

1. Exercice donné en temps libre

On donne l'algorithme ci-dessous :

ENTRÉE	Saisir un entier N à 3 chiffres distincts deux à deux.
TRAITEMENT	Répéter 5 fois : G prend la valeur du plus grand nombre que l'on peut écrire avec les 3 chiffres de N P prend la valeur du plus petit nombre que l'on peut écrire avec les 3 chiffres de N D prend la valeur $G - P$ N prend la valeur D
SORTIE	Afficher N

- Quelles sont les variables informatiques utilisées dans cet algorithme ?
- Faire tourner cet algorithme en indiquant, pour chaque étape, le contenu de chaque variable lorsque l'on saisit comme entrée le nombre 718.
- Faire tourner cet algorithme en indiquant, pour chaque étape, le contenu de chaque variable en saisissant comme entrée un nombre entier à 3 chiffres de votre choix.
- Émettre une conjecture.**

2. Bilan en classe (en demi-groupe)

Quelques élèves avaient confondu « chiffres » et « nombres ». Quelques élèves avaient omis de « Répéter 5 fois ». Enfin 1 élève avait ajouté la valeur de D à la valeur de N , au lieu de remplacer la valeur de N par celle de D . Néanmoins presque tous les élèves avaient pu conjecturer que : « Quel que soit le nombre N saisi en entrée, le nombre N affiché en sortie est égal à 495. »

Pour démontrer cette conjecture, les élèves ont proposé, dans le premier groupe, d'étudier tous les cas possibles avec un tableur et dans le deuxième groupe, « de prendre des lettres ».

(a) Étude de tous les cas possibles avec un tableur

Afin que les élèves puissent ensuite travailler en autonomie, je leur ai d'abord présenté quelques fonctions du tableur :

- ENT : pour prendre la partie entière d'un nombre.
- STXT : pour extraire une chaîne de caractères (ici pour extraire un chiffre d'un nombre).
- CNUM : pour transformer du format texte au format numérique.
- GRANDE.VALEUR : pour renvoyer la k ème plus grande valeur d'une série de nombres.

Les élèves ont ensuite travaillé individuellement avec un tableur.

L'extraction des différents chiffres s'est faite pour la plupart avec la fonction « STXT », sinon avec la fonction « ENT » (en commençant par extraire le chiffre des centaines). Le classement par ordre croissant (ou décroissant) s'est fait sans problème. En revanche, l'écriture d'un nombre à partir des trois chiffres présente une réelle difficulté pour les élèves.

(b) Démonstration « avec des lettres »

En notant x , y et z les chiffres de N , x étant le plus petit et z le plus grand, on a $G = \overline{zyx}$ et $P = \overline{xyz}$, la difficulté pour les élèves étant de calculer D : cette difficulté est la même que dans la méthode avec un tableur, à savoir l'écriture d'un nombre à partir de ses trois chiffres. Le calcul conduit à $D = 99z - 99x$, puis, en étudiant les différents cas, on obtient différentes valeurs envisageables pour D . Il reste alors encore à traiter ces différents cas.

L'heure s'est terminée sans que les élèves aient finalisé la démonstration, qu'il s'agisse de la démonstration « avec des lettres » ou de la démonstration « avec un tableur ».

3. Exercice donné en temps libre : « Démontrer la conjecture de la question (d). »

(a) Étude de tous les cas possibles avec un tableur

- Une élève a fourni le fichier intitulé « Kaprekar-eleve-1.ods », accompagné du commentaire ci-dessous :

Tous les nombres qui contiennent trois chiffres identiques comme 111, 222, ..., 999 sont des nombres qui s'annulent car il n'y a pas de plus grand ou de plus petit donc au moment de soustraire le plus grand et le plus petit, le résultat est égal à zéro du premier au dernier D.

Je constate que les nombres qui à la fin de l'algorithme se terminent par 594 sont des nombres qui ne contiennent

que deux chiffres différents et qui sont égaux depuis le début car dès le premier « D » ils sont tous égaux à 99. Pour tous les autres nombres l'algorithme affiche 495 au bout de la 5^{ième} répétition.

- Un autre élève a fourni le fichier intitulé « Kaprekar-eleve-2.ods », accompagné du commentaire ci-dessous :

On a reconstitué l'algorithme sur un ordinateur à l'aide d'un tableur. On a testé des nombres entiers allant de 102 à 987. On a répété deux fois le processus pour chaque nombre. Dans le premier résultat on voit que beaucoup de nombres sont égaux, certains sont déjà à égaux à 495. Dans le deuxième résultat on voit plus de nombres égaux à 495 que dans le premier. Les nombres les plus proches de 495 dans le premier résultat sont devenus 495 dans le deuxième résultat, et tous les autres résultats se sont rapprochés de 495.

(b) **Démonstration « avec des lettres »**

Un extrait de copie d'élève : *Je démontre que, avec l'algorithme de Kaprekar, quel que soit le nombre choisi, le nombre de sortie sera 495.*

Je remplace les chiffres par les lettres a , b et c .

On donne $a > b > c$. Donc le plus grand nombre que l'on peut écrire avec les 3 chiffres de N est abc et le plus petit nombre P que l'on peut écrire est cba .

$$\begin{aligned} D &= G - P \\ &= abc - cba \\ &= 100 \times a + 10 \times b + c - (100 \times c + 10 \times b + a) \\ &= 99a - 99c \\ &= 99(a - c) \end{aligned}$$

Donc le nombre D est un multiple de 99.

On sait que $(a - c)$ est un nombre entier compris entre 2 et 9 car $a > c$.

L'élève énumère ensuite les différentes valeurs possibles pour D , et pour ces différentes valeurs possibles, fait « tourner plusieurs fois l'algorithme » et obtient toujours 495.

4. Deuxième bilan en classe

Deux points sont ainsi abordés, quelle que soit la méthode choisie par les élèves (utilisation d'un tableur ou démonstration « avec des lettres ») :

- l'écriture d'un nombre dans le système de numération en base 10 ;
- la possibilité de réduire le nombre de cas initial à étudier à seulement 8 cas.