

Compte rendu de l'expérimentation de "enchainements d'entiers" en classe de seconde.

Première séance

* Enoncé :

On considère un nombre entier n compris entre 2 et 99.

En partant de n , on construit une chaîne de nombres de la façon suivante :

- si un nombre k de la chaîne est pair, le suivant s'obtient en divisant k par 2;
- si un nombre k de la chaîne est impair, le suivant s'obtient en multipliant k par 3 et en ajoutant 1;

La longueur de la chaîne est le nombre d'entiers nécessaires pour atteindre le nombre 1.

Exemple en prenant $n = 20$: $20 - 10 - 5 - 16 - 8 - 4 - 2 - 1$ est une chaîne de longueur 8. Attention, les nombres utilisés dans chaque chaîne ne peuvent s'écrire qu'avec un ou deux chiffres.

*Quel est l'entier compris entre 2 et 99 qui possède la chaîne la plus longue?
Donner sa chaîne complète.*

* Conditions:

Dans une classe de seconde de 34 élèves, par groupes de 3 ou 4 (soit 9 groupes) pendant $\frac{3}{4}$ d'heure.

* Consigne : Résoudre le problème posé à partir de l'énoncé donné sur polycopié.

* Résultats:

8 groupes sur 9 trouvent que 50 donne la plus grande chaîne.

Tous les élèves ont essayé en prenant des exemples pour comprendre l'énoncé ; ce qui n'a pas toujours été immédiat. Le critère concernant les nombres à plus de 2 chiffres n'est pas toujours pris en compte dès le départ. Peut-être faut-il le placer avant l'exemple, comme troisième point dans la consigne et/ou donner second exemple dans lequel on obtient un nombre de 3 chiffres?

5 groupes procèdent par tests en utilisant plus ou moins de critères d'élimination:

Critères d'élimination	Entiers impairs supérieurs à 33	Entiers figurant dans une chaîne	Entiers pairs dont la moitié est supérieure à 33	Entiers qui sont des moitiés de nombres restants	Entiers pairs supérieurs à 60
Groupe I et II	*	*			
Groupe III	*		*	*	
Groupe IV	*	*			*
Groupe V	*				

Le groupe VI a testé le nombre 50 en premier, comme 4 autres groupes, mais n'a pas su expliquer pourquoi c'était le résultat. Les élèves ont cherché à justifier en démontrant, sans

faire de tests et ont fait plusieurs erreurs de raisonnement : ils réfléchissent à partir du double du nombre et expliquent que plus un nombre est grand, plus sa chaîne est grande.

Les groupes VII et VIII ont "remonté la chaîne" ; un seul des deux groupes aboutit, l'autre semble avoir manqué de temps (les étapes données sont justes mais la branche qui termine par 50 n'est pas complète).

Quant au groupe IX, il trouve que 76 a une chaîne de longueur 31 suite à une erreur de calcul. Les élèves ont commencé à écrire les chaînes à partir de 99, puis ont choisi les nombres au hasard mais, comme tous les nombres n'ont pas été testés, leur résultat n'est pas justifié.

Pour plus de détails, voir les copies d'élèves jointes en fin de document.

* Remarques :

- La recherche de cet exercice a eu lieu juste après quelques exercices de lecture d'algorithmes dans lesquels nous avons eu l'occasion de "remonter l'algorithme" pour trouver le nombre entré connaissant le nombre sorti, ce qui a pu influencer les groupes qui ont choisi de "remonter la chaîne";
- Dans cette classe, la plupart des élèves suivent l'option anglais européen, et la classe est d'un bon niveau;
- Plusieurs groupes ont trouvé fastidieux les tests successifs et ont demandé s'il n'y avait pas "un autre moyen de les faire";
- Un des groupes trouve que cela "ressemble à un algorithme".
- En prenant l'entier de départ entre 2 et 100 et en acceptant dans la chaîne des entiers inférieurs ou égaux à 100, la chaîne la plus longue est obtenue pour 66. Le résultat étant moins "intuitif" l'exercice sera sans doute plus intéressant à traiter.

Deuxième séance

* Conditions: en classe entière avec autorisation d'échanger avec le voisin.

* Consigne : écrire un algorithme permettant de calculer l'entier suivant dans la chaîne puis le transcrire en programme pour la calculatrice.

* Résultats:

Les élèves écrivent l'algorithme en langage naturel sans difficultés particulières, en respectant bien les trois étapes (préparation du traitement; traitement et affichage des résultats).

Exemple :

```
variables:
  N, A
Entrer N
Si 2 ≤ N ≤ 99
  alors si N pair alors A ← N/2
  sinon A ← 3N + 1
Fin de si
Afficher A
Fin
```

L'écriture du programme pour la calculatrice est moins simple.

La question du test de la parité de l'entier se pose assez vite. Je leur propose de regarder la fonction partie entière de la calculatrice. Ils calculent quelques images puis pensent à utiliser la fonction table puis la fonction graph. Par contre, ils ont du mal à exploiter les résultats observés.

L'idée que la partie entière d'un entier est cet entier et l'idée qu'un nombre pair est un nombre dont la moitié est un entier ont eu beaucoup de mal à émerger mais ont été bien acceptées. Ensuite viennent les difficultés liées au langage de programmation proprement dit. Ils ont pourtant déjà écrit deux programmes sur leur calculatrice en classe (à partir d'algorithmes donnés dont un avec une instruction de "si... sinon")

La classe se divise alors en deux groupes:

Dans le premier, le plus nombreux, les élèves ne savent pas comment s'y prendre, ils n'ont pas l'idée de reprendre la fiche indiquant où trouver les instructions; ils n'utilisent pas l'algorithme que l'on vient d'écrire. Ils me sollicitent à chaque instant pour trouver l'erreur dans leur programme, même après qu'un élève a écrit son programme et l'a fait fonctionner au tableau grâce à un simulateur. Ils ont donc un exemple au tableau mais préfèrent faire appel à moi plutôt que de s'en servir.

Bref, leur manque d'autonomie et d'initiative les handicapent et on se rend bien compte qu'ils ne savent pas tirer profit d'un corrigé.

Dans le second groupe, les élèves sont très à l'aise avec leur calculatrice, ils écrivent rapidement leur programme et s'entraident lorsqu'il ne fonctionne pas. Ils cherchent seuls ce qu'il faut corriger et obtiennent un résultat. Je les invite à aller aider leurs camarades.

Voici le programme 1 écrit sur casio 35+

```
"ENTRER UN ENTIER"↵
```

```
? → N↵
```

```
If Intg(N ÷ 2)=N ÷ 2↵
```

```
Then N ÷ 2 → A↵
```

```
Else 3 × N+1 → A↵
```

```
A↵
```

* Travail à faire pour la semaine suivante: écrire un algorithme permettant de calculer l'entier suivant dans la chaîne en incluant la condition: si l'entier dépasse 100, faire afficher "la chaîne est cassée" puis le transcrire en programme pour la calculatrice.

Troisième séance

* Conditions: en classe entière.

* Beaucoup d'élèves avouent ne pas avoir su faire le travail demandé. En fait, ils n'ont pas fait la différence entre "écrire l'algorithme" et "écrire un programme" pour la calculatrice.

Nous reprenons ensemble l'écriture de l'algorithme qui ne leur pose finalement pas de difficultés particulières.

La programmation reste assez difficile : les élèves ne s'appuient pas assez sur l'algorithme pour écrire leur programme et rencontrent deux difficultés "nouvelles" :

- l'obligation de mettre une "fin de si" chez casio dans le premier exemple;

- la calculatrice ne comprend pas l'instruction " $2 \leq N \leq 99$ " choisie par beaucoup au détriment de " $N > 99$ " plus facile à utiliser. On rappelle que $2 \leq N \leq 99$ signifie $2 \leq N$ et $N \leq 99$; ils donnent alors l'instruction " $N \geq 2$ et $N \leq 99$ ".

Deux élèves ont réussi à créer un programme dans lequel ils rappellent le programme 1 écrit à la séance précédente.

Voici deux exemples de programme 2 écrits pendant la séance sur casio 35+ :

```
"ENTRER UN ENTIER"↵  
? → N↵  
If N ≥ 2 And N ≤ 99↵  
Then If Intg(N ÷ 2)=N ÷ 2↵  
Then N ÷ 2 → A↵  
Else 3 × N+1 → A↵  
A↵  
IfEnd↵  
Else "STOP" ▲
```

```
"ENTRER UN ENTIER"↵  
? → N↵  
If N>99↵  
Then "Chaîne cassée"↵  
Else If Intg(N ÷ 2)=N ÷ 2↵  
Then N ÷ 2 → A↵  
Else 3 × N+1 → A↵  
A↵
```

Quatrième séance

* Conditions: en demi-classe en salle informatique.

* Consigne : dans une feuille de calculs, remplir la première colonne par les entiers de 2 à 99 puis écrire une formule dans B1 que l'on recopiera vers le bas pour obtenir le deuxième nombre de la chaîne de chaque entier.

* Les élèves ont déjà utilisé le tableur en troisième mais peu d'entre eux savent qu'il existe des fonctions intégrées. On en parle rapidement ensemble puis on rappelle l'algorithme déjà écrit sur le passage d'un entier au suivant.

La majorité des élèves joue le jeu et obtient assez vite un résultat même si beaucoup cherchent la fonction "sinon" du tableur... Différencier ce que le tableur appelle "test", "valeur si vrai" et valeur si faux" n'est pas immédiat et les oblige à en parler, entre eux le plus souvent.

On "tire" ensuite la formule vers la droite pour obtenir toute la chaîne. Ils constatent que tout ne convient pas: la chaîne continue après l'obtention du 1 ou lorsque le nombre dépasse 100. Certains brisent la chaîne en limitant la recopie vers la droite et d'autres émettent l'idée que l'on pourrait modifier la formule, ce que je leur demande de faire.

Mis à part un petit groupe d'élèves qui a totalement décroché et qui semble perdu, les élèves semblent assez motivés et intéressés. On réécrit au tableau l'algorithme de la situation en utilisant de la couleur pour repérer les deux structures de "si" afin de les aider à placer les instructions au bon endroit dans la formule.

Beaucoup d'élèves ont eu du mal à utiliser la structure de l'instruction "ou" alors que celle du "si" ne les avait pas gênés. La fonction "EST.PAIR" a été trouvée tout de suite et utilisée sans difficulté particulière.

Dans l'ensemble, ils ont trouvé que le tableur était plus facile à utiliser que la calculatrice. En effet, en une séance, ils ont obtenu les chaînes complètes. Il faut cependant remarquer, qu'à ce stade, ils connaissaient bien le problème posé...

Voici quelques copies d'élèves relatives à la première séance :

- On élimine déjà tous les nombres impairs supérieurs à 33, car $33 \times 3 + 1 = 100$, ce qui n'est pas possible. On élimine ensuite les nombres pairs, dont la moitié est un nombre impair supérieur à 33.
- On élimine ensuite tous les nombres qui sont des moitiés des nombres restants, qu'ils soient impairs ou pas.
- Grâce à ces informations, on est en mesure de certifier que la chaîne la plus longue est celle de 50.

On sait que tous les nombres impairs supérieurs à 31 ne sont pas valables ainsi que tous les nombres pairs supérieurs à 60.

À partir de là, on a essayé au hasard, dès que l'on tombait sur un chiffre déjà vu, on le barrait. 50 a été le chiffre le plus prometteur avec 25 nombres à sa solution.

50 - 25 - 75 - 38 - 19 - 58 - 29 - 88 -
44 - 22 - 11 - 34 - 17 - 52 - 26 - 13 - 40 -
20 - 10 - 5 - 16 - 8 - 4 - 2 - 1.

On a éliminé tous les nombres, il ne restait que 50.

50 - 25 - 76 - 38 - 19 - 58 - 29 - 88 - 44 - 22 - 11 - 34 - 17 - 52 - 26 - 13 - 40 - 20 - 10 - 5 - 16 - 8 - 4 - 2 - 1 est une chaîne de longueur 25.

$n = 50$.

On a raisonné en prenant la chaîne à l'envers:

