenant « le logarithme binaire entier de 1024 est 10 ».

On écrira :

$$2^{10} = 1024 \approx 1000.$$

$$10 = \log_2(1024).$$

Quel est le logarithme binaire de 2^{347}?

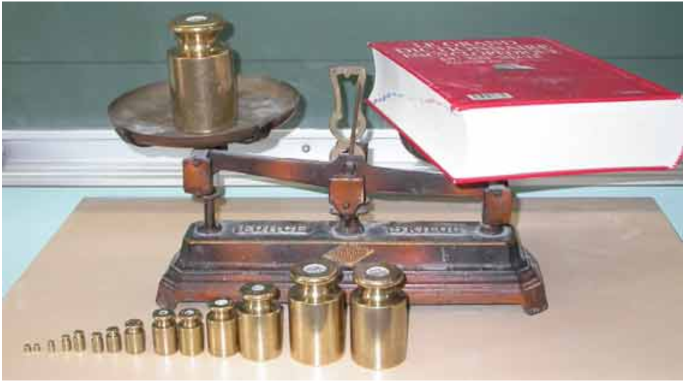
Le logarithme binaire de 2^{347} est 347.

La valeur 347 n'est pas du tout du même ordre de grandeur que 2^{347}.
$2^{347} = 2^{300} \times 2^{40} \times 2^{7} \approx (10^3)^{30} \times (10^3)^4 \times 100 = 10^{104}$.

Le nombre total d'atomes de notre galaxie est approximativement 10^{80}.

Utilité du logarithme binaire ?

Comment être efficace pour déterminer la masse d'un objet de moins d'un kilogramme au gramme près ?



Soit on met une masse d'un gramme, puis encore une, puis encore une, ...
Si l'on n'a pas de chance, on peut effectuer 1000 pesées.

Soit on teste 500 grammes. Si l'objet est moins lourd, on teste 250 g ; si l'objet est plus lourd, on teste 750 g. On itère le procédé.

Comme à chaque étape, on divise par deux le nombre de valeurs de masses possibles, le nombre de pesées à effectuer est le logarithme binaire entier de 1000 soit 10.

Comment faire pour chercher un mot dans un dictionnaire usuel qui en contient 60 000 ?

Ouvrir le dictionnaire au milieu.
Choisir le mot médian.
Il reste à choisir parmi 30000 mots.
On a ainsi divisé le nombre de choix par 2.
Recommencer jusqu'à ce qu'il reste un mot.

Le nombre d'essais à effectuer est donc le logarithme binaire entier de 60000 soit 16.

- logarithme binaire entier de $64 = 6$;
- logarithme binaire entier de $50 = 6$;
- logarithme binaire entier de $1000 = 10$;
- logarithme binaire entier de $60000 = 16$.

Toutes ces valeurs sont issues de recherche d'un individu dans une population. Le logarithme d'un nombre même très grand est "petit".
Cela explique que l'on sache faire des recherches dans de très grandes quantités de données.

- logarithme binaire entier de $64 = 6$;
- logarithme binaire entier de $50 = 6$;
- logarithme binaire entier de $1000 = 10$;
- logarithme binaire entier de $60000 = 16$.

Toutes ces valeurs sont issues de recherche d'un individu dans une population. Le logarithme d'un nombre même très grand est "petit".
Cela explique que l'on sache faire des recherches dans de très grandes quantités de données.

- logarithme binaire entier de $64 = 6$;
- logarithme binaire entier de $50 = 6$;
- logarithme binaire entier de $1000 = 10$;
- logarithme binaire entier de $60000 = 16$.

Toutes ces valeurs sont issues de recherche d'un individu dans une population. Le logarithme d'un nombre même très grand est "petit".
Cela explique que l'on sache faire des recherches dans de très grandes quantités de données.

Taille d'un logarithme

- logarithme binaire entier de $64 = 6$;
- logarithme binaire entier de $50 = 6$;
- logarithme binaire entier de $1000 = 10$;
- logarithme binaire entier de $60000 = 16$.

Toutes ces valeurs sont issues de recherche d'un individu dans une population. Le logarithme d'un nombre même très grand est "petit".
Cela explique que l'on sache faire des recherches dans de très grandes quantités de données.

- logarithme de $1 = 0$;
- logarithme de $1000 = 10$;
- logarithme de $1\ 000\ 000 = 20$;
- logarithme de 1 000 000 000$= 30$;
- logarithme de 1 000 000 000 000$= 40$.

Taille d'un logarithme

- logarithme de 1 $= 0$;
- logarithme de 1000 $= 10$;
- logarithme de 1 000 000 $= 20$;
- logarithme de 1 000 000 000$= 30$;
- logarithme de 1 000 000 000 000$= 40$.

Taille d'un logarithme

- logarithme de 1 = 0 ;
- logarithme de 1000 = 10 ;
- logarithme de 1 000 000 = 20 ;
- logarithme de 1 000 000 000= 30 ;
- logarithme de 1 000 000 000 000= 40.

- logarithme de 1 = 0 ;
- logarithme de 1000 = 10 ;
- logarithme de 1 000 000 = 20 ;
- logarithme de 1 000 000 000= 30 ;
- logarithme de 1 000 000 000 000= 40.

- logarithme de 1 = 0 ;
- logarithme de 1000 = 10 ;
- logarithme de 1 000 000 = 20 ;
- logarithme de 1 000 000 000= 30 ;
- logarithme de 1 000 000 000 000= 40.

Temps de recherche dans un dictionnaire

On considère qu'il faut un centième de seconde pour effectuer une recherche. Dans un dictionnaire de :

- 1 mot, il faut 0 seconde !
- 1000 mots (une page), il faut 0.10 s ;
- 1 000 000 mots (un livre), il faut 0.2 s ;
- 1 000 000 000 mots (une bibliothèque de collège ou de lycée), il faut 0.30 s ;
- 1 000 000 000 000 mots (la BNF), il faut 0.40 s.

On considère qu'il faut un centième de seconde pour effectuer une recherche. Dans un dictionnaire de :

- 1 mot, il faut 0 seconde !
- 1000 mots (une page), il faut 0.10 s ;
- 1 000 000 mots (un livre), il faut 0.2 s ;
- 1 000 000 000 mots (une bibliothèque de collège ou de lycée), il faut 0.30 s ;
- 1 000 000 000 000 mots (la BNF), il faut 0.40 s.

On considère qu'il faut un centième de seconde pour effectuer une recherche. Dans un dictionnaire de :

- 1 mot, il faut 0 seconde !
- 1000 mots (une page), il faut 0.10 s ;
- 1 000 000 mots (un livre), il faut 0.2 s ;
- 1 000 000 000 mots (une bibliothèque de collège ou de lycée), il faut 0.30 s ;
- 1 000 000 000 000 mots (la BNF), il faut 0.40 s.

Temps de recherche dans un dictionnaire

On considère qu'il faut un centième de seconde pour effectuer une recherche. Dans un dictionnaire de :

- 1 mot, il faut 0 seconde !
- 1000 mots (une page), il faut 0.10 s ;
- 1 000 000 mots (un livre), il faut 0.2 s ;
- 1 000 000 000 mots (une bibliothèque de collège ou de lycée), il faut 0.30 s ;
- 1 000 000 000 000 mots (la BNF), il faut 0.40 s.

Temps de recherche dans un dictionnaire

On considère qu'il faut un centième de seconde pour effectuer une recherche. Dans un dictionnaire de :

- 1 mot, il faut 0 seconde !
- 1000 mots (une page), il faut 0.10 s ;
- 1 000 000 mots (un livre), il faut 0.2 s ;
- 1 000 000 000 mots (une bibliothèque de collège ou de lycée), il faut 0.30 s ;
- 1 000 000 000 000 mots (la BNF), il faut 0.40 s.

Quel est le logarithme binaire entier de 15 ? C'est 4.

Quel est le logarithme binaire entier de 6 ? C'est 3.

Quel est le logarithme binaire entier de 15×6 ? C'est $4+3$.

Preuve : $15 * 6 \rightarrow 7.5 * 6 \rightarrow 3.75 * 6 \rightarrow 1.875 * 6 \rightarrow 0.9375 * 6 \rightarrow 0.9375 * 3 \rightarrow 0.9375 * 1.5 \rightarrow 0.9375 * 0.75$.

La propriété "logarithme($a \times b$) = logarithme(a) + logarithme(b)" conjecturée suite à l'exemple ci-dessus n'est pas toujours vraie.

Exemple logarithme(17) = 5 ; logarithme(9) = 4 et logarithme(17*9) = logarithme(153) = 8 = 5 + 4 - 1.

On pourrait démontrer, qu'avec la définition que nous avons choisie, nous avons :
soit logarithme($a \times b$) = logarithme(a) + logarithme(b)
soit logarithme($a \times b$) = logarithme(a) + logarithme(b)-1

Si l'on accepte qu'un logarithme ne soit pas nécessairement entier, on peut obtenir la propriété :

$$\text{logarithme } (a \times b) = \text{logarithme}(a) + \text{logarithme}(b)$$

pour tous les nombres positifs a et b.

Propriété analogue à celle que vous connaissez sur les puissances :

$$2^{a+b} = 2^a \times 2^b.$$

Qui en a eu l'idée des logarithmes ?

C'est l'astronome John Neper (1550-1617). 

Pourquoi ?

Inventés vers 1614 pour faciliter les multiplications, des logarithmes servent :

- à simplifier des calculs,
- à organiser des tournois,
- à construire des gammes de musique,
- à mesurer la sensibilité (magnitude des tremblements de terre, décibel...),
- à effectuer des recherches dans un dictionnaire,
- ...

Laissons le mot de la fin à Poincaré « La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes. ».

Inventés vers 1614 pour faciliter les multiplications, des logarithmes servent :

- à simplifier des calculs,
- à organiser des tournois,
- à construire des gammes de musique,
- à mesurer la sensibilité (magnitude des tremblements de terre, décibel...),
- à effectuer des recherches dans un dictionnaire,
- ...

Laissons le mot de la fin à Poincaré « La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes. ».

Inventés vers 1614 pour faciliter les multiplications, des logarithmes servent :

- à simplifier des calculs,
- à organiser des tournois,
- à construire des gammes de musique,
- à mesurer la sensibilité (magnitude des tremblements de terre, décibel...),
- à effectuer des recherches dans un dictionnaire,
- ...

Laissons le mot de la fin à Poincaré « La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes. ».

Inventés vers 1614 pour faciliter les multiplications, des logarithmes servent :

- à simplifier des calculs,
- à organiser des tournois,
- à construire des gammes de musique,
- à mesurer la sensibilité (magnitude des tremblements de terre, décibel...),
- à effectuer des recherches dans un dictionnaire,
- ...

Laissons le mot de la fin à Poincaré « La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes. ».

Inventés vers 1614 pour faciliter les multiplications, des logarithmes servent :

- à simplifier des calculs,
- à organiser des tournois,
- à construire des gammes de musique,
- à mesurer la sensibilité (magnitude des tremblements de terre, décibel...),
- à effectuer des recherches dans un dictionnaire,
- ...

Laissons le mot de la fin à Poincaré « La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes. ».

Inventés vers 1614 pour faciliter les multiplications, des logarithmes servent :

- à simplifier des calculs,
- à organiser des tournois,
- à construire des gammes de musique,
- à mesurer la sensibilité (magnitude des tremblements de terre, décibel...),
- à effectuer des recherches dans un dictionnaire,
- ...

Laissons le mot de la fin à Poincaré « La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes. ».

Merci de votre attention

Cet exposé est librement adapté de la conférence « D'étonnants logarithmes »que Gilles Dowek a donnée lors de la remise des trophées du kangourou des mathématiques.

Sa page personnelle : https ://who.rocq.inria.fr/Gilles.Dowek/ est d'une grande richesse.