LES PROBABILITÉS
EN CLASSE DE TROISIÈME

Journées inter-académiques de mathématiques

Saumur, 10-11 décembre 2008

Yves Ducel (IREM, Université de Franche-Comté)

Avant-propos

Présentation

- Yves Ducel, enseignant-chercheur en mathématiques à l'Université de Franche-Comté.
- Enseignement des probabilités et de la statistique en licence et agrégation aux mathématiciens, chimistes, économistes, psychologues et pharmaciens.
- Animateur à l'IREM, ancien directeur de l'IREM.
- Rédacteur en chef de la revue nationale des IREM *Repères IREM*.

Activités IREM

- Groupe de travail *Statistique et Probabilités* (Y. Ducel, Ch. Grandjean, J.P. Grangé, F. Larnaudie, B. Saussereau, M. Vendrely, P. Walter).
- Conduite, avec le groupe de travail, de stages de probabilités/statistique dans le cadre du Plan académique de formation.
- Intervention (octobre 2008), avec Bruno Saussereau, dans les journées académiques sur les nouveaux programmes de collège organisées par G. Loridon et C. Geoffroy (IPR de maths, académie de Besancon).

Remarques préliminaires

- Réflexion évolutive, conduite avec B. Saussereau et plus généralement le groupe de travail de l'IREM, en concertation avec C. Geoffroy et G. Loridon.
- Susciter le débat et les interrogations.
- Proposer des orientations de travail pour la classe.
- Pas de prétention à l'exhaustivité, ni à l'exclusivité.
- Contribution, parmi d'autres, à la réflexion sur l'enseignement des probabilités en collège.

Pourquoi enseigner les probabilités ?

Pourquoi enseigner les probabilités ?

" Pour comprendre l'actualité, une formation à la statistique est aujourd'hui indispensable ; c'est une formation qui développe des capacités d'analyse et de synthèse et exerce le regard critique. Le langage élémentaire de la statistique (avec ses mots tels que moyenne, dispersion, estimation, fourchette de sondage, différence significative, corrections saisonnières, espérance de vie, risque, ...) est, dans tous les pays, nécessaire à la participation aux débats publics : il convient donc d'apprendre ce langage, ses règles, sa syntaxe, sa sémantique ; l'enseignement de la statistique étant, par nature, associé à celui des probabilités, il s'agit en fait d'une *formation à l'aléatoire*. "

Kahane J.P. (dir.), *Rapport au ministère de l'Éducation nationale : L'enseignement des sciences mathématiques*, 2002, page 52.

Plusieurs constats (1)

- La culture statistique est indispensable pour développer l'esprit critique du citoyen.
- La place de la statistique s'est largement étendue dans les programmes du lycée et du collège.
- La statistique descriptive n'est plus suffisante à la compréhension du discours statistique.
- Les notions de risque et de sondage sont désormais très présentes dans le discours médiatique.

Plusieurs constats (2)

- Des notions élémentaires de statistique inférentielle doivent désormais faire partie de la culture du citoyen.
- La statistique et les probabilités sont intimement liées dans les applications concrètes des théories sur l'aléatoire.
- À son tour, la place des probabilités s'accroît dans les programmes scolaires : d'abord au lycée, maintenant au collège (programmes 2008).
- La formation à l'aléatoire est déjà présente au niveau du collège dans de nombreux pays européens.

Quelle finalité pour un enseignement de probabilité ?

" L'objectif d'une initiation aux probabilités et à la statistique aux niveaux collège et lycée est d'enrichir le langage, de repérer des questions de nature statistique, de définir des concepts qui fonderont un mode de pensée pertinent, rassurant, remarquablement efficace. "

Kahane J.P. (dir.), *Rapport au ministère de l'Éducation nationale : L'enseignement des sciences mathématiques*, 2002, page 53.

" Fonder un mode de pensée pertinent, rassurant, remarquablement efficace. "

Démarche de modélisation : la mathématique nous aide à comprendre le monde et à agir sur lui.

Exemple du gestionnaire chargé de l'approvisionnement des stocks :

1. il commence par recueillir des données statistiques sur l'évolution de son stock,
2. à partir de ces données, il élabore un modèle probabiliste de cette évolution,
3. à partir de ce modèle, il fait des prévisions sur l'évolution future du stock.
4. Son modèle est bon si les prévisions sont corroborées par l'évolution réelle du stock.

" Fonder un mode de pensée pertinent, rassurant, remarquablement efficace. "

Démarche de modélisation : la mathématique nous aide à comprendre le monde et à agir sur lui.

Exemple du gestionnaire chargé de l'approvisionnement des stocks :

1. il commence par recueillir des données statistiques sur l'évolution de son stock,
2. à partir de ces données, il élabore un modèle probabiliste de cette évolution,
3. à partir de ce modèle, il fait des prévisions sur l'évolution future du stock.
4. Son modèle est bon si les prévisions sont corroborées par l'évolution réelle du stock.

" Fonder un mode de pensée pertinent, rassurant, remarquablement efficace. "

Démarche de modélisation : la mathématique nous aide à comprendre le monde et à agir sur lui.

Exemple du gestionnaire chargé de l'approvisionnement des stocks :

1. il commence par recueillir des données statistiques sur l'évolution de son stock,
2. à partir de ces données, il élabore un modèle probabiliste de cette évolution,
3. à partir de ce modèle, il fait des prévisions sur l'évolution future du stock.
4. Son modèle est bon si les prévisions sont corroborées par l'évolution réelle du stock.

" Fonder un mode de pensée pertinent, rassurant, remarquablement efficace. "

Démarche de modélisation : la mathématique nous aide à comprendre le monde et à agir sur lui.

Exemple du gestionnaire chargé de l'approvisionnement des stocks :

1. il commence par recueillir des données statistiques sur l'évolution de son stock,
2. à partir de ces données, il élabore un modèle probabiliste de cette évolution,
3. à partir de ce modèle, il fait des prévisions sur l'évolution future du stock.
4. Son modèle est bon si les prévisions sont corroborées par l'évolution réelle du stock.

" Fonder un mode de pensée pertinent, rassurant, remarquablement efficace. "

Démarche de modélisation : la mathématique nous aide à comprendre le monde et à agir sur lui.

Exemple du gestionnaire chargé de l'approvisionnement des stocks :

1. il commence par recueillir des données statistiques sur l'évolution de son stock,
2. à partir de ces données, il élabore un modèle probabiliste de cette évolution,
3. à partir de ce modèle, il fait des prévisions sur l'évolution future du stock.
4. Son modèle est bon si les prévisions sont corroborées par l'évolution réelle du stock.

" Fonder un mode de pensée pertinent, rassurant, remarquablement efficace. "

Démarche de modélisation : la mathématique nous aide à comprendre le monde et à agir sur lui.

Exemple du gestionnaire chargé de l'approvisionnement des stocks :

1. il commence par recueillir des données statistiques sur l'évolution de son stock,
2. à partir de ces données, il élabore un modèle probabiliste de cette évolution,
3. à partir de ce modèle, il fait des prévisions sur l'évolution future du stock.
4. Son modèle est bon si les prévisions sont corroborées par l'évolution réelle du stock.

Le contexte en collège

Le contexte

- Les nouveaux programmes
- Le contexte culturel
- Le contexte pédagogique

Les nouveaux programmes (mai 2008)

Connaissances : 1.4. Notion de probabilité (Programmes du collège, mai 2008)

Capacités

- Comprendre et utiliser des notions élémentaires de probabilité.
- Calculer des probabilités dans des contextes familiers.

Les nouveaux programmes (mai 2008)

Connaissances : 1.4. Notion de probabilité (Programmes du collège, mai 2008)

Commentaires

- La notion de probabilité est abordée à partir d'expérimentations qui permettent d'observer les fréquences des issues dans des situations familières (pièces de monnaie, dés, roues de loterie, urnes, etc ...).
- La notion de probabilité est utilisée pour modéliser des situations simples de la vie courante. Les situations étudiées concernent les expériences aléatoires à une ou *à deux épreuves*.

Le contexte culturel

- Dans la vie de tous les jours, les élèves sont régulièrement confrontés à des situations relevant du hasard (jeux, loterie, ...)
- Le vocabulaire concernant le hasard est très fréquent dans le langage de tous les jours
- Des stratégies sont quelquefois mises en place pour "conjurer le sort" et tenter de maîtriser le hasard
- Il existe des représentations ou des attitudes, plus ou moins conscientes, face au rôle du hasard. Celles-ci sont influencées notamment par le milieu socio-culturel de l'élève (religion, culture d'origine, ...)

Le contexte pédagogique

- L'enseignement des probabilités est nouveau pour l'élève
- Les élèves sont déjà familiarisés avec la démarche statistique
- La démarche et les raisonnements utilisés en probabilité diffèrent des autres branches des mathématiques : géométrie, calculs, ...
- Le rapport au réel est beaucoup plus présent que dans les autres branches des mathématiques (démarche de modélisation)
- La validation des affirmations n'est pas de même nature que dans les autres branches des mathématiques

Les objectifs en collège

Les objectifs en collège

Trois grands objectifs à l'enseignement des probabilités en collège :

- Développer une réflexion générale sur l'aléatoire (à nombre fini d'issues).
- S'interroger sur la mathématisation du hasard et sur sa finalité.
- Introduire et faire fonctionner quelques concepts probabilistes.

Les objectifs en collège

Trois grands objectifs à l'enseignement des probabilités en collège :

- Développer une réflexion générale sur l'aléatoire (à nombre fini d'issues).
- S'interroger sur la mathématisation du hasard et sur sa finalité.
- Introduire et faire fonctionner quelques concepts probabilistes.

Les objectifs en collège

Trois grands objectifs à l'enseignement des probabilités en collège :

- Développer une réflexion générale sur l'aléatoire (à nombre fini d'issues).
- S'interroger sur la mathématisation du hasard et sur sa finalité.
- Introduire et faire fonctionner quelques concepts probabilistes.

Les objectifs en collège

Trois grands objectifs à l'enseignement des probabilités en collège :

- Développer une réflexion générale sur l'aléatoire (à nombre fini d'issues).
- S'interroger sur la mathématisation du hasard et sur sa finalité.
- Introduire et faire fonctionner quelques concepts probabilistes.

Développer une réflexion générale sur l'aléatoire (1)

Rappeler et structurer le vocabulaire utilisé dans la vie courante, le transposer en un vocabulaire mathématique :

- Quel vocabulaire (expression, type de phrase) j'utilise lorsque je parle d'une situation aléatoire ?
- Quelle en est la signification ? Quel est son registre linguistique ?
- Relève-t-il du domaine quantitatif, qualitatif, mathématique, langage courant, ... ?
- Quel classement puis-je faire sur ce vocabulaire ?

Développer une réflexion générale sur l'aléatoire (2)

Faire émerger les représentations existantes, amener les élèves à les confronter, à les expliciter et, le cas échéant, les faire évoluer :

- Quelles sont les situations que je connais où intervient le hasard ?
- Qu'est-ce qui distingue une situation où intervient le hasard d'une situation où il n'intervient pas ?
- Qu'est-ce qui me permet d'affirmer qu'une situation dépend du hasard ? Qu'est-ce que le hasard ?
- Comment est généré le hasard dans les situations que je connais ? dans celle qui m'intéresse ?
- Est-ce que je peux trouver des ressemblances, des analogies, entre des situations aléatoires a priori différentes ?

S'interroger sur la mathématisation du hasard et sa finalité

Développer et mettre en oeuvre une démarche de modélisation et de validation à partir de l'analyse de situations réelles :

- Dans quelles conditions les nombres et le calcul interviennent dans l'étude d'une situation aléatoire ?
- Quelle est la finalité du calcul des probabilités ? Dans quelles circonstances l'utilise-t-on ?
- Quel sens donner à la phrase "J'ai deux chances sur trois d'observer A" ?
- Quelle démarche suis-je amené à mettre en oeuvre pour avoir des informations sur la situation qui m'intéresse ?
- Est-ce que je peux énoncer des règles simples sur les nombres qui interviennent dans une situation aléatoire ?
- Comment puis-je valider, ou vérifier, mes affirmations ?

Introduire et faire fonctionner quelques concepts

- Mettre en place les concepts d'expérience aléatoire, d'événement, de probabilité. Leur donner du sens.
- Introduire et faire fonctionner le vocabulaire standard des probabilités, le comparer à celui du langage courant.
- Établir et faire fonctionner des règles simples de calcul sur les probabilités.
- Élaborer des techniques de validation des affirmations.

Une activité pédagogique

Remarques préliminaires

- L'activité présentée s'adresse à des enseignants en formation mais est conduite, par moments, comme avec des élèves.
- Elle sert à illustrer le propos et à susciter les questions.
- Les consignes peuvent être adaptées pour les élèves pour tenir compte de la progression pédagogique, des connaissances des élèves et des réactions des élèves.
- Il faut la considérer comme un guide de travail pour l'élaboration d'activités similaires : lancer de pièce de monnaie, lancer de dé, roulette de jeu, ...

La situation et les réactions des stagiaires

Le cadre de l'activité

- Activité de la bouteille conduite avec des stagiaires dans les journées académiques : les stagiaires sont répartis en groupes de trois ou quatre.
- Chaque groupe possède une bouteille opaque, contenant des billes, une ouverture laisse apparaître une seule bille à la fois quand on retourne la bouteille.
- On ne connaît pas a priori le nombre de billes, ni les couleurs des billes de la bouteille, et les contenus des bouteilles peuvent être différents (nombre et couleur des billes)
- Les couleurs des billes de l'ensemble des bouteilles ne sont pas connues.

Pourquoi ce choix ?

- Peu d'informations sur la situation elle-même.
- Pas de raisonnement de type "équiprobabilité" possible.
- Les issues ne sont pas a priori connues ce qui nécessite de faire des choix dans la modélisation de la situation.
- Activité plutôt déstabilisatrice qui incite à une réflexion sur ce qu'apporte le calcul des probabilités et ses conditions de mise en oeuvre.

Consigne pour les stagiaires

- Quels objectifs voyez-vous à l'enseignement des probabilités au collège ?
- Imaginez une activité permettant d'introduire l'enseignement de probabilité en classe de troisième.
- Précisez quels objectifs vous viseriez à travers cette activité.
- Notez le vocabulaire naturellement utilisé dans vos échanges et ayant trait, selon vous, au registre linguistique de l'aléatoire.

Les réactions des stagiaires (1)

- Difficulté de cerner un objectif spécifique au collège.
- " Ce ne sont pas des probabilités car on ne connaît pas le contenu. "
- " On ne peut rien faire car on ne sait pas s'il y a équiprobabilité. "
- Reproduction des pratiques de l'enseignement au lycée.
- Directement calcul des fréquences, pas d'analyse préliminaire.

Les réactions des stagiaires (2)

- " Ce ne sont pas des probabilités, mais des statistiques. "
- Beaucoup d'interrogations et d'échanges sur la finalité des probabilités.
- Apparition d'une couleur inattendue au cours des essais.
- Vocabulaire utilisé très riche, vocabulaire noté très maigre.
- Le registre linguistique de l'aléatoire n'est pas clairement identifié.

Poursuite de l'activité

Les réactions des stagiaires ont été l'occasion :

- de rappeler l'utilisation concrète des probabilités en médecine, économie, gestion , dans l'industrie, ...
- de réaliser qu'il faut bien définir le cadre de la situation aléatoire.
- de comprendre le rôle important joué naturellement par le langage courant dans les échanges.
- de préciser les objectifs à assigner à cet enseignement au collège.
- de comparer ces objectifs à ceux du lycée pour mettre en évidence leur spécificité par rapport à ceux du lycée.

Les étapes d'un travail sur l'aléatoire

Les étapes d'un travail sur l'aléatoire

Quatre étapes à baliser :

1. Préciser de quoi on parle (**l'expérience aléatoire**).
2. Préciser sur quoi on travaille (**la famille des événements**).
3. Préciser avec quoi on travaille (**le choix de la probabilité**).
4. Mettre en oeuvre les raisonnements et les calculs nécessaires au travail demandé (**le calcul des probabilités**).

Les étapes d'un travail sur l'aléatoire

Quatre étapes à baliser :

1. Préciser de quoi on parle (**l'expérience aléatoire**).
2. Préciser sur quoi on travaille (**la famille des événements**).
3. Préciser avec quoi on travaille (**le choix de la probabilité**).
4. Mettre en oeuvre les raisonnements et les calculs nécessaires au travail demandé (**le calcul des probabilités**).

Les étapes d'un travail sur l'aléatoire

Quatre étapes à baliser :

1. Préciser de quoi on parle (**l'expérience aléatoire**).
2. Préciser sur quoi on travaille (**la famille des événements**).
3. Préciser avec quoi on travaille (**le choix de la probabilité**).
4. Mettre en oeuvre les raisonnements et les calculs nécessaires au travail demandé (**le calcul des probabilités**).

Les étapes d'un travail sur l'aléatoire

Quatre étapes à baliser :

1. Préciser de quoi on parle (**l'expérience aléatoire**).
2. Préciser sur quoi on travaille (**la famille des événements**).
3. Préciser avec quoi on travaille (**le choix de la probabilité**).
4. Mettre en oeuvre les raisonnements et les calculs nécessaires au travail demandé (**le calcul des probabilités**).

L'expérience aléatoire

L'expérience aléatoire

- Que peut-on dire de cette situation ? À quoi reconnaît-on qu'une situation dépend du hasard ? Avez-vous des exemples de telles situations ?
- Que peut-on dire de la couleur des billes de la bouteille ? Est-ce nécessaire de bien remuer la bouteille à chaque fois ? Observe-t-on plusieurs billes ?
- Établissons la liste des couleurs observées jusqu'à maintenant : Est-on certain d'avoir observé toutes les couleurs des billes de la bouteille ? Quelle décision pour la liste des couleurs possibles ?
- *Ici introduction de l'expression "expérience aléatoire" et rédaction de son protocole.*

L'expérience aléatoire de la bouteille

- **Protocole** : On remue bien la bouteille opaque. On la retourne une seule fois et on s'intéresse à la couleur de la bille qui apparaît au goulot.
- **Liste des issues retenues** : Noir / Bleu / Vert / Autres couleurs.
- **Notations utilisées pour les issues** : n, b, v, a.

L'expérience aléatoire de la bouteille

- **Protocole** : On remue bien la bouteille opaque. On la retourne une seule fois et on s'intéresse à la couleur de la bille qui apparaît au goulot.
- **Liste des issues retenues** : Noir / Bleu / Vert / Autres couleurs.
- **Notations utilisées pour les issues** : n, b, v, a.

L'expérience aléatoire de la bouteille

- **Protocole** : On remue bien la bouteille opaque. On la retourne une seule fois et on s'intéresse à la couleur de la bille qui apparaît au goulot.
- **Liste des issues retenues** : Noir / Bleu / Vert / Autres couleurs.
- **Notations utilisées pour les issues** : n, b, v, a.

L'expérience aléatoire : comment la caractériser ?

- Une **expérience aléatoire** est une expérience qui, bien qu'on la répète dans les mêmes conditions, ne donne pas nécessairement le même résultat.
- Les résultats qu'on peut observer en réalisant une expérience aléatoire sont appelées les **issues** de l'expérience aléatoire.
- On doit pouvoir établir une liste de toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire.

L'expérience aléatoire : comment la caractériser ?

- Une **expérience aléatoire** est une expérience qui, bien qu'on la répète dans les mêmes conditions, ne donne pas nécessairement le même résultat.
- Les résultats qu'on peut observer en réalisant une expérience aléatoire sont appelées les **issues** de l'expérience aléatoire.
- On doit pouvoir établir une liste de toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire.

L'expérience aléatoire : comment la caractériser ?

- Une **expérience aléatoire** est une expérience qui, bien qu'on la répète dans les mêmes conditions, ne donne pas nécessairement le même résultat.
- Les résultats qu'on peut observer en réalisant une expérience aléatoire sont appelées les **issues** de l'expérience aléatoire.
- On doit pouvoir établir une liste de toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire.

Objectif de cette étape

Cette étape doit permettre à l'élève :

- de se familiariser avec la situation réelle aléatoire étudiée,
- d'énoncer précisément les conditions de l'expérience aléatoire,
- d'identifier toutes les issues de l'expérience et de convenir d'une manière de les noter.

Cette étape doit se conclure par la rédaction d'un court texte (le protocole) décrivant les conditions de l'expérience aléatoire, la liste de toutes les issues possibles et les notations adoptées.

La famille des événements

Travail sur les événements (1)

- Quelles sont les couleurs qu'on pourrait qualifier de "foncées" ? de "claires" ? Que signifie *Observer une bille foncée* ? Est-ce que je peux connaître le résultat avant de réaliser l'expérience ?
- Que signifie *Observer une bille claire (après avoir réalisé l'expérience)* ?
- *Ici introduction du vocabulaire "événement" et des notations :* A, B, N, V, F, C, ...
- Est-ce que je peux observer à la fois les événements F et C en réalisant l'expérience ?

Travail sur les événements (2)

- Si je note B l'événement défini par *Observer une bille Bleue (après avoir réalisé l'expérience)*, est-ce que je peux observer les événements F et B en réalisant l'expérience ?
- Quelles issues dois-je observer pour affirmer qu'ils sont tous les deux réalisés après avoir effectué l'expérience ?
- Est-ce que *Ne pas observer une bille claire* définit un événement ? Si oui, est-ce un événement déjà rencontré ? On le notera $\overline{C}$.

Travail sur les événements (3)

- Est-ce que la phrase *Observer une bille rouge* définit un événement ? Quelles sont les issues qui le réalisent ?
- Mêmes questions avec la phrase *Avoir beau temps toute la semaine prochaine*.
- Est-ce que la phrase *Observer une bille de n'importe quelle couleur* définit un événement ? Quelles sont les issues qui le réalisent ?
- Est-ce que je peux définir d'autres événements ? Donner des exemples ?

Objectif de cette étape (1)

Cette étape a pour objectif d'approfondir la compréhension de l'expérience aléatoire et sa description, en s'intéressant aux événements attachés à cette expérience. Elle doit notamment permettre à l'élève :

- d'imaginer des événements en relation avec l'expérience aléatoire telle qu'elle a été décrite,
- de repérer et expliciter les événements qui font partie des données connues de l'exercice, d'identifier les issues qui réalisent ces événements en référence à la liste établie dans l'étape précédente,

Objectif de cette étape (2)

- de repérer et expliciter les événements qui sont sous-jacents aux questions posées.
- de mettre en évidence des relations entre ces événements, notamment les événements élémentaires, incompatibles, contraires.
- de convenir d'une notation pour les événements qui seront utilisés.

Les événements : comment les définir ? (1)

- Un **événement** est défini par un énoncé (une phrase) concernant les issues de l'expérience aléatoire dont on peut dire, seulement après avoir réalisé l'expérience, s'il est vrai ou s'il est faux.
- Un événement se décrit mathématiquement par la liste des issues qui rendent l'énoncé vrai. Ces issues sont dites **favorables** à l'événement.
- Un événement dont l'énoncé n'est vrai que pour une seule issue de l'expérience est appelé un événement **élémentaire**.

Les événements : comment les définir ? (1)

- Un **événement** est défini par un énoncé (une phrase) concernant les issues de l'expérience aléatoire dont on peut dire, seulement après avoir réalisé l'expérience, s'il est vrai ou s'il est faux.
- Un événement se décrit mathématiquement par la liste des issues qui rendent l'énoncé vrai. Ces issues sont dites **favorables** à l'événement.
- Un événement dont l'énoncé n'est vrai que pour une seule issue de l'expérience est appelé un événement **élémentaire**.

Les événements : comment les définir ? (1)

- Un **événement** est défini par un énoncé (une phrase) concernant les issues de l'expérience aléatoire dont on peut dire, seulement après avoir réalisé l'expérience, s'il est vrai ou s'il est faux.
- Un événement se décrit mathématiquement par la liste des issues qui rendent l'énoncé vrai. Ces issues sont dites **favorables** à l'événement.
- Un événement dont l'énoncé n'est vrai que pour une seule issue de l'expérience est appelé un événement **élémentaire**.

Les événements : comment les définir ? (2)

- Un événement qui est réalisé quelle que soit l'issue de l'expérience aléatoire est dit **certain**.
- Un événement qui n'est jamais réalisé quelle que soit l'issue de l'expérience aléatoire est dit **impossible**.
- Deux événements pour lesquels on ne peut pas trouver une même issue de l'expérience aléatoire qui les réalise sont dits **incompatibles**.

Les événements : comment les définir ? (2)

- Un événement qui est réalisé quelle que soit l'issue de l'expérience aléatoire est dit **certain**.
- Un événement qui n'est jamais réalisé quelle que soit l'issue de l'expérience aléatoire est dit **impossible**.
- Deux événements pour lesquels on ne peut pas trouver une même issue de l'expérience aléatoire qui les réalise sont dits **incompatibles**.

Les événements : comment les définir ? (2)

- Un événement qui est réalisé quelle que soit l'issue de l'expérience aléatoire est dit **certain**.
- Un événement qui n'est jamais réalisé quelle que soit l'issue de l'expérience aléatoire est dit **impossible**.
- Deux événements pour lesquels on ne peut pas trouver une même issue de l'expérience aléatoire qui les réalise sont dits **incompatibles**.

La probabilité et le calcul des probabilités

Étude statistique de la situation (1)

- Est-ce que j'ai plus de chances de réaliser l'événement F que l'événement C lorsque j'effectue l'expérience ? Est-ce que j'ai plus de chances de réaliser l'événement N que l'événement F ?
- Comment "mesurer le nombre de chances" de réaliser un événement ?
- On effectue 40 fois l'expérience, quelles sont les fréquences des événements élémentaires ? A-t-on les mêmes résultats d'une bouteille à l'autre ? Que remarque-t-on sur les fréquences des événements élémentaires ? Comment expliquer les différences dans les résultats obtenus ? (Voir tableau des fréquences fichier PDF)

Étude statistique de la situation (1)

- Est-ce que j'ai plus de chances de réaliser l'événement F que l'événement C lorsque j'effectue l'expérience ? Est-ce que j'ai plus de chances de réaliser l'événement N que l'événement F ?
- Comment "mesurer le nombre de chances" de réaliser un événement ?
- On effectue 40 fois l'expérience, quelles sont les fréquences des événements élémentaires ? A-t-on les mêmes résultats d'une bouteille à l'autre ? Que remarque-t-on sur les fréquences des événements élémentaires ? Comment expliquer les différences dans les résultats obtenus ? (Voir tableau des fréquences fichier PDF)

Étude statistique de la situation (1)

- Est-ce que j'ai plus de chances de réaliser l'événement F que l'événement C lorsque j'effectue l'expérience ? Est-ce que j'ai plus de chances de réaliser l'événement N que l'événement F ?
- Comment "mesurer le nombre de chances" de réaliser un événement ?
- On effectue 40 fois l'expérience, quelles sont les fréquences des événements élémentaires ? A-t-on les mêmes résultats d'une bouteille à l'autre ? Que remarque-t-on sur les fréquences des événements élémentaires ? Comment expliquer les différences dans les résultats obtenus ? (Voir tableau des fréquences fichier PDF)

Étude statistique de la situation (2)

- Quelle fréquence trouve-t-on pour l'événement F ? Peut-on l'exprimer avec les fréquences des événements élémentaires N, B, V ? Que constate-t-on ? Est-ce que tout le monde fait le même constat ?
- On recommence les 40 essais qui ont servi à calculer les fréquences. Est-ce qu'on obtient les mêmes valeurs pour les fréquences que dans le cas précédent ? Comment expliquer les divergences constatées ?

Étude statistique de la situation (2)

- Quelle fréquence trouve-t-on pour l'événement F ? Peut-on l'exprimer avec les fréquences des événements élémentaires N, B, V ? Que constate-t-on ? Est-ce que tout le monde fait le même constat ?
- On recommence les 40 essais qui ont servi à calculer les fréquences. Est-ce qu'on obtient les mêmes valeurs pour les fréquences que dans le cas précédent ? Comment expliquer les divergences constatées ?

Le choix de la probabilité

- Alors que les bouteilles et les fréquences obtenues sont parfois différentes d'une bouteille à l'autre, comment expliquer que certains calculs (somme des fréquences élémentaires, fréquence de F par rapport à celles de B, N, V) conduisent à une remarque identique pour tout le monde ?
- *Ici introduction de l'expression "probabilité d'un événement E" et de sa notation $P(E)$. Mise en place de règles sur les probabilités.*
- Quelle valeur prendre pour la probabilité d'un événement élémentaire ?
- Quelle valeur doit-on prendre pour la probabilité de l'événement certain ? Pour la probabilité de l'événement impossible ?

Le choix de la probabilité

- Alors que les bouteilles et les fréquences obtenues sont parfois différentes d'une bouteille à l'autre, comment expliquer que certains calculs (somme des fréquences élémentaires, fréquence de F par rapport à celles de B, N, V) conduisent à une remarque identique pour tout le monde ?
- *Ici introduction de l'expression "probabilité d'un événement E" et de sa notation $P(E)$. Mise en place de règles sur les probabilités.*
- Quelle valeur prendre pour la probabilité d'un événement élémentaire ?
- Quelle valeur doit-on prendre pour la probabilité de l'événement certain ? Pour la probabilité de l'événement impossible ?

Le choix de la probabilité

- Alors que les bouteilles et les fréquences obtenues sont parfois différentes d'une bouteille à l'autre, comment expliquer que certains calculs (somme des fréquences élémentaires, fréquence de F par rapport à celles de B, N, V) conduisent à une remarque identique pour tout le monde ?
- *Ici introduction de l'expression "probabilité d'un événement E" et de sa notation $P(E)$. Mise en place de règles sur les probabilités.*
- Quelle valeur prendre pour la probabilité d'un événement élémentaire ?
- Quelle valeur doit-on prendre pour la probabilité de l'événement certain ? Pour la probabilité de l'événement impossible ?

Le choix de la probabilité

- Alors que les bouteilles et les fréquences obtenues sont parfois différentes d'une bouteille à l'autre, comment expliquer que certains calculs (somme des fréquences élémentaires, fréquence de F par rapport à celles de B, N, V) conduisent à une remarque identique pour tout le monde ?
- *Ici introduction de l'expression "probabilité d'un événement E" et de sa notation $P(E)$. Mise en place de règles sur les probabilités.*
- Quelle valeur prendre pour la probabilité d'un événement élémentaire ?
- Quelle valeur doit-on prendre pour la probabilité de l'événement certain ? Pour la probabilité de l'événement impossible ?

Objectif de ces deux étapes

- **Le choix de la probabilité** : À partir des données explicites de l'exercice, ou de considérations sur les conditions de l'expérience aléatoire, cette étape doit permettre à l'élève, en explicitant les raisons de son choix, d'affecter une probabilité aux événements énoncés précédemment.
- **Le calcul des probabilités** : Cette étape permet à l'élève de calculer les probabilités d'autres événements, à partir des probabilités introduites auparavant et des règles élémentaires de calcul sur les probabilités.

Objectif de ces deux étapes

- **Le choix de la probabilité** : À partir des données explicites de l'exercice, ou de considérations sur les conditions de l'expérience aléatoire, cette étape doit permettre à l'élève, en explicitant les raisons de son choix, d'affecter une probabilité aux événements énoncés précédemment.
- **Le calcul des probabilités** : Cette étape permet à l'élève de calculer les probabilités d'autres événements, à partir des probabilités introduites auparavant et des règles élémentaires de calcul sur les probabilités.

Les probabilités : définitions et propriétés

- La **probabilité d'un événement** E est un nombre associé à l'événement E et compris entre 0 et 1.
- Ce nombre est choisi à partir de considérations sur l'expérience aléatoire et sur l'événement E, de telle sorte que les règles suivantes soient vérifiées :
  1. La somme des probabilités de tous les événements élémentaires est égale à 1.
  2. La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

Les probabilités : définitions et propriétés

- La **probabilité d'un événement** E est un nombre associé à l'événement E et compris entre 0 et 1.
- Ce nombre est choisi à partir de considérations sur l'expérience aléatoire et sur l'événement E, de telle sorte que les règles suivantes soient vérifiées :
  1. La somme des probabilités de tous les événements élémentaires est égale à 1.
  2. La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

Les probabilités : définitions et propriétés

- La **probabilité d'un événement** E est un nombre associé à l'événement E et compris entre 0 et 1.
- Ce nombre est choisi à partir de considérations sur l'expérience aléatoire et sur l'événement E, de telle sorte que les règles suivantes soient vérifiées :
  1. La somme des probabilités de tous les événements élémentaires est égale à 1.
  2. La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

Les probabilités : définitions et propriétés

- La **probabilité d'un événement** E est un nombre associé à l'événement E et compris entre 0 et 1.
- Ce nombre est choisi à partir de considérations sur l'expérience aléatoire et sur l'événement E, de telle sorte que les règles suivantes soient vérifiées :
  1. La somme des probabilités de tous les événements élémentaires est égale à 1.
  2. La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

Comment choisir la probabilité du modèle ?

- **Principe statistique** : On affecte comme valeur à la probabilité d'un événement A la fréquence de réalisation de l'événement A dans un grand nombre de répétitions de l'expérience aléatoire.
- **Principe de Laplace ou de raison insuffisante** : Si, dans une expérience aléatoire à nombre fini n d'issues, je n'ai pas de raison de penser qu'une issue est privilégiée par rapport à une autre, j'affecte la même valeur p à la probabilité de chaque événement élémentaire. Dans ce cas, nécessairement $p = \dfrac{1}{n}$.
- **Autres ...** : Données de l'exercice, ...

Comment choisir la probabilité du modèle ?

- **Principe statistique** : On affecte comme valeur à la probabilité d'un événement A la fréquence de réalisation de l'événement A dans un grand nombre de répétitions de l'expérience aléatoire.
- **Principe de Laplace ou de raison insuffisante** : Si, dans une expérience aléatoire à nombre fini n d'issues, je n'ai pas de raison de penser qu'une issue est privilégiée par rapport à une autre, j'affecte la même valeur p à la probabilité de chaque événement élémentaire. Dans ce cas, nécessairement $p = \frac{1}{n}$.
- **Autres ...** : Données de l'exercice, ...

Comment choisir la probabilité du modèle ?

- **Principe statistique** : On affecte comme valeur à la probabilité d'un événement A la fréquence de réalisation de l'événement A dans un grand nombre de répétitions de l'expérience aléatoire.
- **Principe de Laplace ou de raison insuffisante** : Si, dans une expérience aléatoire à nombre fini n d'issues, je n'ai pas de raison de penser qu'une issue est privilégiée par rapport à une autre, j'affecte la même valeur p à la probabilité de chaque événement élémentaire. Dans ce cas, nécessairement $p = \dfrac{1}{n}$.
- **Autres ...** : Données de l'exercice, ...

Remarques sur la modélisation (1)

- Qu'est-ce qui change si la bouteille donnée est transparente au lieu d'être opaque ?
- Comment simuler cette expérience sur ordinateur ?
- Le protocole de l'expérience aléatoire et la famille des événements ne font pas intervenir le hasard.
- La famille des événements est plus ou moins riche suivant l'expérience aléatoire (pile ou face / lancer de deux dés).

Remarques sur la modélisation (1)

- Qu'est-ce qui change si la bouteille donnée est transparente au lieu d'être opaque ?
- Comment simuler cette expérience sur ordinateur ?
- Le protocole de l'expérience aléatoire et la famille des événements ne font pas intervenir le hasard.
- La famille des événements est plus ou moins riche suivant l'expérience aléatoire (pile ou face / lancer de deux dés).

Remarques sur la modélisation (1)

- Qu'est-ce qui change si la bouteille donnée est transparente au lieu d'être opaque ?
- Comment simuler cette expérience sur ordinateur ?
- Le protocole de l'expérience aléatoire et la famille des événements ne font pas intervenir le hasard.
- La famille des événements est plus ou moins riche suivant l'expérience aléatoire (pile ou face / lancer de deux dés).

Remarques sur la modélisation (1)

- Qu'est-ce qui change si la bouteille donnée est transparente au lieu d'être opaque ?
- Comment simuler cette expérience sur ordinateur ?
- Le protocole de l'expérience aléatoire et la famille des événements ne font pas intervenir le hasard.
- La famille des événements est plus ou moins riche suivant l'expérience aléatoire (pile ou face / lancer de deux dés).

Remarques sur la modélisation (2)

- Les trois premières étapes de l'activité correspondent à la mise en place du modèle.
- Le hasard en tant que tel n'est pas explicitement défini en probabilité.
- Le hasard s'exprime à travers le modèle choisi pour décrire la situation réelle, et plus particulièrement, la probabilité du modèle.
- Plusieurs modèles peuvent être envisagés pour décrire une même situation réelle.

Remarques sur la modélisation (2)

- Les trois premières étapes de l'activité correspondent à la mise en place du modèle.
- Le hasard en tant que tel n'est pas explicitement défini en probabilité.
- Le hasard s'exprime à travers le modèle choisi pour décrire la situation réelle, et plus particulièrement, la probabilité du modèle.
- Plusieurs modèles peuvent être envisagés pour décrire une même situation réelle.

Remarques sur la modélisation (2)

- Les trois premières étapes de l'activité correspondent à la mise en place du modèle.
- Le hasard en tant que tel n'est pas explicitement défini en probabilité.
- Le hasard s'exprime à travers le modèle choisi pour décrire la situation réelle, et plus particulièrement, la probabilité du modèle.
- Plusieurs modèles peuvent être envisagés pour décrire une même situation réelle.

Remarques sur la modélisation (2)

- Les trois premières étapes de l'activité correspondent à la mise en place du modèle.
- Le hasard en tant que tel n'est pas explicitement défini en probabilité.
- Le hasard s'exprime à travers le modèle choisi pour décrire la situation réelle, et plus particulièrement, la probabilité du modèle.
- Plusieurs modèles peuvent être envisagés pour décrire une même situation réelle.

Comment valider le choix de la probabilité ?

Un modèle est validé par l'adéquation entre les prévisions qu'il implique et les observations correspondantes effectuées sur le phénomène réel.

- *Au Collège* : Observation expérimentale de la répétition de l'expérience aléatoire et étude statistique.
- *En Seconde/Première* : Techniques de simulation du modèle par ordinateur.
- *En Terminale* : Test d'adéquation à un modèle d'équiprobabilité (test d'équirépartition).
- *En post-bac* : Outils de la statistique inférentielle (Tests d'adéquation).

Analyse d'exercices

Analyse d'exercices

Une page d'exercices extraite du manuel :

MATHS 3ième, Programme 2008, Collection Diabolo, Hachette Éducation, page 172. (voir fichier PDF)

En conclusion

Conclusion(1)

- Un enseignement d'un type nouveau pour les élèves ; à planifier sur environ 8 séances pas nécessairement consécutives.
- Une spécificité du collège par rapport au lycée à défendre :
  - *Au collège* : l'accent est mis sur la compréhension de l'expérimentation aléatoire avec des rudiments de mathématisation de la situation réelle.
  - *Au lycée* : étude d'expériences aléatoires plus complexes et approfondissement du travail sur le modèle, notamment via la simulation par ordinateur.
- Des représentations existantes sur l'aléatoire qu'il faut prendre en compte et, éventuellement, faire évoluer.

Conclusion(1)

- Un enseignement d'un type nouveau pour les élèves ; à planifier sur environ 8 séances pas nécessairement consécutives.
- Une spécificité du collège par rapport au lycée à défendre :
  - *Au collège* : l'accent est mis sur la compréhension de l'expérimentation aléatoire avec des rudiments de mathématisation de la situation réelle.
  - *Au lycée* : étude d'expériences aléatoires plus complexes et approfondissement du travail sur le modèle, notamment via la simulation par ordinateur.
- Des représentations existantes sur l'aléatoire qu'il faut prendre en compte et, éventuellement, faire évoluer.

Conclusion(1)

- Un enseignement d'un type nouveau pour les élèves ; à planifier sur environ 8 séances pas nécessairement consécutives.
- Une spécificité du collège par rapport au lycée à défendre :
  - *Au collège* : l'accent est mis sur la compréhension de l'expérimentation aléatoire avec des rudiments de mathématisation de la situation réelle.
  - *Au lycée* : étude d'expériences aléatoires plus complexes et approfondissement du travail sur le modèle, notamment via la simulation par ordinateur.
- Des représentations existantes sur l'aléatoire qu'il faut prendre en compte et, éventuellement, faire évoluer.

Conclusion(1)

- Un enseignement d'un type nouveau pour les élèves ; à planifier sur environ 8 séances pas nécessairement consécutives.
- Une spécificité du collège par rapport au lycée à défendre :
  - *Au collège* : l'accent est mis sur la compréhension de l'expérimentation aléatoire avec des rudiments de mathématisation de la situation réelle.
  - *Au lycée* : étude d'expériences aléatoires plus complexes et approfondissement du travail sur le modèle, notamment via la simulation par ordinateur.
- Des représentations existantes sur l'aléatoire qu'il faut prendre en compte et, éventuellement, faire évoluer.

Conclusion(1)

- Un enseignement d'un type nouveau pour les élèves ; à planifier sur environ 8 séances pas nécessairement consécutives.
- Une spécificité du collège par rapport au lycée à défendre :
  - *Au collège* : l'accent est mis sur la compréhension de l'expérimentation aléatoire avec des rudiments de mathématisation de la situation réelle.
  - *Au lycée* : étude d'expériences aléatoires plus complexes et approfondissement du travail sur le modèle, notamment via la simulation par ordinateur.
- Des représentations existantes sur l'aléatoire qu'il faut prendre en compte et, éventuellement, faire évoluer.

Conclusion (2)

- Un vocabulaire courant à transposer en langage mathématique ; du sens à donner aux concepts introduits.
- Une démarche de modélisation à mettre en oeuvre en quatre étapes à baliser dans un travail sur l'aléatoire :
  1. Expliciter précisément l'expérience aléatoire qui servira de référence.
  2. Repérer, expliciter et nommer les événements remarquables par rapport au travail demandé.
  3. Expliciter la probabilité du modèle et en justifier le choix.
  4. Effectuer les raisonnements et les calculs nécessaires au travail demandé.
- Des processus de validation d'un genre nouveau pour les élèves à mettre en place.

Conclusion (2)

- Un vocabulaire courant à transposer en langage mathématique ; du sens à donner aux concepts introduits.
- Une démarche de modélisation à mettre en oeuvre en quatre étapes à baliser dans un travail sur l'aléatoire :
  1. Expliciter précisément l'expérience aléatoire qui servira de référence.
  2. Repérer, expliciter et nommer les événements remarquables par rapport au travail demandé.
  3. Expliciter la probabilité du modèle et en justifier le choix.
  4. Effectuer les raisonnements et les calculs nécessaires au travail demandé.
- Des processus de validation d'un genre nouveau pour les élèves à mettre en place.

Conclusion (2)

- Un vocabulaire courant à transposer en langage mathématique ; du sens à donner aux concepts introduits.
- Une démarche de modélisation à mettre en oeuvre en quatre étapes à baliser dans un travail sur l'aléatoire :
  1. Expliciter précisément l'expérience aléatoire qui servira de référence.
  2. Repérer, expliciter et nommer les événements remarquables par rapport au travail demandé.
  3. Expliciter la probabilité du modèle et en justifier le choix.
  4. Effectuer les raisonnements et les calculs nécessaires au travail demandé.
- Des processus de validation d'un genre nouveau pour les élèves à mettre en place.

Conclusion (2)

- Un vocabulaire courant à transposer en langage mathématique ; du sens à donner aux concepts introduits.
- Une démarche de modélisation à mettre en oeuvre en quatre étapes à baliser dans un travail sur l'aléatoire :
  1. Expliciter précisément l'expérience aléatoire qui servira de référence.
  2. Repérer, expliciter et nommer les événements remarquables par rapport au travail demandé.
  3. Expliciter la probabilité du modèle et en justifier le choix.
  4. Effectuer les raisonnements et les calculs nécessaires au travail demandé.
- Des processus de validation d'un genre nouveau pour les élèves à mettre en place.

Conclusion (2)

- Un vocabulaire courant à transposer en langage mathématique ; du sens à donner aux concepts introduits.
- Une démarche de modélisation à mettre en oeuvre en quatre étapes à baliser dans un travail sur l'aléatoire :
  1. Expliciter précisément l'expérience aléatoire qui servira de référence.
  2. Repérer, expliciter et nommer les événements remarquables par rapport au travail demandé.
  3. Expliciter la probabilité du modèle et en justifier le choix.
  4. Effectuer les raisonnements et les calculs nécessaires au travail demandé.
- Des processus de validation d'un genre nouveau pour les élèves à mettre en place.

Conclusion (2)

- Un vocabulaire courant à transposer en langage mathématique ; du sens à donner aux concepts introduits.
- Une démarche de modélisation à mettre en oeuvre en quatre étapes à baliser dans un travail sur l'aléatoire :
  1. Expliciter précisément l'expérience aléatoire qui servira de référence.
  2. Repérer, expliciter et nommer les événements remarquables par rapport au travail demandé.
  3. Expliciter la probabilité du modèle et en justifier le choix.
  4. Effectuer les raisonnements et les calculs nécessaires au travail demandé.
- Des processus de validation d'un genre nouveau pour les élèves à mettre en place.

Conclusion (2)

- Un vocabulaire courant à transposer en langage mathématique ; du sens à donner aux concepts introduits.
- Une démarche de modélisation à mettre en oeuvre en quatre étapes à baliser dans un travail sur l'aléatoire :
  1. Expliciter précisément l'expérience aléatoire qui servira de référence.
  2. Repérer, expliciter et nommer les événements remarquables par rapport au travail demandé.
  3. Expliciter la probabilité du modèle et en justifier le choix.
  4. Effectuer les raisonnements et les calculs nécessaires au travail demandé.
- Des processus de validation d'un genre nouveau pour les élèves à mettre en place.

Bibliographie

Bibliographie

Ducel Y., Saussereau B.,
Synthèse de l'intervention "Statistique et probabilités" à la journée Collège de l'académie de Besancon
http ://www-irem.univ-fcomte.fr/, octobre 2008.

Groupe Probabilité : Barthélémy M.J., Ducel Y., Grangé J.P., Vendrely M.
Lois continues, test d'adéquation. Une approche pour non spécialiste
Coll. "Les publications de l'IREM", Presses universitaires de Franche-Comté, deuxième édition, 2007.

Bibliographie

- Ducel Y., Saussereau B.,
Synthèse de l'intervention "Statistique et probabilités" à la journée Collège de l'académie de Besancon
http ://www-irem.univ-fcomte.fr/, octobre 2008.

- Groupe Probabilité : Barthélémy M.J., Ducel Y., Grangé J.P., Vendrely M.
Lois continues, test d'adéquation. Une approche pour non spécialiste
Coll. "Les publications de l'IREM", Presses universitaires de Franche-Comté, deuxième édition, 2007.

Merci de votre attention

Contacts

- **Yves Ducel**
  Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques
  Téléphone : +33(0)3 81 66 62 32
  Adresse électronique : yves.ducel@univ-fcomte.fr

- Adresse postale : IREM - Département de mathématiques
  UFR Sciences et techniques de l'Université de Franche-Comté
  16, route de Gray, F-25030 Besancon cedex

- Adresse Web de l'IREM : http ://www-irem.univ-fcomte.fr/