



Activité de la bouteille à billes Travail de l'aléatoire au collège en classe de troisième

Yves Ducel & Bruno Saussereau (IREM, Université de Franche-Comté)

Préambule

Voici une activité pour le collège :

- Il faut la considérer comme un guide de travail pour une réflexion de ce qu'on peut proposer sur le thème des probabilités et pour l'élaboration d'autres activités similaires conduites à partir de supports différents : lancer de pièce de monnaie, lancer de dé, roulette du jeu de Monaco, ...
- Les consignes doivent être adaptées en fonction de la place de l'activité dans la progression de l'enseignement des probabilités, des réponses des élèves et des connaissances des élèves.

I - Cadre de la situation

- Classe répartie en groupes de trois ou quatre élèves
- Une bouteille opaque contenant des billes par groupe d'élèves avec une ouverture qui laisse apparaître une seule bille à la fois quand on retourne la bouteille.
- On ne connaît pas a priori le nombre de billes, ni les couleurs des billes de la bouteille
- Les bouteilles sont a priori différentes quant au contenu : nombre de billes et couleur des billes
- On ne connaît pas les couleurs des billes de l'ensemble des bouteilles

II - Étude qualitative de la situation

Que peut-on dire de cette situation ?

- Peu d'informations sont connues au départ
- on voit à chaque retournement de la bouteille apparaître une bille
- on peut noter la couleur de la bille
- Il n'y a qu'une seule bille qui apparaît à chaque fois
- si on remue et si on renverse la bouteille, la couleur de la bille n'est pas nécessairement la même que la fois précédente
- quand on obtient plusieurs fois la même couleur, on ne sait pas si c'est la même bille qui apparaît
- la couleur de la bille dépend du hasard

À quoi reconnaît-on qu'une situation dépend du hasard ? Avez-vous des exemples de telles situations ?

Commentaire : Écrire le vocabulaire utilisé au tableau : le classer en qualitatif et quantitatif.

On parlera de situation aléatoire pour exprimer qu'une situation dépend du hasard

Que peut-on dire de la couleur des billes de la bouteille ?

- Si on retourne la bouteille plusieurs fois en la remuant à chaque fois, on voit apparaître différentes couleurs : Bleu, Vert, Noir ou Blanche (i.e. bille couleur dominante blanche avec filet de couleurs)
- Suivant les bouteilles, on ne voit pas apparaître toutes ces couleurs

Est-ce nécessaire de bien remuer la bouteille à chaque fois ?

- Si on ne remue pas la bouteille, il est possible de faire apparaître toujours la même bille et on ne peut pas voir les autres
- En remuant on a plus de chances de faire apparaître toutes les billes

Commentaire : Ici l'expérience aléatoire consiste à bien remuer la bouteille pour bien mélanger les billes, puis à retourner la bouteille pour faire apparaître une bille et à s'intéresser à la couleur de cette bille.

Établissons la liste des couleurs observées jusqu'à maintenant

- Bleu (*b*) ; Vert (*v*) ; Noir (*n*) ; Blanche (*a*)
- Liste des résultats (*issues*) possibles : *b, v, n, a*

Est-on certain d'avoir observé toutes les couleurs des billes de la bouteille ?

- Non, il se peut qu'il y ait une couleur qui n'apparaisse pas même si on remue bien et si on retourne beaucoup la bouteille

Quelle décision pour la liste des couleurs possibles ?

- Prendre cette liste pour le moment.
- Si on trouve une autre couleur on la rajoutera à la liste des issues possibles.

Quelles sont les couleurs qu'on pourrait qualifier de "foncées" ? de "claires" ?

- Foncées : Bleue, verte et noire
- Claires : blanche

Que signifie "Observer une bille foncée après avoir réalisé l'expérience" ? Est-ce que je peux connaître le résultat avant de réaliser l'expérience ?

- Après avoir réalisé l'expérience, le résultat est une bille noire ou une bille bleue ou une bille verte.
- Non, mais une fois l'expérience réalisée, je pourrai répondre.

Que signifie "Observer une bille claire après avoir réalisé l'expérience" ?

- Après avoir réalisé l'expérience, le résultat est une bille banche avec un filet de couleur.

Commentaire : On dira que "Observer une bille claire après avoir réalisé l'expérience" et "Observer une bille foncée après avoir réalisé l'expérience" sont des événements liés à l'expérience aléatoire qu'on étudie. Pour savoir si un événement est réalisé, je dois réaliser l'expérience. Je ne peux pas dire si l'énoncé est vrai tant que je n'ai pas réalisé l'expérience. Mais une fois l'expérience réalisée je peux toujours répondre par l'affirmative ou bien par la négative.

On notera les événements par des lettres majuscules :

- C : "Observer une bille Claire après avoir réalisé l'expérience"
- F : "Observer une bille Foncée après avoir réalisé l'expérience"

Est-ce que je peux observer à la fois les événements F et C en réalisant une expérience ?

Commentaires : Les événements F et C sont dits incompatibles. Ils sont aussi complémentaires. Des événements peuvent être incompatibles sans être complémentaires.

Si j'appelle B l'événement : "Observer une bille Bleue après avoir réalisé l'expérience" est-ce que je peux observer à la fois les événements F et B en réalisant l'expérience ? Quelles issues dois-je observer pour affirmer qu'ils sont tous les deux réalisés après avoir effectué l'expérience ?

Est-ce que je peux fabriquer d'autres événements ? Donner d'autres exemples ?

- N : "Observer une bille noire après avoir réalisé l'expérience"
- B : "Observer une bille bleue après avoir réalisé l'expérience"
- V : "Observer une bille verte après avoir réalisé l'expérience"
- A : "Observer une bille blanche après avoir réalisé l'expérience"

Est-ce que la phrase "Observer une bille rouge après avoir réalisé l'expérience" est un événement ? Si oui lequel ? Même question avec la phrase "Avoir beau temps toute la semaine prochaine"

Est-ce que l'événement D : "Ne pas observer une bille claire après avoir réalisé l'expérience" est un événement ? Si oui, est-ce qu'il désigne un événement déjà rencontré ? Même question pour l'événement C ?

- D désigne le même événement que F : "Observer une bille foncée après avoir réalisé l'expérience"
- C désigne le même événement que B : "Observer une bille blanche après avoir réalisé l'expérience"

Commentaire : D est dit événement contraire de A. Les événements D et F sont incompatibles. Les événements qui ne peuvent être réalisés que par une seule issue de l'expérience sont appelés événements élémentaires associés à l'expérience aléatoire : N, B, V, A, C sont des événements aléatoires, F n'est pas un événement élémentaire pour l'expérience.

Est-ce que l'événement G : "Observer une bille de couleur après avoir réalisé l'expérience" est un événement ? Quelles sont les issues qui le réalisent ?

- Cet événement est toujours réalisé
- Toutes les issues réalisent l'événement G

III - Étude quantitative de la situation

Est-ce que j'ai plus de chances de réaliser l'événement F que l'événement C lorsque j'effectue une expérience ?

Est-ce que j'ai plus de chances de réaliser l'événement N que l'événement F lorsque j'effectue une expérience ?

Comment "mesurer" le "nombre de chances" de réaliser un événement ?

Commentaire : Exploiter les réponses des élèves. Répéter l'expérience aléatoire un certain nombre de fois (40 essais) et compter le nombre de réalisations de l'événement étudié. Ramener au nombre d'essais : introduire la notion de fréquence d'un événement dans une répétition de l'expérience aléatoire.

Quelle est la fréquence des événements élémentaires de l'expérience de la bouteille ? A-t-on les mêmes résultats d'une bouteille à l'autre ? Remplir le tableau ci-dessous : tableau N°1)

Groupe	Fq. de A (autres)	Fq. de B (bleu)	Fq. de N (noir)	Fq. de V (vert)	Somme des col. A,B,N,V	Fq. de F	Somme des col. B,N,V	Fq. de D	Différenc e 1-col.A	Fq. de G
1	5/40	15/40	11/40	9/40	1	35/40		35/40	35/40	1
2					1					1
3					1					1
4					1					1
5					1					1
6					1					

Que remarque-t-on sur les fréquences des événements élémentaires ? Est-ce que tout le monde trouve pareil ? Comment expliquer les différences dans les résultats obtenus ?

- Les fréquences ne sont pas nécessairement les mêmes d'une bouteille à l'autre
- Cela dépend de la composition de la bouteille
- Même si la bouteille à même composition on peut ne pas trouver les mêmes fréquences car l'arrivée de la boule dépend du hasard
- La somme des fréquences est égale à 1 (c'est vrai pour tout le monde même si les bouteilles sont différentes)

Quelle fréquence trouve-t-on pour l'événement F ? Quelle relation avec les fréquences des événements élémentaires N, B, V ? Est-ce que tout le monde trouve pareil ? Comment expliquer les différences dans les résultats obtenus ?

- La fréquence de F n'est pas nécessairement les mêmes d'une bouteille à l'autre

- Cela dépend de la composition de la bouteille
- Même si la bouteille à même composition on peut ne pas trouver les mêmes fréquences car l'arrivée de la boule dépend du hasard
- La fréquence de F est la somme des fréquences de B, de N et de V (c'est vrai pour tout le monde même si les bouteilles sont différentes)
- La fréquence de F est toujours plus grande que la fréquence de B, de N ou de V

On recommence les 40 répétitions qui ont servi à calculer les fréquences (remplir le tableau des fréquences : tableau N°2), est-ce qu'on obtient les mêmes valeurs pour les fréquences que dans le cas précédent ? Comment expliquer ces divergences entre les résultats obtenus la première fois et ceux obtenus la seconde fois ?

- Les résultats (fréquence obtenue) dépendent du résultat de l'expérience aléatoire,
- Les autres remarques (somme des fréquences élémentaires, fréquence de F par rapport à celles de B, N, V, ...) sont encore vérifiées,

Alors que les bouteilles et les fréquences obtenues sont parfois différentes d'une bouteille à l'autre, comment expliquer que certains calculs (somme des fréquences élémentaires, fréquence de F par rapport à celles de B, N, V, ...) conduisent à une remarque identique pour tout le monde ?

- Certains résultats (fréquence obtenue) dépendent du résultat de l'expérience aléatoire,
- D'autres résultats (somme des fréquences élémentaires, fréquence de F par rapport à celles de B, N, V) sont des relations entre fréquences,

Commentaire : Mettre en place le vocabulaire probabilité d'un événement. La probabilité d'un événement "mesure" les chances de réalisation d'un événement. C'est un nombre entre 0 et 1 qui est choisi à partir de considérations sur les conditions de l'expérience aléatoire. Par exemple dans l'expérience de la bouteille en prenant comme valeur la fréquence de l'événement obtenue dans un grand nombre de répétitions de l'expérience. On la note $P(E)$ où E désigne l'événement étudié :

- La somme des probabilités de chaque événement élémentaire est égale à 1.
- La probabilité d'un événement est égale à la somme des événements élémentaires qui le composent.

Quelle valeur doit-on prendre pour la probabilité de l'événement certain ? Pour la probabilité de l'événement impossible ?

IV - Prolongement de l'activité

On ouvre la bouteille et on a connaissance du contenu. Quelle différence de démarche cela entraîne-t-il ?

Comment simuler cette activité avec un ordinateur : réflexion sur la simulation.

Consigne avec les élèves : Peut-on savoir quelle couleur de bille est la plus représentées ?