NUMÉRATION DÉCIMALE

Bernard BETTINELLI

1 Introduction

Nous avons cru, dans les années 70, que la pratique des systèmes de numération pouvait être un préalable à la compréhension du système décimal qui régit la désignation des nombres à partir des dix premiers, dans la plupart des civilisations, depuis la nuit des temps. A mon avis, cette pratique ne peut avoir un sens, qu'après coup, en CM2 ou en 6ème pour approfondir la connaissance du système décimal qui est notre « langue des nombres ».

Comment expliquer que tant de civilisations aient inventé un système décimal ? Et que, parmi les autres, on note souvent la base vingt, sinon le fait (universel) que nous avons tous dix doigts (ou vingt avec les orteils) et que ce fut le moyen le plus simple de communiquer des nombres ?

C'est donc ce langage – ou plutôt ces langages, car les langages oral et écrit, bien que tous deux décimaux sont construits différemment – que nous avons à enseigner à l'École élémentaire.

La logique interne de ces deux langages donne à l'enseignant la responsabilité de séparer ce qui est de l'ordre de la culture et qui doit être transmis de ce qui est logiquement construit qu'un cerveau d'enfant actif peut lui-même réinventer seul.

L'écriture positionnelle est d'une logique parfaite, alors que la désignation orale, dépendante de la langue et surtout de l'histoire de la langue, présente des particularités que l'enseignant doit transmettre. Ces singularités sont des complications langagières sans avantage mathématique que beaucoup aimeraient voir simplifiées.

Voici ce que Condorcet a proposé à ce sujet en 1799 :

Voici quel est le système de numération actuellement usité en France.

Un ajouté à dix, dix et un s'appèlent ... Dix-Un .

Un ajouté à dix-un, ou deux ajoutés à dix, dix et deux, s'appèlent ... Dix-Deux.

Un ajouté à dix-deux, ou trois ajoutés à dix, dix et trois, s'appèlent ... Dix-trois .

Un ajouté à dix-trois, ou quatre ajouté à dix, dix et quatre, s'appèlent ... Dix-Quatre .

Un ajouté à dix-quatre, ou cinq ajouté à dix, dix et cinq, s'appèlent ... Dix-Cinq .

Un ajouté à dix-cinq, ou six ajouté à dix, dix et six, s'appèlent ... Dix-six .

Un ajouté à dix-six, ou sept ajouté à dix, dix et sept, s'appèlent ... Dix-Sept .

Un ajouté à dix-sept, ou huit ajouté à dix, dix et huit, s'appèlent ... Dix-Huit .

Un ajouté à dix-huit, ou neuf ajouté à dix, dix et neuf, s'appèlent ... Dix-Neuf .

Arrivés à ce terme, nous ne disons pas dix-dix, pour exprimer un ajouté à dix-neuf, ou dix et dix ; il est aisé de voir que ce moyen, si on le continuoit longtems, conduiroit à former des noms trop longs, trop difficiles à reconnoître et à prononcer ; on l'appèle donc duante :

ainsi, Un et dix-neuf, dix et dix, s'appèlent ... Duante .

Un et duante s'appèlent ... Duante-Un .

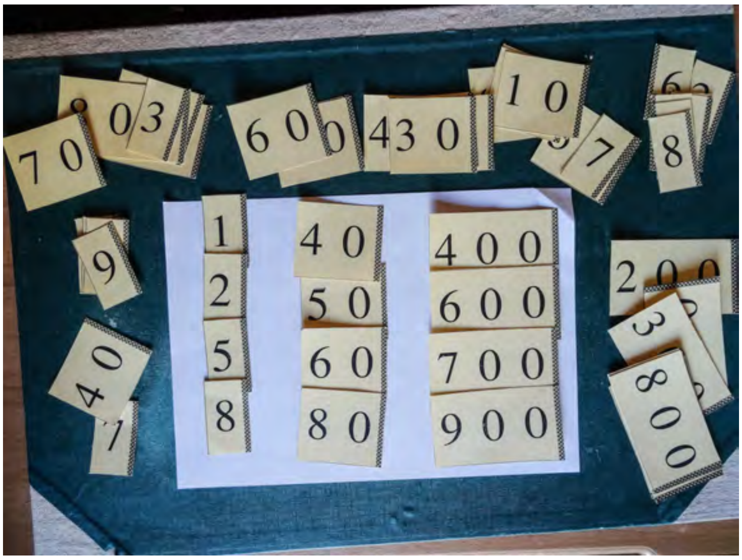
Un et duante-un, duante et deux, s'appèlent ... Duante-Deux .

Un et duante-deux,duante et trois, s'appèlent ...Duante-Trois, etc...

200 ans plus tard, malheureusement, les enfants français ont encore à intégrer des mots dont la logique ne peut que leur échapper : pourquoi dire soixante-treize ? (et nous avons appris qu'ils ont plus de chance que les petits Danois !).

2 Cartes numérales

Parmi les moyens de présenter la numération décimale, j'ai créé un jeu de 27 cartes de trois largeurs – publié, parmi 80 autres, dans « Le carrousel des nombres » dont le plan est donné en annexe.



L'ensemble des cartes

Il faut **apprendre** les noms écrits et oraux des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 200, et les repérer sur les cartes.

Les enfants peuvent alors former tous les nombres de 1 à 999 par superposition de 1, 2 ou 3 cartes, la bande fantaisie, à droite, servant de repère (de point de collage).

Les nombres 245 ; 510 ; 57 ; 803

La lecture et l'écriture de tous les nombres, exception faite des onze, douze, … seize, soixante-dix, quatre-vingt, … et de leurs composés, ne posent aucun problème ; les seuls éléments inconnus : 300, …, 900 étant faciles à deviner en les comparant avec 200. Pour 100, l'usage veut, qu'en français, on dise « cent » et non « un cent ». Mettre d'emblée les centaines, dès le CP, n'est pas compliquer la tâche, mais plutôt l'éclairer.

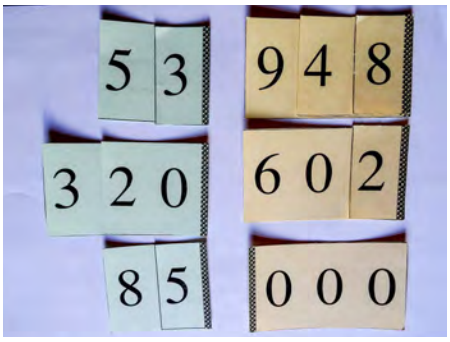
La lecture d'un nombre consiste à superposer les cartes formant l'écriture et à énoncer les noms de ces cartes.

L'écriture demande qu'on écoute les mots composant le nom oral, qu'on les sélectionne parmi les cartes et qu'on construise l'empilage. Les zéros des écritures sont simplement des « zéros non cachés » par d'autres cartes.

Ainsi la connaissance des 16 nombres énoncés plus haut permet à chacun de lire et écrire les 999 premiers nombres à l'exception des 360 nombres qui, en français, utilisent : onze, douze, …, seize, soixante-dix ou quatre-vingts dans leur nom oral.

Pour ces aberrations de langage, on peut, comme Condorcet, faire entendre « dix-sept » ou « dix-huit » et faire inventer « dix-un, dix-deux, ... » ou les éviter pour les intégrer plus tard lorsque la construction logique est acquise. Pour les nombres de 70 à 99, j'ai toujours proposé d'entendre « cinquante », seul régulier de la suite des dizaines, et de faire inventer provisoirement « sept ante, huit ante et neuf ante » pour libérer au maximum les activités de lecture, d'écriture et de décomposition. Toujours partir de cette grande partie compréhensible et maîtrisable par les enfants pour faire jouer les nombres, et garder pour plus tard les inévitables « scories » de langage.

Remarque : Le même jeu de cartes pourra être repris plus tard pour la compréhension des « grands nombres » à l'aide de plusieurs séries colorées pour les classes des mille, millions, ... puis celle des nombres décimaux, avec les cartes disposant d'une autre bande de collage, à gauche.



Les nombres 53 948 ; 320 602 ; 85 000

Les nombres 8,2 ; 39,504 ; 0,17

3 Le « boulier vivant »

Les cartes numérales permettent, par démontage de l'écriture, de décomposer un nombre :

245 = 200 + 40 + 5 ; 510 = 500 + 10 ; 57 = 50 + 7 ; 803 = 800 + 3

Gattegno a proposé de compléter cette décomposition sur le modèle du boulier chinois (suan pan) mais en remplaçant les tiges par des enfants montrant les « digits » sur leurs doigts.

Spontanément, les petits enfants montrent les premiers nombres sur leurs doigts, même s'ils n'en connaissent pas encore le nom. Cette observation des nombres montrés sur une main, puis deux, affermit le lien aux nombres 5 et 10.

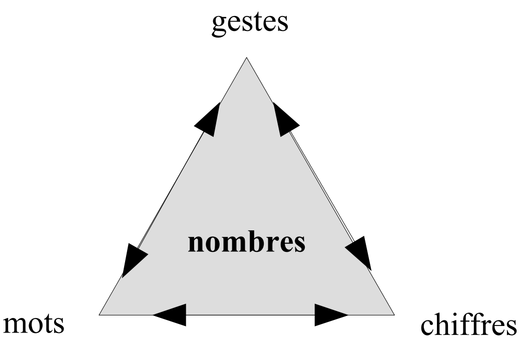
10 n'est pas, a priori, un nombre simple ; partager un segment en 10 - ou une tarte - construire un pentagone régulier, sont des opérations difficiles. La seule simplicité de 10 se situe dans ces langages gestuels immémoriaux des nombres dont parle Georges Ifrah.

Pour montrer un nombre supérieur à 10, soit on s'y prend à plusieurs, soit on « lance les dix » pour s'arrêter sur les unités du nombre. Et c'est le départ de l'activité du « boulier vivant ». Pour qu'un tel nombre laisse une trace instantanée, ces « 10 lancés » par un enfant sont comptabilisés par un second enfant qui lève un doigt pour chaque 10 lancé. Le nombre – à 2 chiffres – est ainsi montré par les deux enfants, l'un étant le porteur des « dix », l'autre des « un ».

47

60

On dispose ainsi d'un triple langage : écrit, oral et gestuel entre lesquels s'établit l'équivalence.



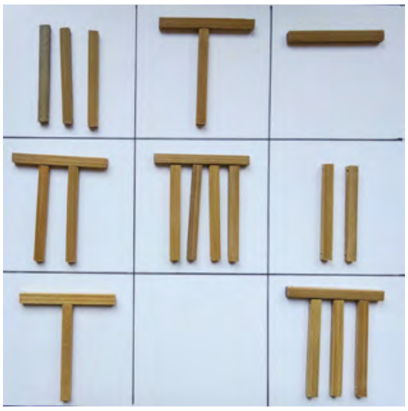
L'envie de dynamiser le jeu nous prend : ajoutez ou retranchez 1, 2, ... (c'est le porteur des « un » qui s'active) ; ajoutez ou retranchez 10, 30, ... (le porteur des « dix » se réveille) ; ajoutez ou retranchez 32, 25, … (tous deux s'activent, chacun prenant du nombre la part qui lui revient).

À un certain moment, un problème se pose : j'ai 6 « un » et je dois en ajouter 7. Comme je n'ai que 10 doigts, je peux ajouter 4 et retenir en mémoire les 3 restants. Comme sur le suan pan : 10 « un » forment 1 « dix » que je peux passer au porteur des « dix », vidant mes mains pour y mettre le 3 retenu.

Ensuite, le même problème se posera au porteur des « dix », lorsqu'il devra montrer plus de 10 « dix ». Il appellera un porteur des « cent » pour lui passer 10 « dix » qui sont 1 « cent » et le jeu se poursuivra à trois porteurs : porteur des « un », porteur des « dix » et porteur des « cent ».

4 L'abaque à jonchets

Nouvelle étape de cette quête de la numération : ne plus être seulement un des acteurs du jeu du « boulier vivant », mais le metteur en scène de la pièce. Et, pour cela, j'ai repris la méthode des anciens comptables chinois qui a engendré le suan pan. Ils disposaient des baguettes en ivoire, appelées « jonchets » sur un quadrillage : le chou suan. Et la disposition (simplifiée) de ces jonchets rappelle les nombres montrés sur les doigts.

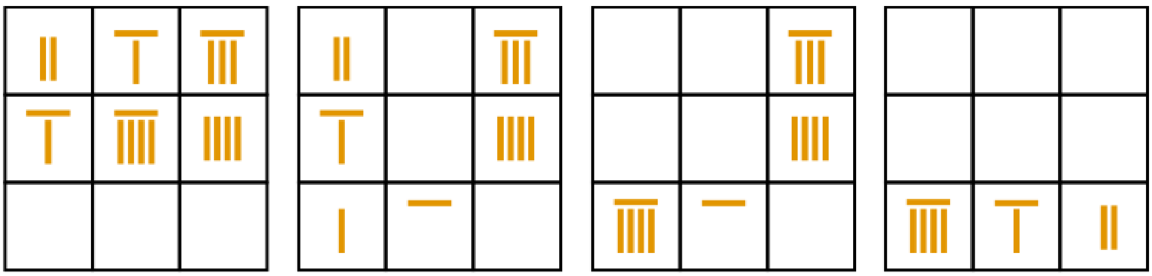


Voici trois nombres, un sur chaque ligne : 365 ; 792 ; 608. Il est facile de repérer qu'un jonchet vertical est un doigt levé, un jonchet horizontal est une main.

5 Addition et numération

On tire avantage des trois lignes superposées de l'abaque pour agir de façon claire sur les opérations. On peut, comme sur un boulier, superposer sur les mêmes cases les deux nombres d'une addition. Mais il est plus clair de les disposer chacun sur une ligne, gardant celle du bas pour « verser » dans un ordre quelconque les jonchets d'une colonne dont on réduit le nombre par les échanges : « 5 x 1 = 5 » et « 2 x 5 = 10 »[1]. Rien n'impose qu'on doive commencer par la droite (ou la gauche) ; on peut même agir séparément sur les jonchets horizontaux et verticaux.

À titre d'exemple, pour effectuer l'addition des deux nombres 268 et 694, on peut, au gré de sa fantaisie, « verser la somme » dans la ligne du bas en commençant par la colonne du milieu, puis celle de gauche, et enfin celle de droite.



Addition 268 + 694

Il sera intéressant de voir si on a une économie de gestes en partant de la droite ! Mais, quel que soit le choix, sauf erreur d'échange, le résultat est correct : 962.

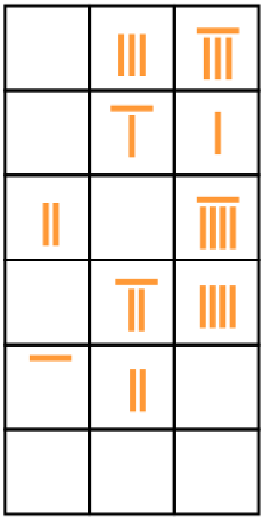
[1] Chaque fois, une écriture multiplicative comme 2 x 5 signifie : deux fois 5, soit 5 + 5.

Le passage à la technique opératoire écrite en découle facilement, avec les contraintes imposées par la manipulation des chiffres quand on s'impose de ne pas les effacer.

L'addition de plusieurs nombres se fait de même en plaçant deux plaques l'une au-dessus de l'autre.

L'ordre est totalement libre (c'est la commutativité de l'addition qui joue !). On peut même « verser » d'abord les jonchets horizontaux, pour n'avoir plus que des sommes de nombres de 1 à 4 à effectuer. Seule règle impérative : travailler sur chaque colonne séparément (sauf pour les retenues : 5 + 5 = 10).

Il est à remarquer qu'on travaille toujours sur les cinq premiers nombres et qu'il suffit de savoir ajouter les nombres de 1 à 5 pour réaliser n'importe quelle addition.



Addition : 38 + 61 + 209 + 74 + 52

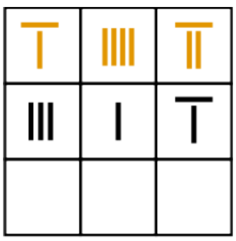
6 Soustraction et numération

Sur un boulier, on prend les composantes numérales du nombre à soustraire à l'intérieur du premier nombre, ce qui est complexe, sauf si chaque décimale à soustraire est inférieure à la décimale correspondante du nombre.

Afin d'éviter une trop grande demande à la mémoire, on va inventer des repères qui permettront de poser le nombre à soustraire avant de commencer l'action arithmétique. Pour cela on dispose de jonchets **noirs** – que j'appellerai « fantômes » - qui viennent « chercher » les jonchets correspondants.

Plusieurs cas se présentent :

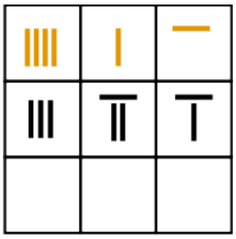
Le cas simple, où les fantômes peuvent prendre les jonchets, séparément dans chaque colonne :



Soustraction : 647 - 316

Dans un tel cas, chaque fantôme prend avec lui le nombre dont il est l'image. Plus le nombre de jonchets fantômes est petit, plus près est la solution du problème !

Mais on a rarement la chance d'être dans un cas aussi simple. Le plus souvent, le challenge aura cette forme :

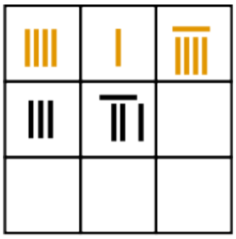


Soustraction : 415 - 376

Dans cet exemple, la colonne des centaines est la seule qui paraît simple. Nous sommes conduits à décomposer le nombre supérieur par des démontages du type : 10 = 5 + 5 …

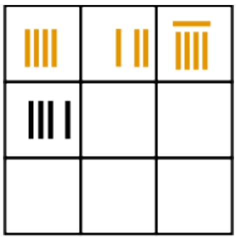
A moins que nous exploitions cette idée que « plus le nombre de jonchets fantômes est petit, plus près est la solution du problème ». Et pour cela, il faut réaliser que si un fantôme d'une colonne peut prendre son jonchet, inversement – comme un film qu'on passerait à l'envers – un fantôme ajouté peut prendre un jonchet ajouté simultanément, sans que le problème soit changé.

L'action miraculeuse consiste à ajouter sur la colonne des unités : 4, complément à 10 des 6 fantômes, simultanément sur les deux lignes. Les 10 fantômes « un » se convertissent en un fantôme « dix », reportant l'action sur la deuxième colonne.



(415 + 4) - 380

En passant en revue toutes les colonnes, à partir de la droite et en appliquant le même traitement à celles dont le nombre de fantômes est en excédent, on transforme toute soustraction complexe en une soustraction simple de même résultat.



(419 + 20) - 400

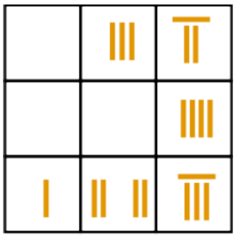
Les seules connaissances mises en jeu sont les différences des nombres de 1 à 9 et les compléments à 10. En revanche, le principe des différences constantes intégré à la numération, qui sera aussi celui qu'on enseignera dans la technique écrite, est du grand art et demandera un réel apprentissage[2].

7 Multiplication et numération

Quel est l'apport de l'abaque sur ce sujet ? La multiplication naît de la répétition de l'addition : plutôt que dire : 37 + 37 + 37 + 37, on dit : quatre fois 37 – et on écrit 4 x 37. Et, sur l'abaque, il est naturel de vouloir quadrupler les 7 jonchets « uns » et les 3 jonchets « dix ». Les cases sont trop petites et on trouvera vite plus simple de le faire mentalement ou presque... sur l'abaque en posant le nombre 37 et en posant sur une autre ligne : quatre fois 7 « uns », puis quatre fois 3 « dix ».

Et on obtient, en gardant le minimum nécessaire en mémoire :

[2] On a quand même, dans cette pratique manipulatoire, l'avantage de le réduire aux compléments à 10, sachant que l'ajout correspondant qu'on fait sur le premier nombre n'ajoutera jamais de retenue d'addition.

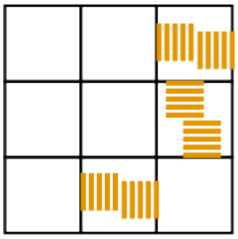


Multiplication : 4 x 37 = 148

Le multiplicateur quatre peut, a priori, être placé n'importe où, mais il est préférable de prendre la disposition qui est celle de notre technique écrite. Cette pratique demande d'apprendre les tables de multiplication des nombres 2, 3, 4, 5, car rien n'oblige, au départ, à connaître quatre fois 7 si on sait quatre fois 5 et quatre fois 2.

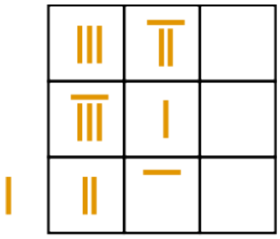
Souvent, une réduction 5 + 5 = 10 devra être opérée, mais elle peut se faire, dans un premier temps, après la multiplication.

Le passage aux multiplicateurs supérieurs à 10 constitue une étape importante dont le déclic sera la singularité de : dix fois. Pour le comprendre, on peut observer dix fois 1, dix fois 5, dix fois 10... c'est-à-dire décupler effectivement un jonchet sur différentes cases.



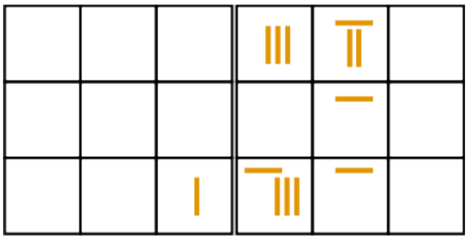
10 x 1 ; 10 x 5 ; 10 x 10

En faisant les réductions : 5 x 1 = 5 et 5 + 5 = 10, on découvre que poser dix fois un jonchet revient à le déplacer d'une case à gauche. On comprend facilement que si on décuplait 37, cela nous conduirait à déplacer chacun de ses jonchets d'une case à gauche, donc à glisser le train de jonchets de ce nombre, (et donc de tous les nombres) d'une case vers la gauche. Voici trois exemples[3] :



10 x 37 ; 10 x 81 ; 10 x 125

C'est la grande révélation : pour faire dix fois 37, on le décale d'une case à gauche, donc pour le faire : vingt fois, deux fois dix fois, cinquante fois, cinq fois dix fois...



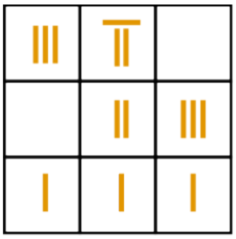
50 x 37

L'action revient à placer le multiplicateur, puis le nombre à multiplier à partir de la deuxième case pour effectuer ensuite une multiplication par un nombre à un chiffre.

L'essentiel est mis en place. On peut aller au bout du processus par deux prolongements.

[3] On remarque ici que dès qu'on est « à l'étroit » dans une plaque, on en sort en inventant des nombres plus grands qui demandent deux plaques.

Le premier permet de deviner comment faire cent fois, car c'est dix fois dix fois, et on décale les jonchets du nombre de deux cases à gauche. Le second d'inventer comment multiplier par un nombre à deux chiffres. Vingt-trois fois 37, c'est vingt fois 37 + trois fois 37. Le nombre 37 devient mobile : pour le multiplier par trois on sait faire ; et ensuite par vingt, on le glisse d'une case à gauche, ses unités à la verticale du 2 (de vingt) et on effectue cette multiplication par deux qu'on agrège au résultat partiel.



23 x 37 : 3 x 37 est réalisé. Position du multiplicateur pour effectuer 20 x 37

La multiplication par un nombre à trois chiffres se fera par deux décalages successifs[4]. Les zéros placés dans la technique écrite prennent leur source dans ce jeu de décalage.

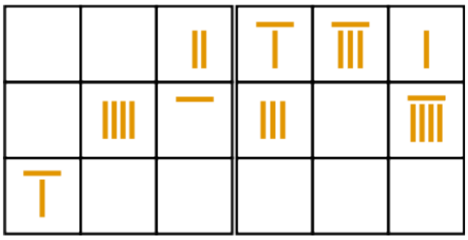
8 « Grands nombres »

Le rôle des jonchets est de faire comprendre les principes de la numération décimale et leur incidence sur les opérations arithmétiques. Ce qui précède prend donc tout son sens dans les apprentissages des CE1 et CE2.

Les classes de CM vont offrir l'occasion de découvrir de nouveaux nombres et l'abaque sera un nouvel initiateur. Tout d'abord, notre numération orale est en fait une numération de base mille avec sous-base dix. C'est ainsi que les mots dix, vingt, trente, …, cent ne jouent pas le même rôle que le mot mille, puisque on les retrouve pour exprimer le nombre de mille, de millions ou de milliards d'un « grand nombre ». On pourrait penser, quand on arrive à 9999, qu'un nouveau mot va désigner 10000, mais le premier mot nouveau dans la suite des nombres entiers naturels est « million ». D'ailleurs, pour confirmer cette constatation, en France, on introduit un blanc entre les séries de trois chiffres, aux places des mots « mille », « million », « milliard ».

Les plaques de l'abaque étant de 3 x 3 cases, même si elles offrent une suite de 6, 9 ou 12 cases quand on les accole, sont des supports naturels des classes d'unités, de mille, millions et milliards.

Voici trois nombres :

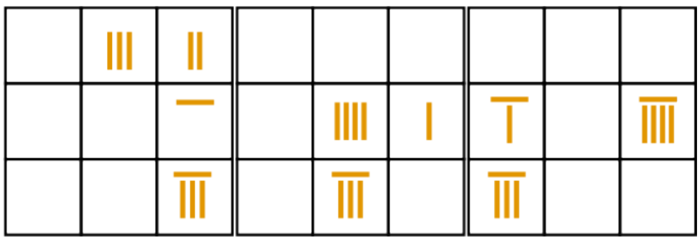


2 681 = 2 x 1000 + 681 = 2 x 1000 + 6 x 100 + 8 x 10 + 1

45 309 = 45 x 1000 + 309 = 4 x 10 000 + 5 x 1000 + 3 x 100 + 9

600 000 = 600 x 1000 = 6 x 100 000

De même, avec une troisième plaque :



32 000 000 = 32 x 1 000 000

5 041 609 = 5 x 1 000 000 + 41 x 1 000 + 609

8 080 800 = 8 x 1 000 000 + 80 x 1 000 + 800

[4] Sauf dans le cas d'un zéro intercalaire comme 203 qui se fait et se comprend par un seul décalage.

Les exemples ci-dessus montrent le rôle essentiel du chiffre 0 dans l'écriture des nombres. Si les techniques opératoires sont identiques, cette présentation renforce l'importance de bien positionner les chiffres des nombres selon les colonnes.

Les jeux de décalages vont être amplifiés. La multiplication par 100, 1 000, 10 000, … va se traduire par décalages de 2, 3, 4, … cases à gauche des jonchets d'un nombre[5].

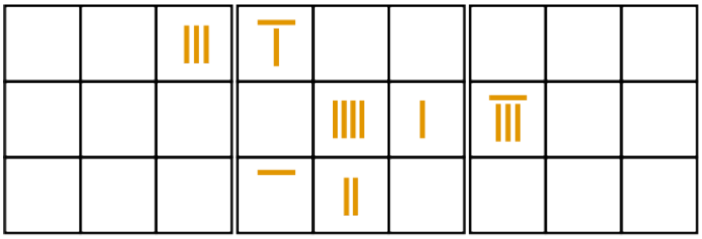
9 Nombres décimaux

La réversibilité a un rôle essentiel dans toutes les activités mathématiques : si je transforme un objet, comment puis-je revenir à son état initial ? Ainsi l'addition et la soustraction d'un nombre s'inversent. Mais quelle action inverse la multiplication par 4 ? Ce n'est pas la division par 4, qu'elle soit conçue comme partage en quatre parts ou rangement par groupes de quatre, mais le fractionnement : l'inverse de « quatre fois » est « un quart de ».

Le but de cet article n'est pas de présenter les fractions, pas plus que l'addition, la soustraction ou la multiplication, mais de montrer leur incidence sur la numération.

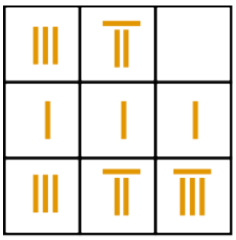
Les fractions sont utilisées depuis l'Antiquité, mais c'est seulement en 1580 que Simon Stevin comprend qu'un prolongement de la numération décimale peut simplifier les calculs des parties fractionnaires des mesures des comptes des marchands[6]. Au lieu d'observer que dans le nombre 1111, chaque 1 vaut dix fois le 1 situé à sa droite, il découvre qu'en inversant ce constat en : chaque 1 est le dixième du 1 situé à sa gauche, il ouvre une porte sur une vision extraordinaire et illimitée !

Les décalages à gauche s'inversent, pour autant que les nombres aient des cases vides à droite. Le décalage d'une case à droite du train des jonchets d'un nombre[7] le transforme en son dixième... de deux cases à droite en son centième ou de trois cases en son millième.



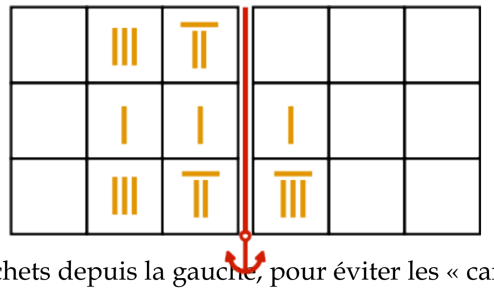
1/10 x 3 600 000 ? 1/10 x 41 800 ? 1/100 x 520 000 ?

Mais si la case des unités n'est pas vide ?



1/10 x 370 = ? 1/10 x 111 = ? 1/10 x 378 = ?

Une plaque à droite serait bienvenue ! Mais pour que les unités ne soient pas transformées en milliers, il faut un repère pour que cette plaque soit à droite de celle des unités.



[5] A effectuer en « tirant » les jonchets depuis la gauche, pour éviter les « carambolages de wagons ».

[6] Voici le début du livret de Stevin, inventeur des nombres décimaux en 1580 :

Soit quelque nombre de mille cent & onze, descript par characteres des cyffres en ceste sorte 1111, ausquels appert que chasque 1 est la dixiesme part de son prochain charactere precedent. Semblablement en 2378, chasque unité du 8, est la dixiesme de chasque unité du 7.

[7] On le « tire » cette fois depuis sa droite.

… = 37 ; … = 11,1 ; … = 37,8

Et le jeu de décalage n'a plus de limite. Les nombres sont nouveaux et doivent inclure le repère dans leur écriture. En France, c'est une virgule qui traduit le repère : 11,1 ; 37,8.

Mais que signifie ce jonchet placé à droite du repère[8] ? Les règles étant inchangées, en le décalant à gauche, soit en le faisant dix fois, il devient 1, il vaut donc 1/10. On peut s'en convaincre aussi en plaçant dix jonchets sur la case et par les échanges de base, ils sont 1 à eux dix.

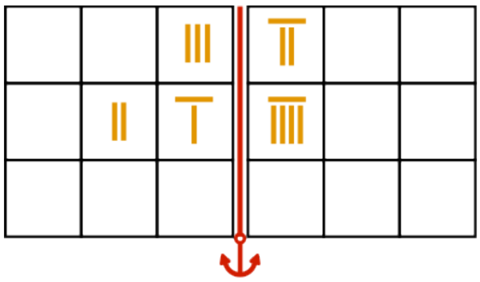
37,8 = 37 + 8/10

Un écueil à éviter absolument – écueil renforcé par une introduction par des mesures de longueur (ce segment mesure 7 cm et 3 mm, et on écrit 7,3 cm) – est de laisser à penser aux enfants que cette virgule sépare deux nombres, alors qu'elle est le repère des unités d'un seul nombre.

De la même façon, commencer l'addition des nombres décimaux par le cas apparemment simple de nombres à une décimale sans retenue (34,2 + 125,7) peut conduire à penser que les parties entière et décimale s'ajoutent séparément – pensée confortée par l'approbation du maître affirmant que c'est juste !

Les jeux de décalage, dans les deux sens, me semblent propices à éviter une frontière infranchissable. Il n'y a pas de raison, à un moment où la numération décimale des entiers doit être maîtrisée, de commencer avec des situations simplifiées.

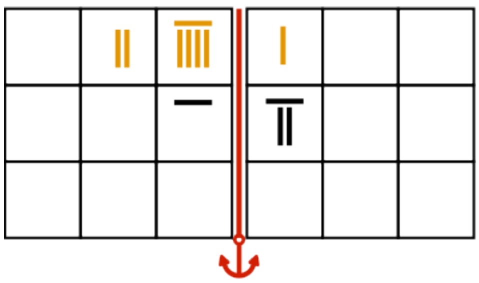
Voici une addition qui peut servir d'introduction :



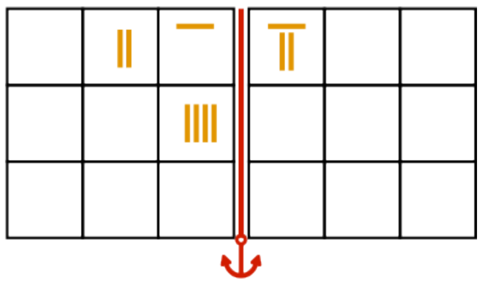
3,7 + 26,9

Les deux jonchets horizontaux de la colonne des dixièmes sont une incitation à exécuter : 5 + 5 = 10.

On procédera de même pour la soustraction et la multiplication.



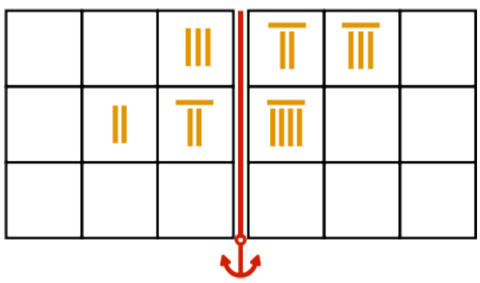
29,1 – 5,7



4 x 25,7

Il reste à savoir la valeur des jonchets de la plaque de droite. Dans la case de gauche, proche de l'amarre, nous savons répondre. Mais pour les autres ?

Dans l'image ci-dessous, le 8 est obtenu en prenant le 1/10 du 1/10 du nombre 8, donc représente 8/100.



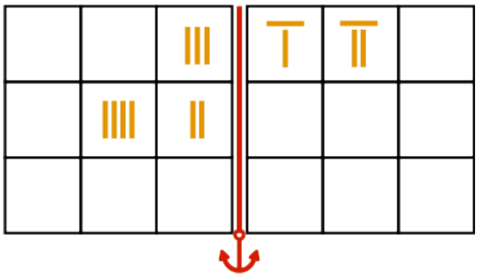
3,78 = 3 + 7 /10 + 8/100 = 3 + 78/100

[8] Il ne faut pas voir ce repère comme un obstacle à franchir, mais un point d'ancrage.

Comment désigner oralement le premier de ces deux nombres ? La logique voudrait qu'on dise « trois virgule sept huit[9] » mais des réminiscences liées aux mesures usuelles, dont je parlerai ci-dessous, font qu'en France on dise « trois virgule soixante-dix-huit » ce qui entraine de grosses difficultés pour comprendre l'ordre des nombres décimaux.

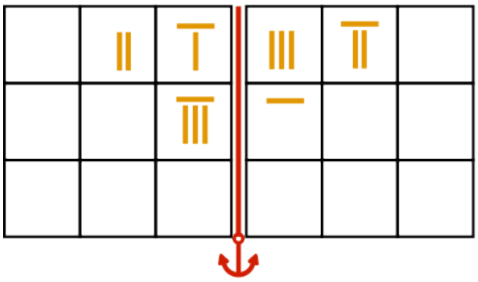
La figure ci-dessus peut être celle de l'addition de deux nombres décimaux, dans le cas général où le nombre de décimales des nombres diffère et on voit clairement pourquoi les virgules doivent être sur une verticale si on veut pouvoir étendre la technique connue pour les nombres entiers à ces nouveaux nombres. Et il en sera de même pour la soustraction.

Pour la multiplication d'un nombre décimal par un entier, nous avons la même présentation et la même technique :

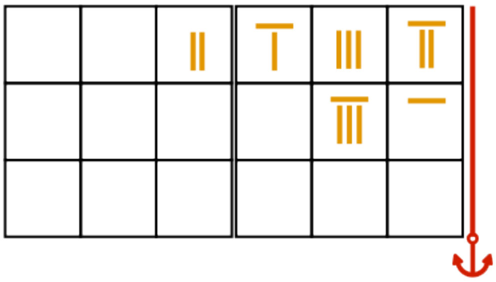


42 x 3,67 = ...

Au CM2, on aborde la multiplication de nombres décimaux. On ne peut plus procéder de la même façon. Et le jeu de décalage nous apporte une solution.



8,5 x 26,37



1000 x (8,5 x 26,37)

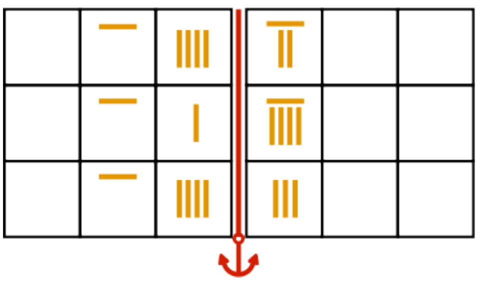
On pousse les deux nombres au-delà de l'amarre et on se retrouve avec la multiplication de deux nombres entiers. Chaque décalage d'une case multiplie par 10 le résultat précédent ; si bien qu'il faudra faire, en sens inverse, autant de décalages sur le produit obtenu.

Vient alors le problème de la comparaison des nombres décimaux et de l'encadrement par des nombres entiers.

La seconde question est certainement la première à régler. D'abord avec des nombres à une décimale :

Quelles actions simples transformeront le premier nombre : 54,7 en un nombre entier ? Donc sans jonchet à droite de l'amarre. On ôte ses 7/10 et on le diminue ou on ajoute 3/10 et on l'augmente. Il est donc entre 54 et 55.

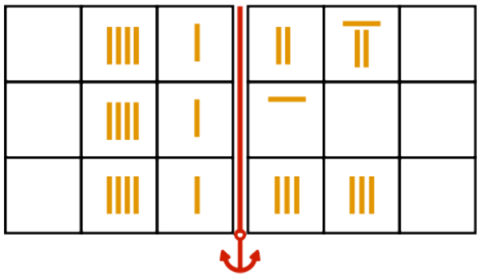
Il est simple de le comparer au deuxième qui est entre 51 et 52 ; et au troisième, car tous deux entre 54 et 55 diffèrent par leur décimale.



51,9 < 54,3 < 54,7

[9] Comme le font les Anglo-saxons.

Pour transformer le nombre 41,27 en un entier, on peut en retrancher ses jonchets à droite de l'amarre. Il est supérieur à 41. on peut aussi lui ajouter 3/100 et obtenir 41,3 puis 7/10 et obtenir 42. Il est donc compris entre 41 et 42. On peut aussi , par ce procédé appliqué à sa deuxième décimale, dire qu'il est compris entre 41,2 et 41,3. Ce qui nous permet de le comparer aux deux autres nombres.



41,27 < 41,33 < 41,5

10 Conversions de mesures

Depuis l'invention de Stevin, une mesure est un nombre (unique) associé à une unité (unique). Recourir aux méthodes archaïques avec unités et sous-unités ne fait qu'embrouiller l'esprit. En revanche, il faut être capable d'exprimer la même mesure avec différentes unités.

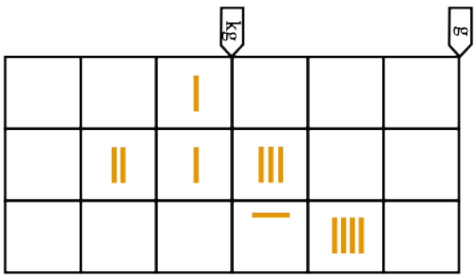
Le système décimal se décline comme une gamme pour les mesures usuelles de longueur et masse (kilomètre, hectomètre, décamètre, mètre, décimètre, centimètre, millimètre ; kilogramme, hectogramme, … milligramme). Mais, en réalité, on n'utilise que kilomètre, mètre, centimètre, millimètre ; kilogramme, gramme, décigramme, milligramme. Ce qui fait qu'on ne dit jamais 1,3 km mais 1,300 km ; 2,5 m mais 2,50 m ; 1,6 kg mais 1,600 kg. Et, en plus, on insère l'unité dans le nombre, renforçant les méthodes anciennes : « un kilomètre trois cents », « deux mètres cinquante », « un kilo(gramme) six cents ».

Je ne crois pas à la commodité des tableaux de conversion systématiques et je préfère exploiter à nouveau la liberté d'expression que m'offre l'abaque à jonchets.

Voici deux exemples :

- Convertir 21,3 kg en g ou 540 g en kg.

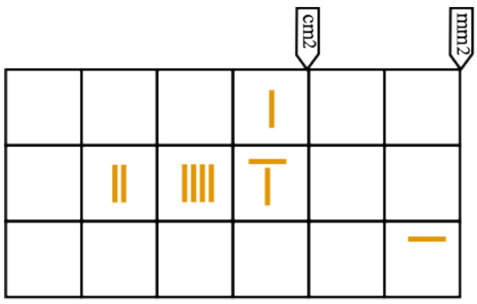
Il faut connaître le rapport de ces deux unités : 1 kg = 1 000 g et préparer deux flèches g et kg. Ces flèches feront deux repères permettant de lire cette égalité sur la première ligne[10]. Puis placer les autres mesures selon l'une de ces flèches et lire la mesure convertie selon l'autre.



21,3 kg = 21 300 g ; 540 g = 0,540 kg

- Convertir 246 cm^2 en mm^2 ou 5 mm^2 en cm^2.

En observant un papier millimétré, on voit que : 1 cm^2 = 100 mm^2.



246 cm^2 = 24 600 mm^2 5 mm^2 = 0,05 cm^2

[10] La première ligne ne sert qu'à placer les deux flèches. Elle peut ensuite être vidée et utilisée.

11 A propos de la division

Sous le titre : Effectuer un calcul posé, le programme officiel propose :

CM1 : Division euclidienne de deux entiers. Division décimale de deux entiers.

CM2 : Division d'un nombre décimal par un nombre entier.

Cependant, la complexité de la technique opératoire de la division m'interroge sur l'importance aujourd'hui de passer autant de temps pour un apprentissage que les enfants ne comprennent pas. Ayant passé ma vie professionnelle à former des instituteurs ou professeurs d'école, j'ai rarement rencontré des enseignants capables de donner une juste explication des actions à réaliser dans cette technique opératoire. Le jeu en vaut-il la chandelle quand un simple téléphone portable, toujours à portée de mains possède une calculatrice ?

Ce n'est pas l'enseignement de la division euclidienne qui m'interroge, mais celui de la technique opératoire. De plus, elle porte fort mal son nom. Même si elle permet de résoudre des problèmes de partage, elle place un nombre (dividende) entre les multiples d'un autre (diviseur).

On peut effectuer des divisions sur l'abaque, mais, contrairement aux actions présentées plus haut, cela ne serait pas un prélude à la technique écrite, mais une variation de même complexité.

Je propose, en remplacement, la technique de duplication des scribes égyptiens qui pouvaient effectuer multiplications et divisions, sans connaissance de tables de multiplication, en sachant doubler n'importe quel nombre. Doubler un nombre est la seule opération simple qui soit simultanément addition et multiplication. (Quelle différence y a-t-il entre 236 + 236 et 2 x 236 ?)

La connaissance préalable à cette pratique est la lecture d'un petit tableau construit à partir d'un nombre. Prenons un exemple : 236

1	236
2	472
4	944
8	1888

Pour faire ce tableau, la colonne de gauche sera toujours la même. À droite, le nombre est placé en face de 1 ; puis il est doublé trois fois successivement pour remplir le tableau. (Pour doubler 236, dites-vous « deux fois 6, 12 et je retiens 1, deux fois 3, 6 et 1, 7... » ou « 6 et 6, 12 et je retiens 1, 3 et 3, 6 et 1, 7... » ? addition ou multiplication ?)

C'est la lecture multiple de ce tableau qui nous donne la clé de la duplication :

1 x 236 = 236 ; 2 x 236 = 472 ; 4 x 236 = 944 ; 8 x 236 = 1 888 ;

10 x 236 = 2 360 ; 20 x 236 = 4 720 ; 40 x 236 = 9 440 ; 80 x 236 = 18 880

100 x 236 = 23 600 ; 200 x 236 = 47 200 ; 400 x 236 = 94 400 ; 800 x 236 = 188 800

Pour faire une multiplication par duplication, on décompose le multiplicateur selon la première colonne. Par exemple : 39 x 236 (39 = 20 + 10 + 8 + 1)

$$\begin{array}{r} 4720 \\ +\ 2360 \\ +\ 1888 \\ +\ 236 \\ \hline 9204 \end{array}$$

39 x 236 = (20 x 236) + (10 x 236) + (8 x 236) + (1 x 236)

Pour faire une division, le même tableau nous permet de savoir « en 6138, combien de fois 236 ? ». Des multiples de 236 lus dans le tableau, c'est 4720 qui est le plus proche (et inférieur). On le soustrait et on note à droite 20 (pour 20 exemplaires de 236) et on recommence jusqu'à un nombre inférieur à 236. Il reste à comptabiliser le nombre d' exemplaires de 236 stockés.

$$
\begin{array}{rr|r}
 & 6138 & \\
- & \underline{4720} & 20 \\
 & 1418 & \\
- & \underline{944} & 4 \\
 & 474 & \\
- & \underline{472} & \underline{2} \\
 & 2 & 26
\end{array}
$$

6138 = 26 x 236 + 2

Sachant réaliser des additions et des soustractions, on peut effectuer des multiplications et des divisions par la même démarche et sans connaissance des tables.

Le fait de commencer par un diviseur à un ou deux chiffres n'a pas de sens ici ; il faut, au contraire que les deux nombres soient assez proches pour ne pas exiger un trop grand nombre de soustractions.

12 Conclusion

Le verbe « apprendre » a pour sujet, soit l'élève, soit le maître (« **J**'ai appris à lire » ou « **Ma maîtresse** m'a appris à lire » ?). Et cela change complètement le sens de l'apprentissage. Etymologiquement, apprendre, c'est attraper, prendre à soi ; et c'est ce que font les enfants naturellement quand ils apprennent à parler, à courir, à dessiner, à découper, … Je me suis toujours senti « enseignant » c'est-à-dire quelqu'un qui accroche des enseignes pour permettre aux élèves d'apprendre le maximum de connaissances avec un minimum de temps et d'efforts. L'enseignant, à la manière d'un catalyseur en chimie, a un rôle essentiel (sans lui, le temps ne serait pas changé en expériences), mais il n'est pas celui qui agit. Il cherche à déclencher des déclics, des éclairs de compréhension à partir de quoi l'élève fera des liens nouveaux et aura grandi.

C'est dans cet esprit de faire découvrir et comprendre la numération décimale que j'ai conçu les instruments présentés ici. Il ne s'agit pas de fournir une machine à calculer remplaçant l'écriture et les algorithmes de ce concept ; mais d'offrir des intermédiaires permettant les déclics dont je viens de parler à partir desquels la pratique des écritures chiffrées ou des techniques opératoires prendront un sens.

On peut remarquer que la demande faite à la mémoire dans le « boulier vivant » ou l'abaque à jonchets est réduite à son minimum : connaissance des dix premiers nombres, ajouter ou retrancher les nombres de 1 à 5, compléments à 10, noms de base du système oral et premières tables de multiplication.

De plus, il est plus naturel pour un enfant d'agir spontanément et la connaissance qui passe par ses mains, ses yeux et les oreilles a plus de chance de laisser une marque indélébile dans son cerveau.

Pour terminer par un clin d'œil, voici la prière de Pythagore, « la tetraktys », envolée lyrique pour louer les quatre premiers nombres, chacun investi d'un pouvoir mystique et qui forment, par leur somme, le dix qui engendre tous les nombres :

« Bénis-nous, nombre divin, toi qui as engendré les dieux et les hommes !

O sainte, sainte Tétraktys !

Toi qui contiens la racine et la source du flux éternel de la création !

Car le nombre divin débute par l'unité pure et profonde et atteint ensuite le quatre sacré,

ensuite il engendre la mère de tout, qui relie tout, le premier-né, celui qui ne dévie jamais, qui ne se lasse jamais : le Dix sacré, qui détient la clef de toutes choses ».

BIBLIOGRAPHIE

DANTZIG T. (1974) *LE NOMBRE langage de la science*, A. Blanchard.

GATTEGNO C. (1973) *the common sense of teaching mathematics*, Educational Solutions.

CONDORCET N. 1989) *Moyens d'apprendre à compter sûrement et avec facilité*, Art, Culture, Lecture – Editions.

IFRAH G. (1981) *Histoire universelle des chiffres*, Seghers.

BETTINELLI B. (2007) *Le carrousel des nombres*, Presses Universitaires de Franche-Comté.

BETTINELLI B. (1989) *Techniques chinoises de calcul, chou suan et suan pan*, Presses Universitaires de Franche-Comté.

MARTZLOFF J.-C. (1987) *Histoire des mathématiques chinoises*, Masson.

1	1	0	1	0	0
2	2	0	2	0	0
3	3	0	3	0	0
4	4	0	4	0	0
5	5	0	5	0	0

6	6 0	6 0 0
7	7 0	7 0 0
8	8 0	8 0 0
9	9 0	9 0 0
0		0 0 0

1	0 1	0 0 1
2	0 2	0 0 2
3	0 3	0 0 3
4	0 4	0 0 4
5	0 5	0 0 5

6	0 6	0 0 6
7	0 7	0 0 7
8	0 8	0 0 8
9	0 9	0 0 9
0	0 0	0 0 0