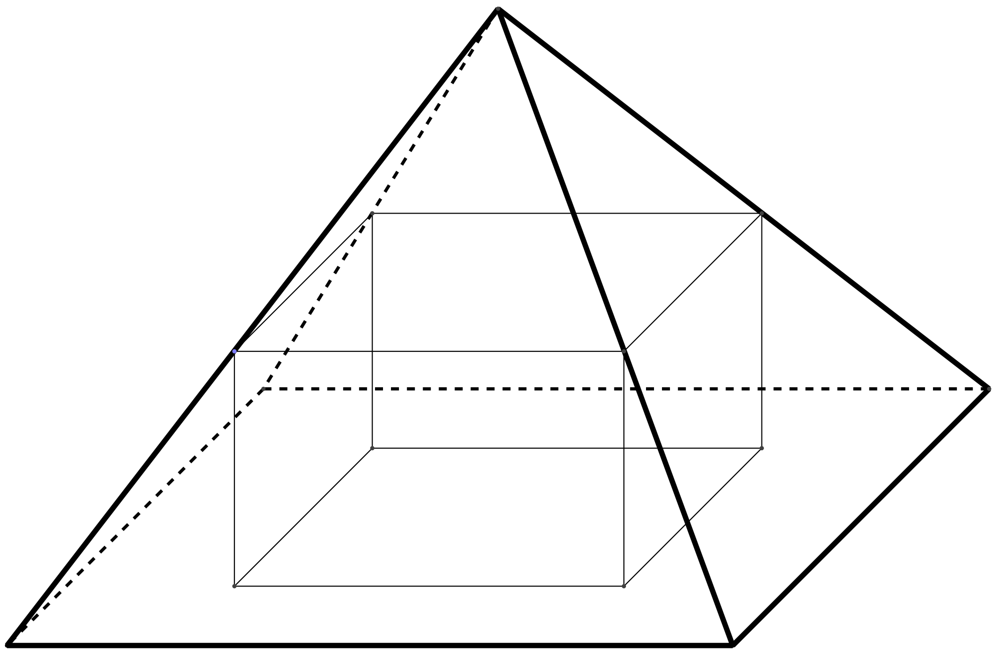
Pavé dans une pyramide



PRÉAMBULE.
Cette étude porte sur des configurations simples de l'espace: le pavé droit et la pyramide de base carrée dont les faces sont des triangles équilatéraux, objets bien connus des élèves de collège.
Nous nous proposons tout d'abord de déduire la représentation en perspective cavalière de la pyramide à partir de celle du cube.
Nous étudierons ensuite la configuration d'un pavé droit inscrit dans une pyramide à base carrée : quatre sommets du pavé étant sur les côtés des triangles équilatéraux, les autres sur les diagonales du carré de base.
Nous détallerons les points suivants :
– Comment représenter un pavé droit inscrit dans une pyramide à partir de la représentation cavalière de la pyramide.
– Les propriétés géométriques simples dégagées dans l'étude de la configuration permettent d'introduire naturellement une fonction liant le côté du carré de base du pavé inscrit à sa hauteur. L'étude de cette fonction nous permettra de déterminer les dimensions du pavé de volume maximum inscrit dans la pyramide. Cette étude peut être réalisée à différents niveaux de la seconde (méthode algébrique) à la terminale (utilisation de la dérivée d'une fonction).
– Nous chercherons enfin la dimension du côté du carré de base pour laquelle le pavé est un cube.

Ce document, dont les différentes parties peuvent être exploitées indépendamment, donne l'occasion de construire des activités différenciées de la classe de seconde à celle de terminale des lycées d'enseignement généraux et technologiques.

Cette étude peut-être menée en utilisant conjointement un logiciel de géométrie dynamique.

Plan du document

Auteurs : Michel Magnenet, Alain Boussard
IREM de Franche Comté

1 Pyramide à base carrée : représentation en perspective cavalière.

Étant donnée une pyramide à base carrée et dont les faces sont des triangles équilatéraux, construire la représentation en perspective cavalière de cette pyramide, celle d'un cube étant donnée. $\mathscr{P}$ désigne cette pyramide.

Analyse de la configuration.

Soit S le sommet de cette pyramide et $ABCD$ le carré de base de côté a.
Les diagonales du carré se coupent en Ω et on a : $\Omega A = \frac{a\sqrt{2}}{2}$
S est un point de l'espace équidistant des 4 points A, B, C et D ; il en est de même pour le point Ω.
$(S\Omega)$ est donc la hauteur de cette pyramide.

Dans le triangle rectangle $SA\Omega$, $SA = a$, $\Omega A = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, donc $S\Omega = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Les triangles $SA\Omega$, $SB\Omega$, $SC\Omega$ et $SD\Omega$ sont des triangles rectangles isocèles.

Dans le triangle SAC, on a : $SA = a$, $SC = a$ et $AC = a\sqrt{2}$
donc (SA) est perpendiculaire à (SC). De même, (SD) est perpendiculaire à (SB).

Représentation en perspective cavalière, celle du cube étant donnée.

La représentation en perspective cavalière du cube est donnée par la figure 1.

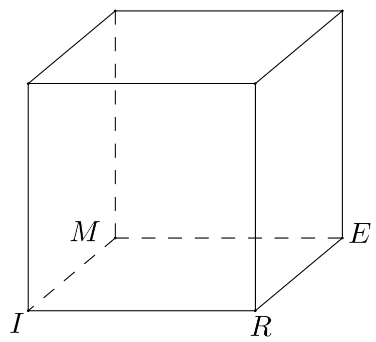
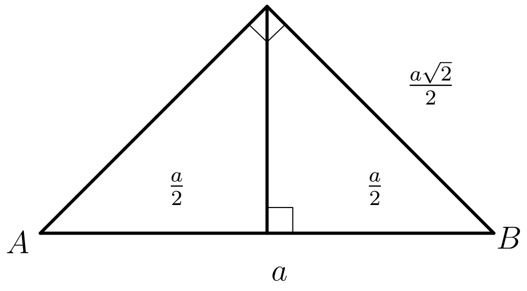


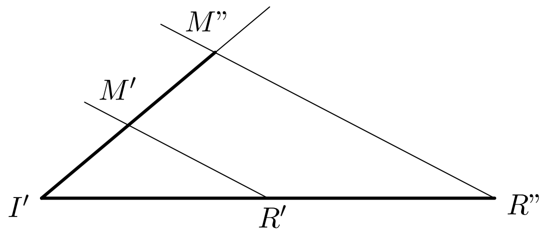
figure 1

Ainsi, nous connaissons l'angle de fuite $\widehat{RIM}$ et le rapport de réduction $\frac{IM}{IR}$.



Le tracé d'un triangle rectangle isocèle dont l'hypoténuse mesure a permet d'obtenir un segment de mesure $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

La représentation de la pyramide peut être réalisée de la façon suivante:



- Tracé du segment $[AB]$ tel que :
  $AB = a$ et (AB) parallèle à (IR).

- Tracé de $[AD]$ tel que :
  (AD) parallèle à (IM) et $AD = I'M"$
  avec :

$$\begin{cases} \overrightarrow{I'R'} = \overrightarrow{IR} \\ \overrightarrow{I'R"} = \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{I'M'} = \overrightarrow{IM} \\ \text{et} \\ (R"M") \text{ parallèle à } (R'M') \end{cases}$$

- Tracé du parallélogramme $ABCD$ de centre Ω.

- Tracé de S tel que (ΩS) perpendiculaire à (AB) et $\Omega S = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

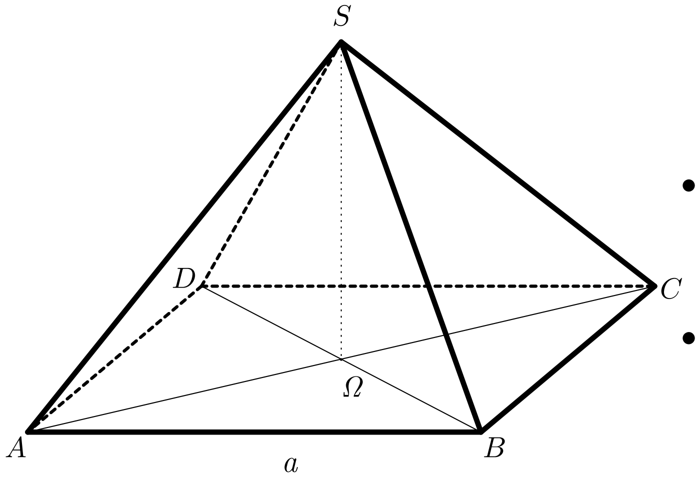
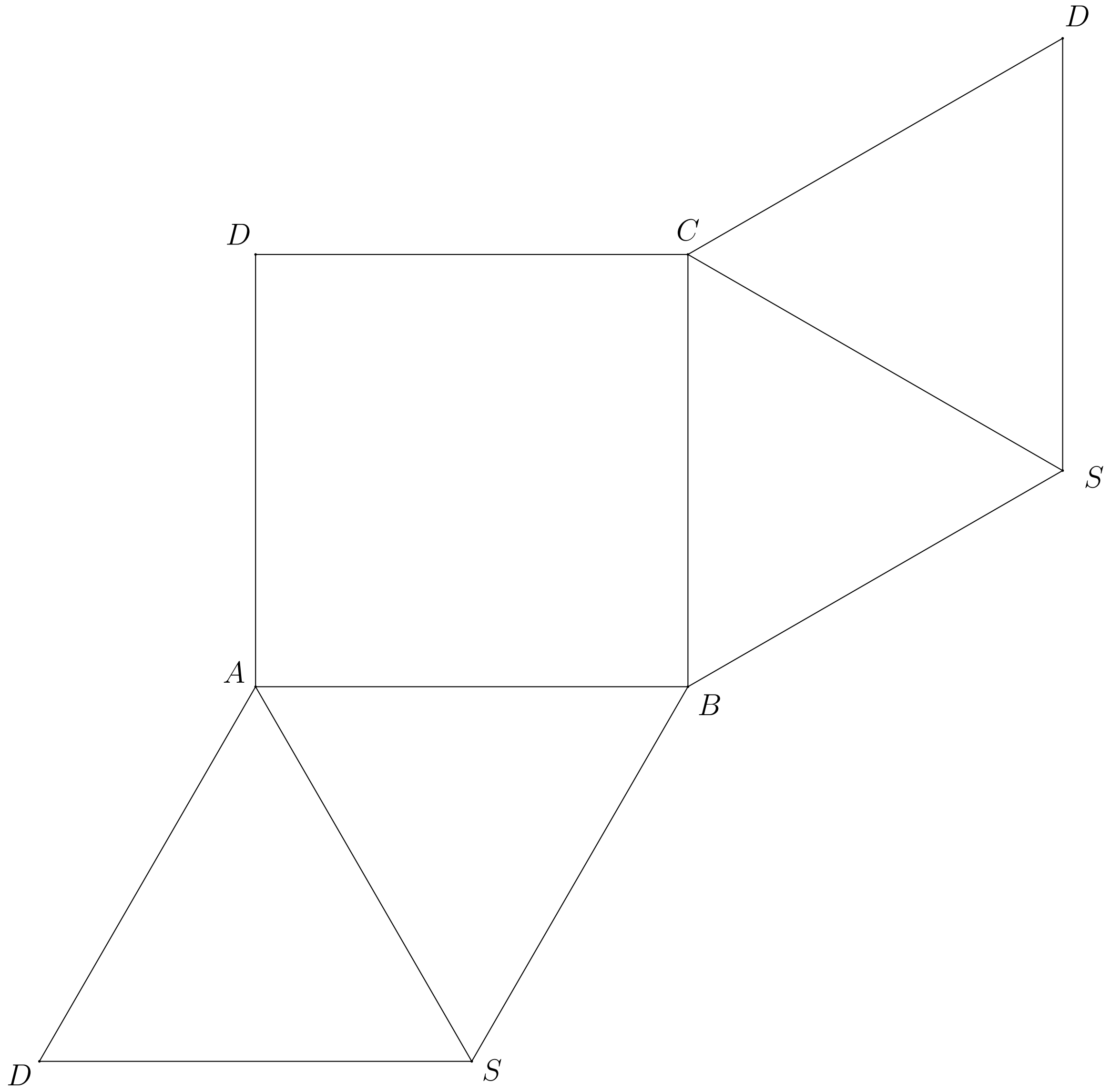


figure 2

Remarques :

- La somme des longueurs des arêtes de $\mathscr{P}$ est $8a$.
- La somme des aires des faces de $\mathscr{P}$ est $(1 + \frac{\sqrt{3}}{4}) \cdot a^2$
- Volume de la pyramide $\mathscr{P}$ est $\frac{\sqrt{2}}{6} \cdot a^3$

Patron de la pyramide



Remarque:
Ce patron peut-être tracé dès la définition de la pyramide. La réalisation de $\mathscr{P}$ permet une visualisation de ce solide, afin de mieux appréhender sa représentation en perspective cavalière.

2 Pavé dans une pyramide : représentation en perspective cavalière.

On considère une pyramide à base carrée, dont les faces sont des triangles équilatéraux, et un pavé droit à base carrée "inscrit" dans celle-ci. Nous allons construire la représentation en perspective cavalière de cette configuration.
Les sommets du pavé sont soit sur les côtés des triangles équilatéraux, soit dans le carré de base.

Analyse de la configuration.

L'analyse de la configuration de la pyramide est donnée dans le paragraphe précédent.

Représentation en perspective cavalière.

Pour la pyramide, on utilise la représentation précédente.
Les quatre sommets I, J, K, L du pavé sont des points des diagonales du carré de base $ABCD$.
Les quatre autres, M, N, O et P sont respectivement sur les cotés $[AS]$, $[BS]$, $[CS]$ et $[DS]$ de la pyramide.

La donnée du point I détermine les autres sommets du pavé.

I est placé sur $]A\Omega[$, on en déduit J, K, L.
$IJKL$ est un carré de centre Ω.
On pose $AI = k \cdot A\Omega$ avec $0 < k < 1$.

Dans le triangle $SA\Omega$, de I on trace la parallèle à $(S\Omega)$; elle coupe $]SA[$ en M.
On en déduit que $IM = k \cdot \Omega S$.
Par ailleurs, les droites (IM) et $(S\Omega)$ sont parallèles et $(S\Omega)$ est perpendiculaire à la base $(ABCD)$, donc (IM) est perpendiculaire à $(ABCD)$.
On obtient de même les points N, O et P.
$IJKL$ est un carré, les segments $[IM]$, $[JN]$, $[KO]$ et $[LP]$ sont perpendiculaires à $(IJKL)$ et de même longueur.

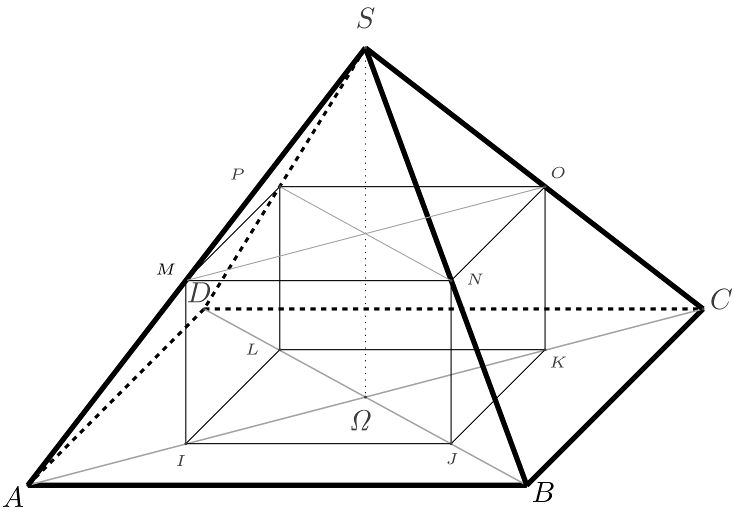


figure 3

$IJKLMNOP$ est le pavé demandé.
De $AI = k \cdot A\Omega$, on déduit que $IJ = (1-k)AB$.

Remarques:
En fonction de k, les longueurs de arêtes du pavé sont $(1-k)a$ et $k\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

- La somme des longueurs des arêtes du pavé est : $(8(1-k) + 2k\sqrt{2}) \cdot a$

- La somme des aires des 6 faces du pavé est : $2a^2 \cdot ((1-k)(1+(\sqrt{2}-1)k)$

- Le volume du pavé est : $k\frac{\sqrt{2}}{2}(1-k)^2 \cdot a^3$

3 Pavé, de volume maximum, dans une pyramide.

Le pavé est celui du paragraphe précédent, inscrit dans une pyramide de base carrée de côté a et de hauteur $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.
Le paramètre k fixe laposition du point I sur le segment $[A\Omega]$ $\quad (k = \frac{AI}{A\Omega})$
Nous allons déterminer la position du point I pour lequel le volume du pavé est maximal. Le volume du pavé est $k\frac{a\sqrt{2}}{2}(1-k)^2a^3 \qquad k \in]0\ ;\ 1[$

Soit $V(k) = k\frac{a\sqrt{2}}{2}(1-k)^2a^3 \qquad$ où $k = \frac{AI}{A\Omega}$.

Remarques:
– Si $k = 0$, le "pavé" est aplati ; son volume est nul.
– Si $k = 1$, le "pavé" est réduit à un segment, son volume est nul.

Cette situation géométrique permet d'introduire naturellement la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(k) = k \cdot (1-k)^2$.
Dans la situation géométrique, la variable k décrit a priori l'intervalle $]0, 1[$. On ajoute les cas limites pour définir finalement f sur l'intervalle fermé $[0, 1]$.

$$V(k) = a^3\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot f(k)$$

L'étude des variations de la fonction f permet de déterminer la valeur de k pour laquelle le volume est maximal. La fonction f est une fonction polynôme du troisième degré.

Etude des variations de f à l'aide de sa dérivée f est une fonction dérivable $\qquad f'(k) = (1-k)^2 + k(2(k-1))$ d'où $f'(k) = (k-1)(3k-1)$

k	0		$\frac{1}{3}$		1
$f'(k)$		$+$	0	-	
$f(k)$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	0

V admet un maximum sur $[0\ ;\ 1]$ égal à $V(\frac{1}{3})$.

$V(\frac{1}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{6} \times \frac{4}{9}\ a^3 \qquad$ d'où $\qquad V(\frac{1}{3}) = \frac{2\sqrt{2}}{27}\ a^3$

Conclusion:
Lorsque le point I est au tiers du segment$[A\Omega]$ à partir de A, le pavé a un volume maximum.

$AI = \frac{1}{3} \cdot A\Omega$

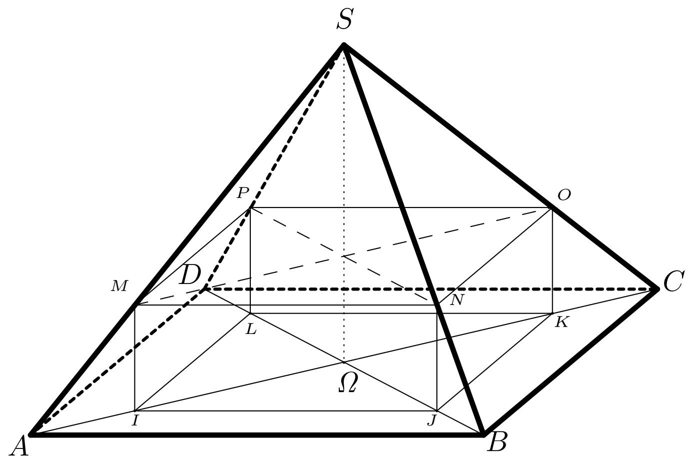


figure 4

Le volume de la pyramide $\mathscr{P}$ est :

$$V = \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot a^3$$

Le rapport des volumes est :

$$\frac{v}{V} = \frac{4}{9}$$

Remarque :
La hauteur du pavé de volume maximum est égale au tiers de la hauteur de la pyramide.

Détermination du maximum par une méthode algébrique.

La recherche du maximum de $f(k)$ peut être conduite à l'aide de calculs algébriques. Cela permet de résoudre le problème en classe de seconde.
L'observation du graphe de f ou du tableau de valeurs de $f(k)$ permet de conjecturer que $\frac{1}{3}$ joue un rôle intéressant ; $f(\frac{1}{3}) = \frac{4}{27}$.

Vérifions que $\frac{1}{3}$ est un maximum en utilsant un calcul algébrique.

Étude du signe de $\frac{1}{3} - f(k)$.

$f(\frac{1}{3}) - f(k) = \frac{4}{27} - k(1-k)^2$.
Cette expression s'annule pour $k = \frac{1}{3}$, on peut guider les élèves pour obtenir la factorisation suivante :

$$f(\frac{1}{3}) - f(k) = (k - \frac{1}{3})^2(\frac{4}{3} - k)$$

Conclusion :
Ainsi, pour tout réel k de $[0\ ;\ 1]$ différent de $\frac{1}{3}$, la différence $f(\frac{1}{3}) - f(k)$ est strictement positive. Cela signifie que $\frac{1}{3}$ est le maximum de f sur $[0\ ;\ 1]$.

4 Cube dans une pyramide

Problème : Inscrire un cube dans une pyramide à base carrée dont les faces sont des triangles équilatéraux. Les notations sont celles du paragraphe 2.

Représentation en perspective cavalière d'un pavé inscrit dans la pyramide $\mathscr{P}$.

La donnée du point I permet de construire le pavé.

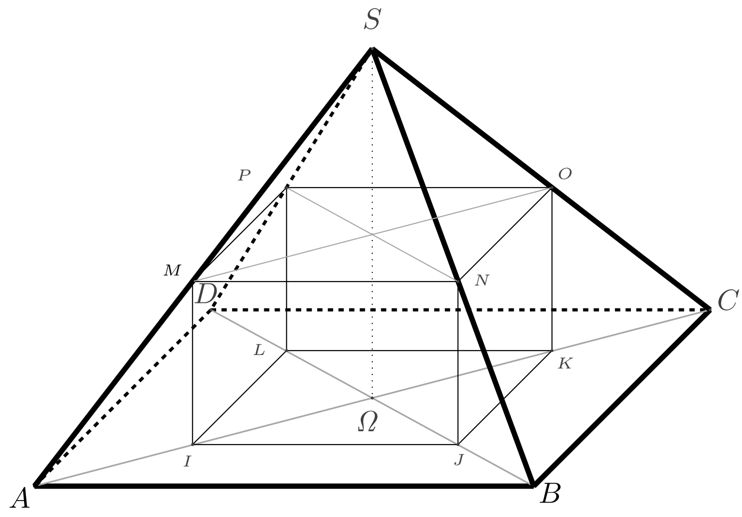


figure 3

Comment choisir I pour que ce pavé soit un cube ?

Méthode 1: Utilisation d'une méthode de géométrie plane.

Le pavé $IJKLMNOP$ est un cube si et seulement si $IM = IJ$.

Dans un quart de tour autour de $(A\Omega)$, A et Ω sont invariants. S vient en B car $S\Omega = \Omega B$, M de $[SA]$ vient en M' de $[BA]$.
(IM) étant perpendiculaire à $(A\Omega)$, (IM') est perpendiculaire à $(A\Omega)$.
On en déduit que $IM = IM'$.

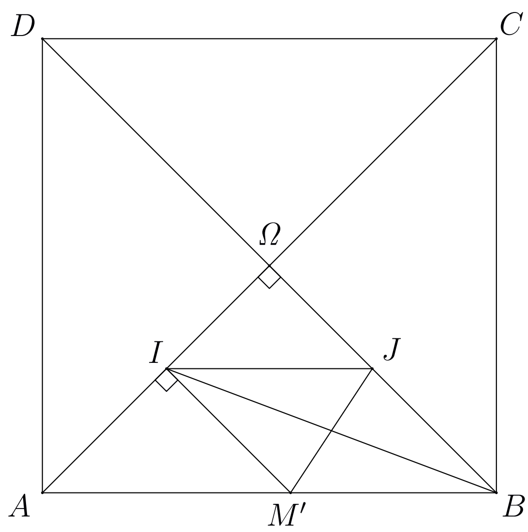
Le pavé est un cube si et seulement si $IM = IJ$ c'est à dire si $IM' = IJ$.

Dans le plan (ABCD) :

$(IJBM')$ est un parallélogramme.

$IM' = IJ$ si et seulement si $(IJBM')$ est un losange.

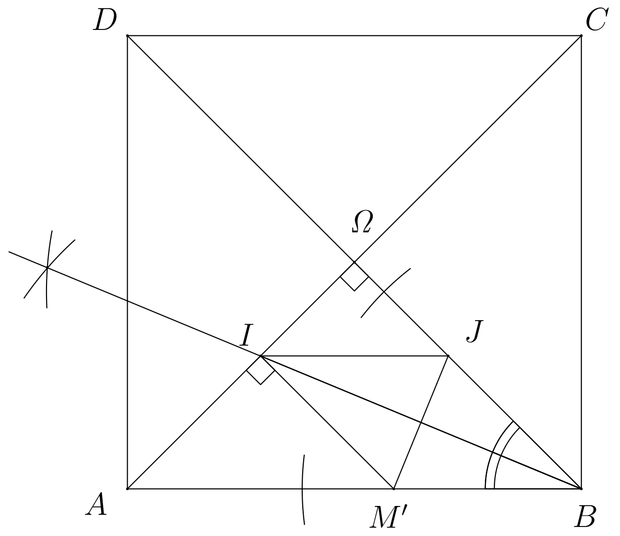
$(IJBM')$ est un losange si et seulement si (BI) est bissectrice de l'angle $\widehat{\Omega BA}$.



Tracé du losange en vraie grandeur.

On trace la bissectrice de l'angle $\widehat{\Omega BA}$.
Elle coupe $[A\Omega]$ en I.
Le tracé du losange $IJBM'$ est ainsi obtenu.
La perspective cavalière conserve les rapports.

La connaissance de I sur $[A\Omega]$ permet de réaliser en perspective cavalière la pyramide et le cube.



La représentation en perspective cavalière de $\mathscr{P}$ étant connue (voir paragraphe 1), le point M' peut-être construit sur le segment $[AB]$ en vraie grandeur.
De M' on trace la parallèle à (ΩB) qui coupe $[A\Omega]$ en I.

La représentation du cube peut alors se terminer.

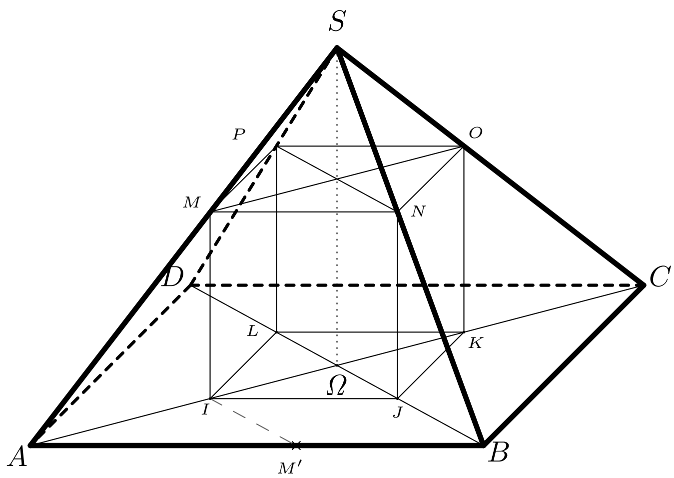


figure 5

Calcul du rapport $\frac{\Omega I}{\Omega A}$.

Dans le triangle $AB\Omega$, I est le "pied" de la bissectrice de l'angle $\widehat{B}$ sur $[A\Omega]$.

Une propiété [1] de la bissectrice permet d'écrire : $\frac{I\Omega}{IA} = \frac{B\Omega}{BA}$ avec $B\Omega = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ et $BA = a$,

donc $\frac{I\Omega}{IA} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

On en déduit que $\frac{\Omega I}{\Omega A} = \sqrt{2} - 1$ ce qui permet de placer le point I.

1. Cette propriété est démontrée plus loin

Comparaison des volumes :

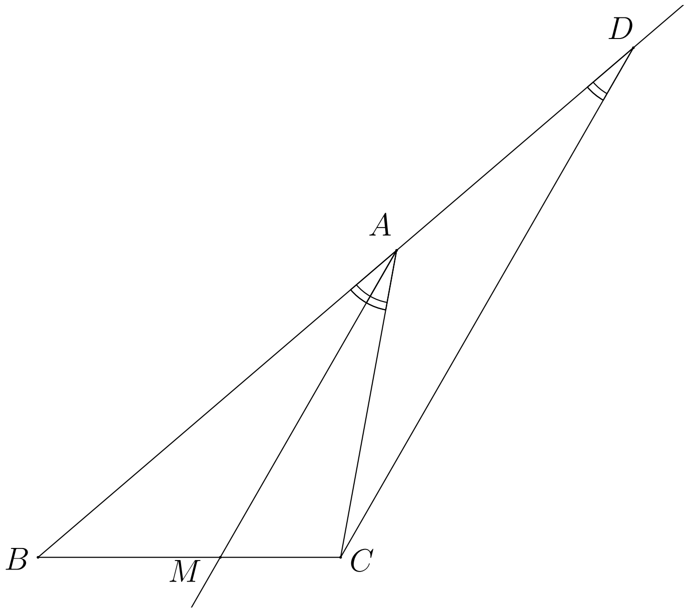
$\frac{\Omega I}{\Omega A} = \sqrt{2} - 1$ et $\frac{\Omega I}{\Omega A} = \frac{IJ}{AB}$ d'oú $IJ = a(\sqrt{2} - 1)$.

Le volume du cube est : $a^3 \cdot (\sqrt{2} - 1)^3$.

Or le volume de la pyramide est : $a^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{6}$

Le rapport des volumes entre le cube et la pyramide est : $6 \cdot (10 - 7\sqrt{2})$.

Démonstration de la propriété de la bissectrice.



ABC est un triangle, $[AM)$ la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

De C, on trace la parallèle à (MA) qui coupe (BA) en D.

on : $\widehat{DCA} = \widehat{MAC}$ et $\widehat{BAM} = \widehat{ADC}$,
d'où $AC = AD$.

Dans le triangle BAD, les droites (MA) et (CD) sont parallèles.

On en déduit que :

$\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AD}$ et donc que $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$.

Méthode 2: Utilisation d'une méthode algébrique.

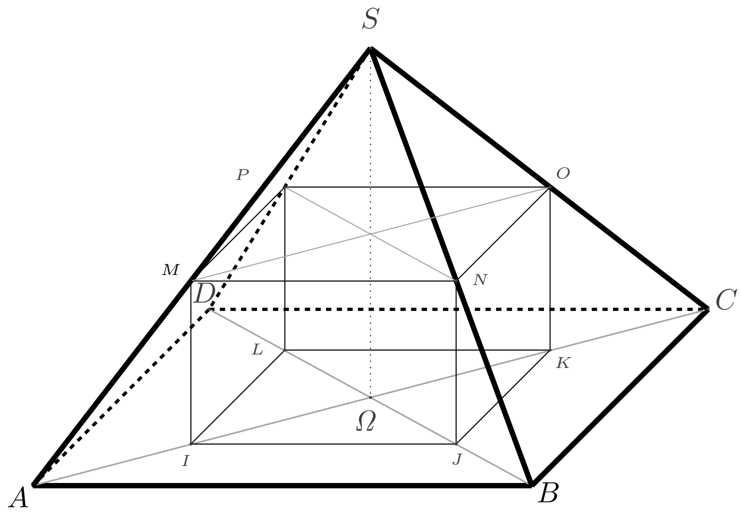


figure 3

Posons $IJ = x$. Calculons IM.

Les droites (IJ) et (AB) sont paralèlles, d'où $\frac{IJ}{AB} = \frac{\Omega I}{\Omega A}$

On en déduit $\frac{\Omega I}{\Omega A} = \frac{a-x}{a}$

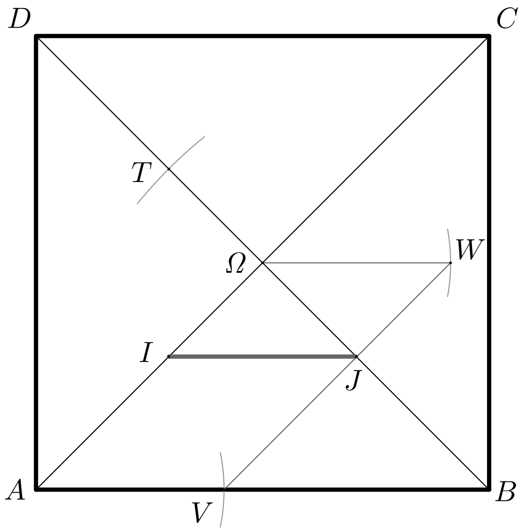
Les droites (IM) et $(S\Omega)$ sont paralèlles, d'où $\frac{IM}{S\Omega} = \frac{AI}{A\Omega}$

On en déduit $IM = \frac{a-x}{a} \times \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$IJKLMNOP$ est un cube si et seulement si $IM = IJ$.

$IM = IJ$ si et seulement si $\frac{\sqrt{2}}{2}(a - x) = x$ soit $x = (\sqrt{2} - 1) \cdot a$.

<u>Conclusion :</u>
Le pavé est un cube lorsque le côté de la base du pavé a pour longueur $a(\sqrt{2} - 1)$.



Tracé en vraie grandeur de la base.

$AB = a$, $BD = a\sqrt{2}$.
Soit T sur $[BD]$ tel que $BT = a$;

on a $DT = a(\sqrt{2} - 1)$.

Soit V de $[AB]$ tel que $AV = DT$ et
' W tel que $VA\Omega W$ parallélogramme.

(VW) coupe $[\Omega B]$ en J d'où le point I,
tel que $AVJI$ parallélogramme.

Le tracé de $[IJ]$ en vraie grandeur se reporte dans le dessin en perspective.

Représentation, en perspective cavalière, du cube "inscrit" dans la pyramide $\mathscr{P}$.

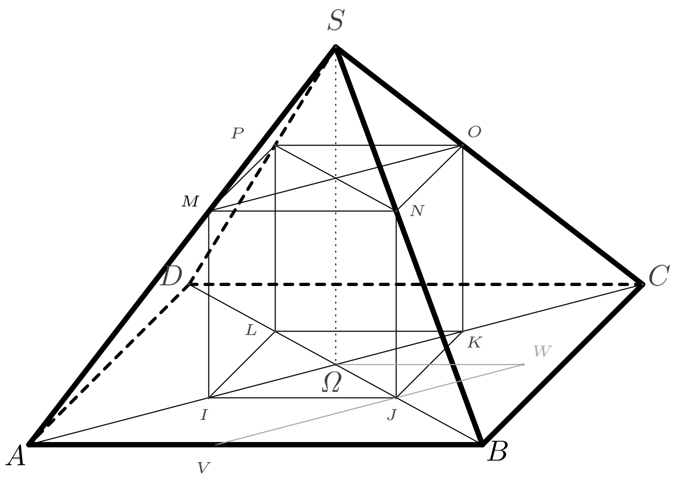


figure 5

Remarque : On aurait aussi pu mener les calculs avec l'inconnue k définie au paragraphe 2.
Le cube est alors obtenu lorsque le paramètre k vérifie : $(1-k)a = \frac{k\sqrt{2}}{2}a$ soit $k = 2 - \sqrt{2}$.

Le tracé de I sur $[A\Omega]$ tel que $\frac{AI}{A\Omega} = 2 - \sqrt{2}$ (ou encore $\frac{I\Omega}{IA} = \sqrt{2} - 1$) est possible.

Méthode 3: utilisation d'une section plane de la pyramide.

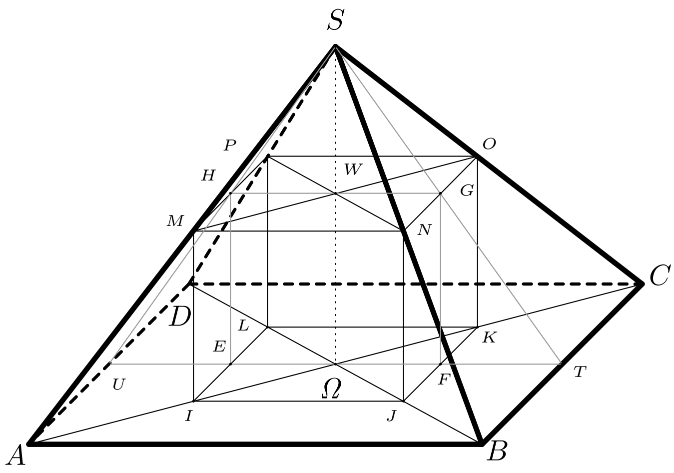
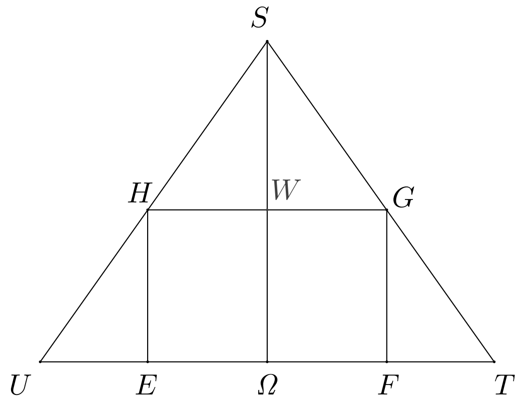


figure 3

Le pavé étant inscrit dans une pyramide, celui-ci est coupé par le plan médiateur (STU) de $[BC]$ suivant le rectangle $EFGH$.
Le pavé est un cube lorsque le rectangle $EFGH$ est un carré.

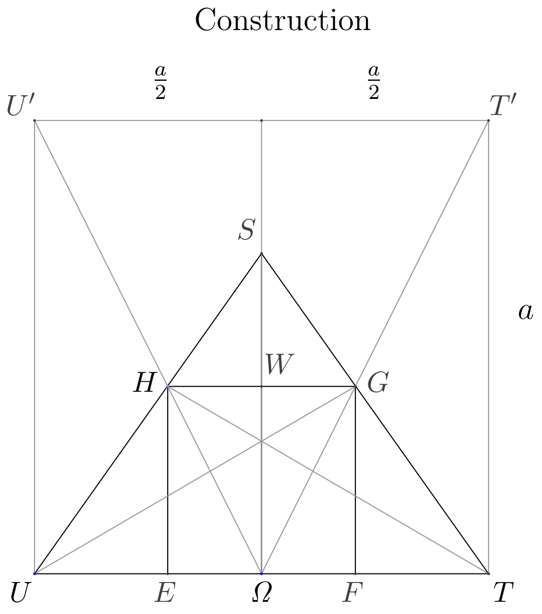
Figure plane extraite.



Le problème revient à inscrire un carré $EFGH$ dans le triangle UTS.

Soit W l'intersection de $[HG]$ avec $[S\Omega]$.
$HG = GF \Longleftrightarrow 2GW = GF$.

G est donc l'intersection de $[ST]$ et de la demi-droite d'origine Ω et de pente 2 dans le repère orthonormal d'origine Ω et d'unité a.



Soit UTS tel que $UT = a$, $ST = SU = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

En traçant le carré $UTT'U'$ de côté a, la droite $(\Omega T')$ coupe la droite (ST) au point G.
La détermination de ce point G permet de construire le carré $GHEF$.

La connaissance du point F sur le segment $[\Omega T]$ permet la construction du point I puisque $\frac{\Omega I}{\Omega A} = \frac{\Omega F}{\Omega T}$.

Cette construction est représentée ci-dessous.

Remarque:
Le carré $EFGH$ est l'image du carré $UTT'U'$ dans une homothétie de centre Ω, qui transforme T' en G.

Représentation de la construction de I en perspective cavalière.

Cette configuration ci-dessus est située dans un plan parallèle au plan frontal.

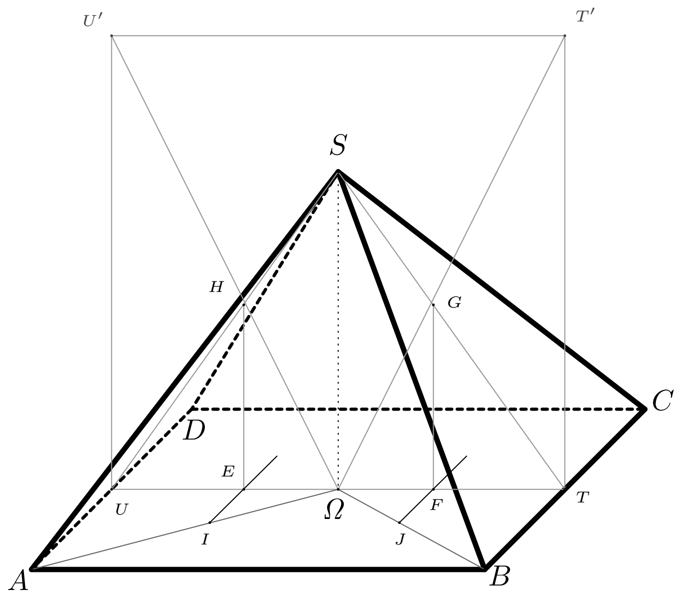


figure 6

Tracé du triangle STU puis du carré $UTT'U'$; (ΩT) coupe $[SU]$ en H. On en déduit E puis I. Connaissant I, le cube est alors facile à tracer.

Méthode 4: En utilisant un agrandissement ou une réduction.

Remarque:
La notion d'homothétie n'est pas au programme de mathématique de la classe de seconde mais celle d'agrandissement ou réduction figure dans les programmes de collège.

En utilisant un agrandissement.

La pyramide est celle donnée dans le premier paragraphe.

Soit M' un point de $[SA]$; le plan (Π), parallèle au plan $(ABCD)$ contenant M', coupe $[SB]$ en N', $[SC]$ en O' et $[SD]$ en P'.

En posant k tel que $SM' = k \times SA$, on a $SN' = k \times SB$, $SO' = k \times SC$ et $SP' = k \times SD$.

$ABCD$ étant un carré, on en déduit que $M'N'O'P'$ est un carré. Il est alors possible de construire le cube $M'N'O'P'I'J'K'L'$.
Les droites $(M'I')$ et $(S\Omega)$ sont parallèles et $M'I' = M'N'$.
Les points S, M', A, I' et Ω sont coplanaires.
(SI') coupe $(A\Omega)$ en I.

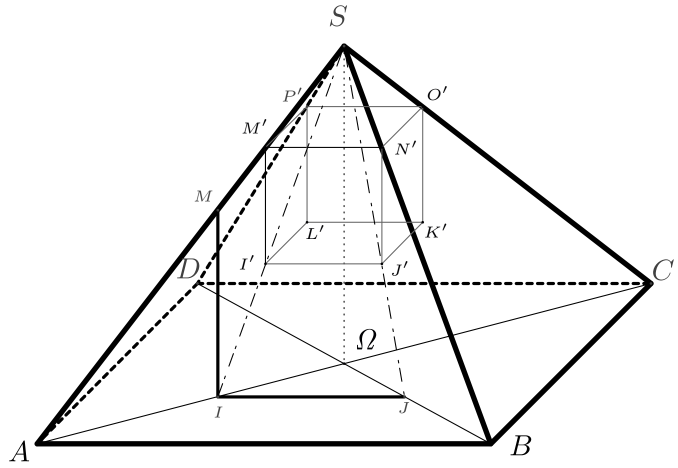


figure 7

En se plaçant dans des plans bien choisis, les propriétés peuvent être justifiées.

Autre position possible du cube $M'N'O'P'I'J'K'L'$.

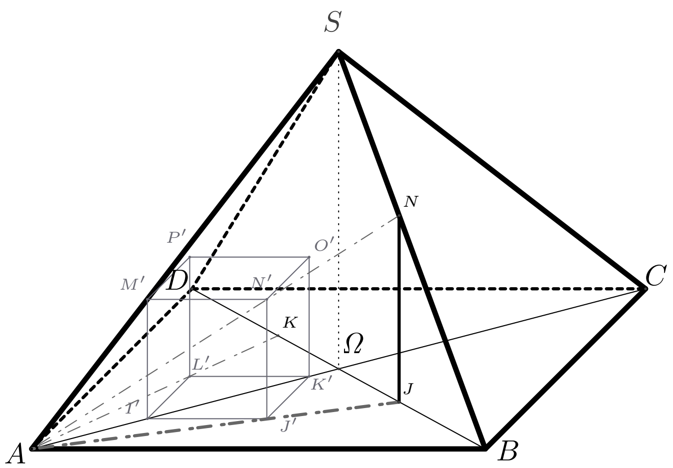


figure 8

En utilisant une réduction.

La pyramide $SABCD$ étant donnée, on trace un cube $ABCDA'B'C'D'$ extérieur.
(SA') coupe (ΩA) en I ; (SB') coupe (ΩB) en J ; (SC') coupe (ΩC) en K, (SD') coupe (ΩD) en L.
Connaissant $IJKL$, le tracé du cube peut-être terminé.

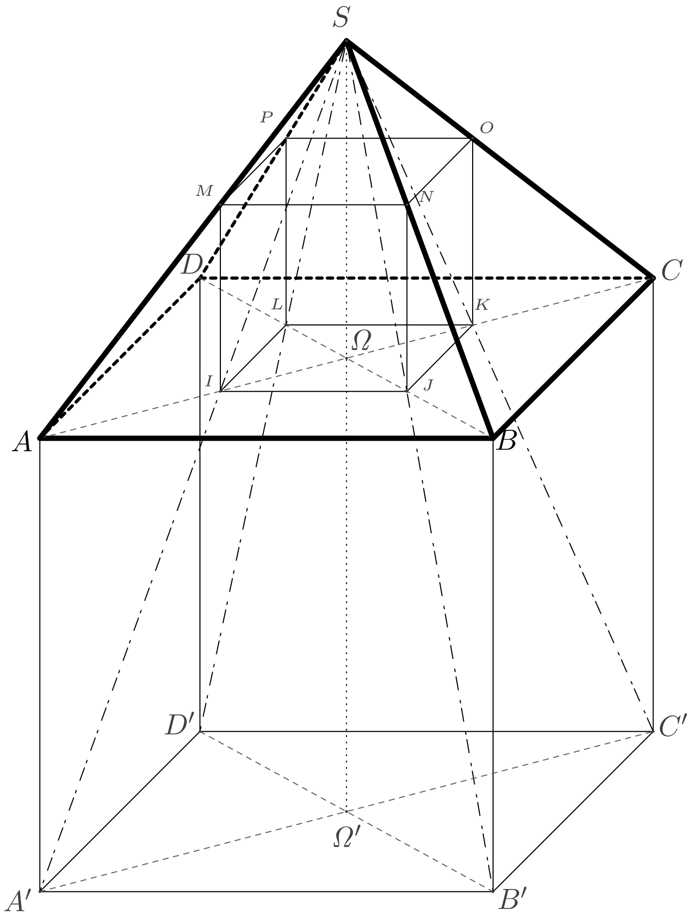


figure 9

En se plaçant dans des plans bien choisis, il est possible de justifier que l'on obtient un cube en utilisant des propriétés géométriques connues dans les classes de collège.