

## Fiche professeur : activité de compression d'une image JPEG

Classe concernée : Terminale S, cours de Spécialité en Mathématiques

Durée : 2h

### Objectifs :

L'outil numérique pour l'acquisition, le traitement et l'archivage des images est devenu incontournable. Cette activité a pour but, dans un premier temps, de faire le point sur les connaissances des élèves (pixellisation, système RVB) et, ensuite, de décortiquer l'utilisation de l'outil matriciel dans l'exemple de la compression d'une image en fichier JPEG.

### Prérequis :

Les élèves en classe de Terminale S ont déjà rencontré de nombreuses notions abordées au début de l'activité : synthèse des couleurs, vision de l'œil, etc. Un rappel des programmes des classes de Première et Terminale en Sciences Physiques et en Sciences de la Vie et de la Terre est fourni en [annexe 1](#). Pour la partie mathématique, cette activité prend place après la première partie du cours sur les matrices : calculs, inverse, résolution de systèmes linéaires.

### Déroulement de la séance :

Afin de raviver leurs connaissances et de présenter la méthode générale de compression JPEG, un diaporama est préalablement présenté aux élèves (diaporama "compression JPEG" sous powerpoint).

Diapositives	Contenus	Commentaires
1 à 5	Présentation générale du système $RGB$ (vision de l'œil, synthèse additive, pixel, couleurs).	La présentation se fait en interaction avec les élèves, les notions abordées étant déjà connues.
6 à 9	Présentation du système $YC_bC_r$ (luma, chrominances, passage d'un système à l'autre).	Cette partie est nouvelle pour les élèves (pour se préparer à d'éventuelles questions, cf. <a href="#">annexe 2</a> ).
10 à 15	Présentation de la méthode générale pour compresser une image au format JPEG (en 5 étapes).	La diapositive 12 est assez compliquée (cf. <a href="#">annexe 3 et 4</a> pour des compléments), il vaut mieux ne pas s'y attarder (sauf questions) et passer rapidement à l'exemple qui suit (interprétation en <a href="#">annexe 4</a> ) pour ne pas perdre les élèves.
16	Présentation de l'activité élève.	Le diaporama est ici mis en pause afin de laisser les élèves appliquer la méthode générale au cas d'une image $2 \times 2$ .
17 à 19	Résultats de l'activité.	il faut noter que la perception des différences de couleurs entre l'image originale et l'image compressée dépend du matériel utilisé. Le format image utilisé (PNG) pour les carrés est censé garantir la conservation intégrale des couleurs.
20	Fin du diaporama.	On présente les deux fichiers processing "compression_jpeg_02" et "_03" (présentation en <a href="#">annexe 5</a> ) ou les diapos qui en sont extraites si on ne peut pas lire les fichiers.

**Les deux pages suivantes donnent la correction chiffrée de l'activité élève.**

Les différentes annexes donnent des compléments mathématiques, physiques et techniques à l'activité.

### Sources :

L'activité a été fortement inspirée de l'article "Les images sur la Toile, un défi de taille" écrit par Marc Bergeron (Cégep de Ste-Foi) et parue dans la revue numérique québécoise ACCROMATH (Vol.7.2 été automne 2012) téléchargeable gratuitement sur le site : <http://accromath.uqam.ca>

Pour les annexes, d'autres sources seront données au fur et à mesure de cette fiche.

## Partie 1 : Compression JPEG d'une image 2x2

On part de l'image suivante avec  $X = \begin{pmatrix} R \\ V \\ B \end{pmatrix}$ :

$X_1 = \begin{pmatrix} 154 \\ 0 \\ 255 \end{pmatrix}$	$X_2 = \begin{pmatrix} 105 \\ 255 \\ 0 \end{pmatrix}$
$X_3 = \begin{pmatrix} 250 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix}$	$X_4 = \begin{pmatrix} 240 \\ 240 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= \begin{pmatrix} 154 & 105 \\ 250 & 240 \end{pmatrix} \\ \tilde{V} &= \begin{pmatrix} 0 & 255 \\ 30 & 240 \end{pmatrix} \\ \tilde{B} &= \begin{pmatrix} 255 & 0 \\ 20 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### Étape 1 : Transformation des couleurs

Pour chaque vecteur  $X$  on calcule le vecteur :

$$Y = \begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,299 & 0,587 & 0,114 \\ -0,16874 & -0,33126 & 0,5 \\ 0,5 & -0,41869 & -0,08131 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ V \\ B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 128 \\ 128 \end{pmatrix} = TX + S$$

On obtient :  $Y_1 = \begin{pmatrix} 75 \\ 229 \\ 184 \end{pmatrix}$ ,  $Y_2 = \begin{pmatrix} 181 \\ 25 \\ 73 \end{pmatrix}$ ,  $Y_3 = \begin{pmatrix} 94 \\ 85 \\ 238 \end{pmatrix}$  et  $Y_4 = \begin{pmatrix} 212 \\ 8 \\ 147 \end{pmatrix}$ .

On en déduit les matrices :  $\tilde{L} = \begin{pmatrix} 75 & 181 \\ 94 & 212 \end{pmatrix}$ ,  $\tilde{M} = \begin{pmatrix} 229 & 25 \\ 85 & 8 \end{pmatrix}$  et  $\tilde{N} = \begin{pmatrix} 184 & 73 \\ 238 & 147 \end{pmatrix}$ .

### Étape 2 : Sous-échantillonnage des matrices $\tilde{M}$ et $\tilde{N}$

Puisqu'il y a peu de nombres et qu'ils sont très hétérogènes, nous garderont les matrices  $\tilde{M}$  et  $\tilde{N}$  intactes.

### Étape 3 : Transformation en Cosinus Discrète (TCD) de la matrice $\tilde{L}$

On calcule  $TCD(\tilde{L}) = A^{-1} \times \tilde{L} \times A$  où  $a_{ij} = \alpha(j) \cos\left(\frac{\pi(j-1)}{2N} \times (2i-1)\right)$

$$\text{pour } 1 \leq i \leq N \text{ et } 1 \leq j \leq N \text{ avec } \alpha(j) = \begin{cases} \sqrt{1/N} & \text{si } j = 1 \text{ donc } \alpha(1) = 1/\sqrt{2} \\ \sqrt{2/N} & \text{sinon } \alpha(2) = 1 \end{cases}$$

$$\text{Ici } N = 2 \text{ donc } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\pi \times 0}{4} \times 1\right) & 1 \times \cos\left(\frac{\pi \times 1}{4} \times 1\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\pi \times 0}{4} \times 3\right) & 1 \times \cos\left(\frac{\pi \times 1}{4} \times 3\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Alors } A^t = A \text{ et } A \times A^t = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Donc on a  $A^{-1} = A$ .

$$TCD(\tilde{L}) = \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 75 & 181 \\ 94 & 212 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 256 & -106 \\ 306 & -118 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 281 & -112 \\ -25 & 6 \end{pmatrix}$$

### Étape 4 : Quantification

On divise chaque coefficient  $tcd_{ij}$  par  $1 + k(i+j-1)$  et on arrondit à l'entier le plus proche.

avec un facteur $k = 4$ :	avec un facteur $k = 25$ :
$Q(\tilde{L}) = \begin{pmatrix} \frac{281}{1+4} & \frac{-112}{1+4 \times 2} \\ \frac{-25}{1+4 \times 2} & \frac{6}{1+4 \times 3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 56 & -12 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$	$Q(\tilde{L}) = \begin{pmatrix} \frac{282}{1+25} & \frac{-112}{1+25 \times 2} \\ \frac{-25}{1+25 \times 2} & \frac{6}{1+25 \times 3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 11 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
<p>Au départ : 12 valeurs de <math>R, V</math> et <math>B</math>            Au final : 11 valeurs de <math>L, M</math> et <math>N</math> non nulles</p>	<p>Au départ : 12 valeurs de <math>R, V</math> et <math>B</math>            Au final : 10 valeurs de <math>L, M</math> et <math>N</math> non nulles</p>

## Partie 2 : Décompression de la matrice $Q(\tilde{L})$

### Étape 4 : Quantification inverse

avec un facteur $k = 4$ :	avec un facteur $k = 25$ :
$TCD(\tilde{L}') = \begin{pmatrix} 56 \times 5 & -12 \times 9 \\ -3 \times 9 & 0 \times 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 280 & -108 \\ -27 & 0 \end{pmatrix}$	$TCD(\tilde{L}') = \begin{pmatrix} 11 \times 26 & -2 \times 51 \\ 0 \times 51 & 0 \times 76 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 286 & -102 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

### Étape 3 : TCD inverse

Si  $TCD(\tilde{L}) = A^{-1} \times \tilde{L} \times A$  alors :  $\tilde{L} = A \times TCD(\tilde{L}) \times A^{-1}$  avec  $A^{-1} = A$

$\tilde{L}' = \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 280 & -108 \\ -27 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ <p>donc : <math>\tilde{L}' = \begin{pmatrix} 72 &amp; 180 \\ 99 &amp; 207 \end{pmatrix}</math></p>	$\tilde{L}' = \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 286 & -102 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ <p>donc : <math>\tilde{L}' = \begin{pmatrix} 92 &amp; 194 \\ 92 &amp; 194 \end{pmatrix}</math></p>
--	--

### Étape 2 : Sur-échantillonnage

Inutile, on retrouve les matrices  $\tilde{M}$  et  $\tilde{N}$ . Alors :

$$Y_1' = \begin{pmatrix} 72 \\ 229 \\ 184 \end{pmatrix}, Y_2' = \begin{pmatrix} 180 \\ 25 \\ 73 \end{pmatrix}, Y_3' = \begin{pmatrix} 99 \\ 85 \\ 238 \end{pmatrix}, Y_4' = \begin{pmatrix} 207 \\ 8 \\ 147 \end{pmatrix} \quad \left| \quad Y_1' = \begin{pmatrix} 92 \\ 229 \\ 184 \end{pmatrix}, Y_2' = \begin{pmatrix} 194 \\ 25 \\ 73 \end{pmatrix}, Y_3' = \begin{pmatrix} 92 \\ 85 \\ 238 \end{pmatrix}, Y_4' = \begin{pmatrix} 194 \\ 8 \\ 147 \end{pmatrix}.$$

### Étape 1 : Transformation de couleurs

Si  $Y = TX + S$  alors :  $X = T^{-1} \times (Y - S)$ .

$X_1' = \begin{pmatrix} 150 \\ 0 \\ 250 \end{pmatrix}$	$X_2' = \begin{pmatrix} 102 \\ 254 \\ 0 \end{pmatrix}$
$X_3' = \begin{pmatrix} 253 \\ 35 \\ 22 \end{pmatrix}$	$X_4' = \begin{pmatrix} 233 \\ 234 \\ 0 \end{pmatrix}$

$X_1' = \begin{pmatrix} 170 \\ 17 \\ 255 \end{pmatrix}$	$X_2' = \begin{pmatrix} 116 \\ 255 \\ 11 \end{pmatrix}$
$X_3' = \begin{pmatrix} 255 \\ 28 \\ 15 \end{pmatrix}$	$X_4' = \begin{pmatrix} 220 \\ 221 \\ 0 \end{pmatrix}$

### Complément : Interprétation de $TCD(\tilde{L})$ dans le cas $2 \times 2$

Si  $\tilde{L} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  alors :  $TCD(\tilde{L}) = \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ c+d & c-d \end{pmatrix}$

$TCD(\tilde{L}) = \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} a+b+c+d & a-b+c-d \\ a+b-c-d & a-b-c+d \end{pmatrix}$  donc :

$$TCD(\tilde{L}) = \begin{pmatrix} \frac{a+b+c+d}{2} & \frac{a+c}{2} & \frac{b+d}{2} \\ \frac{a+b-c-d}{2} & \frac{a+d}{2} & \frac{b+c}{2} \end{pmatrix}$$

2 fois la moyenne des valeurs

Écart moyen des colonnes

Écart moyen des lignes

Écart moyen des diagonales

## Annexe 1 : dans les programmes

### ♦ Programme de Physique :

**En Première S : OBSERVER - Couleurs et images**

*Comment l'œil fonctionne-t-il ? D'où vient la lumière colorée ? Comment créer de la couleur ?*

Notions et contenus	Capacités attendues
L'œil; modèle de l'œil réduit.	Décrire le modèle de l'œil réduit et le mettre en correspondance avec l'œil réel.
Lentilles minces convergentes : images réelle et virtuelle. Distance focale, vergence. Relation de conjugaison ; grandissement.	Déterminer graphiquement la position, la grandeur et le sens de l'image d'un objet-plan donnée par une lentille convergente. Modéliser le comportement d'une lentille mince convergente à partir d'une série de mesures. Utiliser les relations de conjugaison et de grandissement d'une lentille mince convergente.
Accommodation.	Modéliser l'accommodation du cristallin.
Fonctionnements comparés de l'œil et d'un appareil photographique.	Pratiquer une démarche expérimentale pour comparer les fonctionnements optiques de l'œil et de l'appareil photographique.
Couleur des objets. Synthèse additive, synthèse soustractive. Absorption, diffusion, transmission.	Interpréter la couleur observée d'un objet éclairé à partir de celle de la lumière incidente ainsi que des phénomènes d'absorption, de diffusion et de transmission. Utiliser les notions de couleur blanche et de couleurs complémentaires. Prévoir le résultat de la superposition de lumières colorées et l'effet d'un ou plusieurs filtres colorés sur une lumière incidente. Pratiquer une démarche expérimentale permettant d'illustrer et comprendre les notions de couleurs des objets.
Vision des couleurs et trichromie. Daltonisme. Principe de la restitution des couleurs par un écran plat (ordinateur, téléphone portable, etc.).	Distinguer couleur perçue et couleur spectrale. Recueillir et exploiter des informations sur le principe de restitution des couleurs par un écran plat.

### En cours obligatoire de Terminale S : AGIR - Défis du XXI<sup>ème</sup> siècle

*En quoi la science permet-elle de répondre aux défis rencontrés par l'Homme dans sa volonté de développement tout en préservant la planète ?*

Transmettre et stocker de l'information

Images numériques

Notions et contenus	Capacités exigibles
Caractéristiques d'une image numérique : pixellisation, codage RVB et niveaux de gris.	Associer un tableau de nombres à une image numérique. Mettre en œuvre un protocole expérimental utilisant un capteur (caméra ou appareil photo numériques par exemple) pour étudier un phénomène optique.

### ♦ Programme de Mathématiques :

**En cours de Spécialité de Terminale S : Matrices et suites**

Contenus : Matrices carrées, matrices colonnes : opérations.  
Matrice inverse d'une matrice carrée.

### ♦ programme de S.V.T. :

**En Première S : thème 3 Corps humain et santé**

*Thème 3-C De l'œil au cerveau, quelques aspects de la vision*

<p>Les photorécepteurs : un produit de l'évolution</p> <p>La rétine est une structure complexe qui comprend les récepteurs sensoriels de la vision appelés photorécepteurs. Celle de l'Homme contient les cônes permettant la vision des couleurs (3 types de cônes respectivement sensibles au bleu, au vert et au rouge) et les bâtonnets sensibles à l'intensité lumineuse.</p> <p>Les gènes des pigments rétinien constituent une famille multigénique (issue de duplications) dont l'étude permet de placer l'Homme parmi les Primates. Des anomalies des pigments rétinien se traduisent par des perturbations de la vision des couleurs. Le message nerveux issu de l'œil est acheminé au cerveau par le nerf optique.</p> <p>Objectifs et mots clés : tout en évoquant rapidement la complexité de la rétine et de ses fonctions, il s'agit de centrer l'attention sur les cellules photo-réceptrices. Leur étude permet aussi bien d'évoquer des troubles de la vision colorée que de réaliser une première approche de la place de l'Homme dans l'évolution.</p> <p>[Limites. La physiologie de la rétine n'est pas abordée. On signale simplement l'élaboration globale d'un message acheminé par le nerf optique.]</p> <p>Convergences : Physique : lumière, couleur.</p> <p>Pistes : Le daltonisme ; la vision des couleurs chez les vertébrés.</p>
--

## Annexe 2 : système luminance-chrominances et compression JPEG

### I- Colorimétrie et lumière

#### 1) Un peu d'histoire :

Alors qu'au Moyen-Age, on considérait que les différentes teintes n'étaient dues qu'à une variation de luminosité entre les deux couleurs primaires blanc et noir, les peintres de la Renaissance s'essaient à l'utilisation de palettes de couleurs basées sur trois teintes principalement : le bleu, le rouge et le jaune avec éventuellement le rajout du vert (ou le cyan).

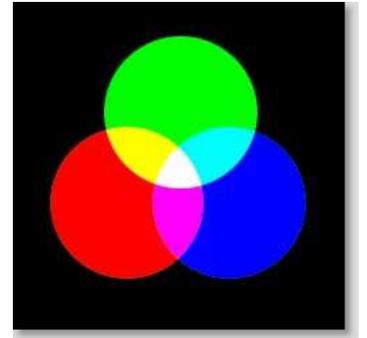
Au 17<sup>ème</sup> siècle, Isaac Newton explique comment la lumière blanche se décompose en rayons multicolores par réfraction à travers un prisme (c'est le spectre chromatique) et la possibilité de recomposer à nouveau la lumière blanche avec ces rayons. Les couleurs sont donc les éléments qui constituent la lumière et on peut les classer par critère de teinte indépendamment de la luminosité. Il vient de créer la colorimétrie moderne et classe les couleurs sur un cercle chromatique.

Au début du 19<sup>ème</sup> siècle, Thomas Young suggère que la vision des couleurs par l'œil humain est faite à l'aide de photorécepteurs qui captent principalement 3 couleurs dites primaires qui permettent à elles seules de reconstituer tout le spectre chromatique. Hermann von Helmholtz définit ces couleurs comme étant le bleu, le vert et le rouge et les travaux de James Clerk Maxwell (milieu du 19<sup>ème</sup> siècle) permettent de faire la distinction entre les trois couleurs primaires additives du monde de la lumière et les trois primaires soustractives du monde des mélanges des teintes.

Les preuves physiologiques de la trichromie au niveau de l'œil par l'étude des cônes ne seront établies qu'en 1956 par Gunnar Svaetichin.

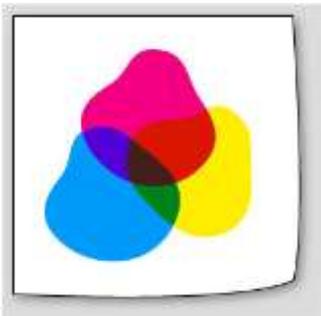
#### 2) Quelques explications sur les deux types de synthèses :

- Synthèse additive : en utilisant seulement trois sources colorées monochromatiques (généralement le rouge, le vert et le bleu d'où le nom de système *RGB*), on peut reconstituer toutes les autres couleurs du spectre en les mélangeant dans différentes proportions. La superposition de deux couleurs primaires sur la rétine donne une couleur complémentaire de la troisième primaire, la superposition des trois couleurs reconstitue la lumière blanche. Cette synthèse concerne tous les mélanges de couleurs d'origine lumineuse : projecteurs, moniteurs, scanners, écrans LCD, ...



- Synthèse soustractive : en utilisant seulement trois colorants sur une feuille (en général le cyan, le magenta et le jaune d'où le nom de système *CMJ*), on peut reproduire quasiment toutes les autres couleurs. On constate que dans ce système tout est inversé par rapport au système additif : la source lumineuse est le papier blanc qui réfléchit totalement la lumière. Si on applique par exemple du colorant jaune, le pigment coloré frappé par la lumière va absorber la composante bleue de la lumière (complémentaire du jaune) et donc ne réfléchir que les composantes vertes et rouges qui donnent la perception du jaune à l'œil humain.

Pour pallier l'inconvénient du noir trop pâle, les graphistes rajoutent le noir aux trois primaires, c'est le système quadrichromatique (*CMJN*).



#### 3) La couleur dans le monde des images animées :

Dès l'origine du cinéma, différentes techniques de colorisation des images furent tentées (au départ par colorisation à la main de parties de la pellicule puis trempage dans des solutions colorées ...). Au début des années 30, Technicolor met au point un système qui utilise à l'intérieur de la caméra un prisme qui sépare le rouge, le vert et le bleu de trois pellicules noir et blanc, pour ensuite obtenir trois copies monochromes et recomposer une copie finale richement colorée par l'application des teintures primaires (jaune, magenta et cyan) : c'est le Technicolor trichrome. En 1935 Kodak met au point le film Kodachrome qui sera miniaturisé et développé pour les caméras 8mm des particuliers. En Allemagne Agfa lance de même l'Agfacolor, ce qui explique que l'on peut retrouver des images, en couleur, d'archives de la seconde guerre mondiale faites par des particuliers, dans les deux camps. Il faudra attendre les années 50 pour que soit développée la pellicule négative couleur (plus besoin de colorer des pellicules noir et blanc).

Mais ces techniques qui permettent une projection en couleur sur écran (au cinéma ou chez les particuliers), s'avèrent inutiles dans le monde audiovisuel où les téléviseurs transmettent encore en noir et blanc ...

Un double défi s'annonce : il faut pouvoir diffuser en noir et blanc des images tournées en couleur, et pour les premiers téléviseurs couleurs qui utilisent les mêmes canaux, transmettre trois signaux monochromes (*RGB*) en un seul signal. On cherche donc un signal vidéo englobant les trois caractéristiques sans qu'elles se mélangent, et décodable par les deux types de téléviseurs qui recomposent une image noir et blanc ou en couleur.

## II- Comment transformer un signal RGB en un signal noir et blanc de façon réversible ?

### 1) Préambule :

Il nous faut d'abord présenter deux organismes incontournables dans le monde de la couleur et des télécommunications :

- la Commission Internationale de l'Éclairage (CIE)

Fondée en 1913, cette commission est chargée d'étudier la lumière, l'éclairage, les couleurs et leur perception par l'œil humain. En ce qui concerne les couleurs, elle procède à différentes expériences de comparaison de sensations colorées sur un petit panel d'observateurs afin de définir un observateur moyen : il s'agit, en superposant les trois couleurs primaires et en faisant varier leurs intensités, de reproduire la même sensation colorée que toute couleur pure caractérisée par une longueur d'onde comprise entre 380 et 780 nm. Ainsi, dans un espace colorimétrique à trois dimensions ( $R ; G ; B$ ), chaque couleur est déterminée par des coordonnées uniques.

Au début des années 30, elle crée donc le système de couleurs  $RGB$ . Ce système ne permettant pas de définir exactement toutes les couleurs du spectre chromatique à l'aide de coordonnées positives, la CIE le fait évoluer vers le système  $XYZ$  plus abstrait. Celui-ci comporte la composante  $Y$  (luminance) qui porte l'information d'intensité lumineuse perçue par l'œil (sans référence de couleur) et les deux composantes  $XZ$  (chrominances) portent l'information colorée. Le passage entre les deux systèmes est réversible. Depuis, la commission n'a cessé d'améliorer ses différents systèmes et ses espaces colorimétriques sont utilisés aussi bien dans le traitement des images numériques que dans celui de l'impression.

- l'Union Internationale des Télécommunications (UIT)

Dans les années 30, cette union est créée par fusion de divers organismes internationaux du monde de la télégraphie, de la téléphonie et des radiocommunications. Elle rejoint les Nations Unies en 1947, l'un de ses objectifs est la création de normes internationales dans le monde de l'information et des télécommunications pour une uniformisation des procédés (dans le secteur privé et dans les états). Elle intervient aussi par exemple dans l'attribution de fréquences en radio et télécommunications.

### 2) Le système Luminance-Chrominances :

Dans le monde de la colorimétrie, la luminance (ou luma) notée  $Y$  mesure l'intensité lumineuse subjective captée par l'œil, indépendamment de la couleur (c'est en fait une luminance relative qui est proportionnelle à la luminance utilisée en photométrie, celle-ci mesure en candela par mètre carré l'intensité lumineuse émise par une source).

Le niveau de gris d'un point d'une image en noir et blanc correspond à l'intensité lumineuse perçue en ce point.

Les travaux de la CIE ont montré que l'œil humain est plus sensible à l'intensité lumineuse dans certaines parties du spectre : ainsi la lumière verte semble plus lumineuse que la rouge, et encore plus que la bleue, à puissance égale. Pour retranscrire précisément la sensation lumineuse perçue par l'œil et la traduire en niveau de gris, on ne peut donc pas se contenter de faire une moyenne simple des niveaux de rouge, vert et bleu. Approximativement, on prend 59% de vert, 30% de rouge et 11% de bleu : on vient d'obtenir le passage du système  $RGB$  au système noir et blanc.

Pour inverser le processus, il faut pouvoir garder l'information sur les couleurs : on définit les chrominances  $X$  et  $Z$  du système  $XYZ$  qui portent l'information relative au rouge et au bleu.  $X$  est la chrominance rouge, elle est proportionnelle à  $Y - R$ ,  $Z$  est la chrominance bleue, proportionnelle à  $Y - B$ . Le passage entre les systèmes CIE  $RGB$  (1931) et CIE  $XYZ$  (1931) se fait alors de façon réversible à l'aide par exemple d'un calcul matriciel.

On est donc capable de transformer un signal  $RGB$  en signal Luminance-Chrominances afin de transmettre un signal vidéo aux téléviseurs. Les TV noir et blanc n'utilisent alors que la composante  $Y$ , les TV couleur par contre inversent le processus afin de transmettre le signal en couleur (par balayage d'un faisceau électronique pour les écrans cathodiques).

Après bien des améliorations et la prise en compte de certaines corrections (gamma par exemple), l'UIT produit des normes adaptées aux signaux vidéo qui définissent des espaces colorimétriques propres (on se rappelle notamment la non compatibilité des normes PAL et SECAM).

Pour les images numériques et la vidéo simple définition, la norme la plus utilisée est la norme **UIT-R BT 601**.

On considère les composantes  $R$ ,  $G$  et  $B$  dans l'intervalle  $[0 ; 255]$ , éventuellement corrigées (en vidéo on prendra plutôt l'intervalle  $[16 ; 235]$ ), la luminance et les chrominances bleues et rouges valent :

$$Y = 0,299R + 0,587G + 0,114B \quad ; \quad C_b = \frac{B - Y}{1,402} \quad ; \quad C_r = \frac{R - Y}{1,772}$$

D'où le calcul matriciel :

$$\begin{pmatrix} Y \\ C_b \\ C_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,299 & 0,587 & 0,114 \\ -0,1687 & -0,3312 & 0,5 \\ 0,5 & -0,4187 & -0,0813 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$$

Pour la vidéo haute définition, on préfère la norme **UIT-R BT 709** :

$$Y = 0,2126R + 0,7152G + 0,0722B \quad ; \quad C_b = 0,5389(B - Y) \quad ; \quad C_r = 0,635(R - Y)$$

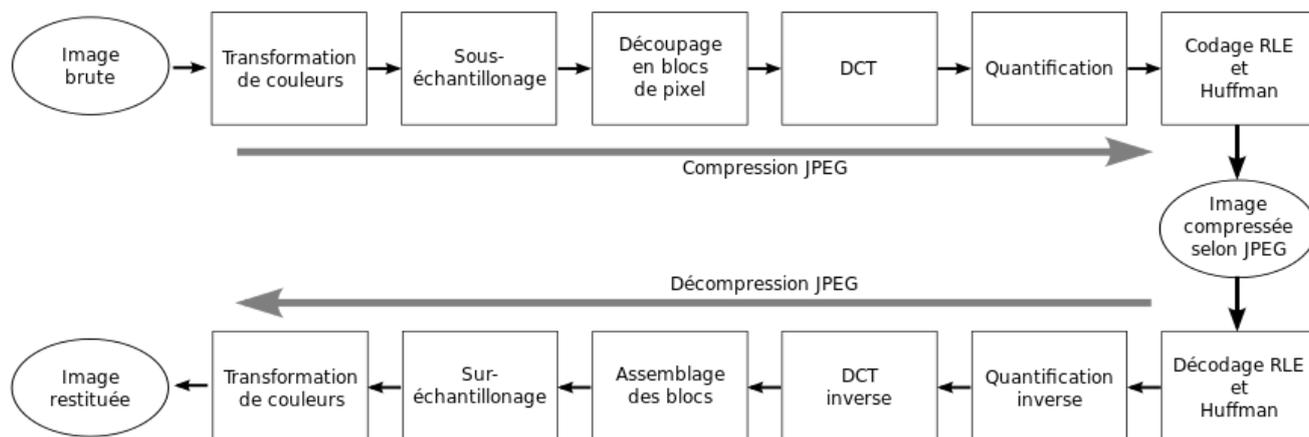
D'où le calcul matriciel :

$$\begin{pmatrix} Y \\ C_b \\ C_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2126 & 0,7152 & 0,0722 \\ -0,1146 & -0,3854 & 0,5 \\ 0,5 & -0,4541 & -0,0458 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}.$$

En effectuant ces calculs avec  $R$ ,  $G$  et  $B$  dans l'intervalle  $[0 ; 255]$ , les valeurs d'arrivée vérifient :  $Y \in [0 ; 255]$ ,  $C_b \in [-127,5 ; 127,5]$  et  $C_r \in [-127,5 ; 127,5]$ , d'où la nécessité pour un codage sur ordinateur en 8 bits de rajouter 128 à  $C_b$  et  $C_r$ , la partie entière du résultat se retrouve bien à nouveau dans l'intervalle  $[0 ; 255]$ . On dit que l'on déplace le niveau achromatique (chrominance nulle) à 128.

### III- La compression JPEG

Cette compression est un algorithme qui vise à stocker une image numérique en limitant le nombre de bits nécessaires au stockage. Le processus est bien décrit dans l'article "JPEG" de wikipédia, notamment avec le schéma suivant :



#### Transformation de couleurs :

On convertit les informations de l'image du système colorimétrique d'origine (souvent  $RGB$ ) vers le système  $YC_bC_r$ .

#### Sous-échantillonnage :

D'après les travaux de la CIE, l'œil humain est plus sensible à la luminosité qu'à la couleur donc on garde l'information de luminance propre à chaque pixel mais on considère que des pixels proches ont des teintes proches donc on peut se permettre de sous-échantillonner les chrominances.

#### Découpage en blocs de pixels :

En général le découpage se fait par blocs de  $8 \times 8$  comme dans l'exemple du diaporama (exemple de l'article accromath).

#### DCT (ou TCD en français : transformée en cosinus discrète) :

C'est une méthode calquée sur la transformée de Fourier pour les fonctions continues mais appliquée ici à un nombre fini de valeurs (cf. annexes 3 et 4 pour les explications). Cette méthode donne lieu à un calcul matriciel sur la luminance de chaque bloc de pixels. Le résultat est une matrice où l'on observe une diminution nette des valeurs à mesure que l'on s'approche du coin inférieur droit. À ce stade de l'algorithme JPEG, la seule perte d'information a pu être faite lors du sous-échantillonnage des chrominances et dans les arrondis après TCD, le taux de compression est donc encore faible.

#### Quantification :

C'est l'étape où la perte d'information est la plus élevée. Dans le diaporama, nous avons repris l'exemple de l'article de la revue accromath où la quantification se fait à l'aide d'une formule dépendant des numéros de ligne et de colonne du nombre dans la matrice. La méthode générale utilise une matrice de quantification  $Q$  propre aux industriels (du moment qu'elle respecte la norme de l'algorithme), elle sera enregistrée dans le fichier. On opère alors la division terme à terme de la matrice résultant de la TCD par cette matrice  $Q$  et on arrondit : de nombreux 0 apparaissent dans la matrice finale.

#### Codage :

Comme décrit dans le diaporama, on parcourt la matrice finale en zigzag et on stoppe le stockage de l'information lorsque les coefficients suivants sont tous nuls.

Pour décompresser l'image, il suffit de reprendre les étapes dans l'autre sens.

### Annexe 3 : Matrice orthogonale dans le calcul de TCD

Les deux rappels abordés ci-dessous ne sont pas au programme de Mathématiques de Terminale S (Spécialité) mais ils permettent de raviver des souvenirs parfois lointains, pour le professeur du secondaire, de notions vues dans l'enseignement supérieur.

#### Rappels mathématiques sur les matrices orthogonales

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $M_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$  à coeff. réels.

Déf : Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ .  $A$  est orthogonale si  $A$  est inversible et  $A^{-1} = A^t$  (transposée de  $A$ ).  
On note  $O_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre  $n$  à coefficients réels.

Rques :  $I_n \in O_n(\mathbb{R})$  (matrice identité d'ordre  $n$ ) et si  $A \in O_n(\mathbb{R})$  alors  $\det A = \pm 1$ .

Prop :  $A \in O_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow A^t \times A = I_n \Leftrightarrow A \times A^t = I_n.$

Caractérisation :

On définit un produit scalaire (forme bilinéaire symétrique positive définie sur  $E \times E$ ) de la façon suivante :

Si  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$  alors

$$\langle X|Y \rangle = X^t \times Y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Si  $X = (x_1 \dots x_n)$  et  $Y = (y_1 \dots y_n)$  alors

$$\langle X|Y \rangle = X \times Y^t = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

On définit ensuite la norme :  $\|X\| = \sqrt{\langle X|X \rangle}$ .

Prop : Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  de colonnes  $C_1, \dots, C_n$  et de lignes  $L_1, \dots, L_n$ .  
 $A \in O_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow$  la famille  $(C_1, \dots, C_n)$  est orthonormée  $\Leftrightarrow$  la famille  $(L_1, \dots, L_n)$  est orthonormée.

Démonstration :

On note  $A = (a_{ij})$ ,  $A^t = (a'_{ij}) = (a_{ji})$  et  $A^t \times A = (b_{ij})$ .

$$\text{Alors } b_{ij} = \sum_{k=1}^n a'_{ik} \times a_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ki} \times a_{kj} = \langle C_i | C_j \rangle.$$

On obtient :  $A^t \times A = I_n \Leftrightarrow b_{ij} = \langle C_i | C_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \Leftrightarrow$  Les vecteurs  $C_i$  sont orthogonaux de norme 1.

Idem avec les lignes et  $A \times A^t$ .

#### Rappels mathématiques sur les changements de bases

Soit  $B = (e_1, \dots, e_n)$  et  $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$  deux bases de  $n$  vecteurs de  $E$  (notation des coordonnées en colonnes).  
La matrice de changement de base de  $B$  vers  $B'$  est la matrice inversible  $P$  dont la  $j$ -ème colonne est formée des coordonnées du vecteur  $e'_j$  dans la base  $B$ .

Alors  $P^{-1}$  est la matrice de passage de  $B'$  vers  $B$ .

Soit  $x \in E$ , on note  $X$  ses coordonnées dans  $B$  et  $X'$  ses coordonnées dans  $B'$ .

$$\text{Alors } X = PX' \text{ (ou } X' = P^{-1}X).$$

Soit  $u$  est un endomorphisme de  $E$  (application linéaire de  $E$  dans  $E$ ),  $M$  sa matrice dans la base  $B$  et  $M'$  sa matrice dans la base  $B'$ .

$$\text{Alors } M' = P^{-1}MP.$$

En effet,  $y = f(x)$  se traduit par  $Y = MX$  dans  $B$  et  $Y' = M'X'$  dans  $B'$ .

Or,  $X = PX'$  et  $Y = PY'$  donc  $Y = MX \Leftrightarrow PY' = MPX' \Leftrightarrow Y' = (P^{-1}MP)X'$  donc  $M' = P^{-1}MP$ .

Prop : Soit  $B$  une base orthonormée de  $E$ ,  $B'$  une autre base de  $E$  et  $P$  la matrice de passage de  $B$  vers  $B'$ .  
 $B'$  est une base orthonormée  $\Leftrightarrow P \in O_n(\mathbb{R})$ .

### Montrons que la matrice $A$ utilisée lors de la TCD est orthogonale

Nous nous placerons dans le cas des blocs  $8 \times 8$  ( $N = 8$ ) qui est le cas employé dans la compression JPEG. La démonstration est généralisable au cas général des blocs  $N \times N$ .

$$\text{pour } 1 \leq i \leq 8 \text{ et } 1 \leq j \leq 8 \text{ on a } \alpha(j) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}} = \frac{\sqrt{2}}{4} & \text{si } j = 1 \\ \sqrt{\frac{2}{N}} = \frac{1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors  $A$  s'écrit :

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos \frac{\pi}{16} & \cos \frac{2\pi}{16} & \dots & \cos \frac{k\pi}{16} & \dots & \cos \frac{7\pi}{16} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos \frac{3\pi}{16} & \cos \frac{6\pi}{16} & \dots & \cos \frac{3k\pi}{16} & \dots & \cos \frac{21\pi}{16} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos \frac{5\pi}{16} & \cos \frac{10\pi}{16} & \dots & \cos \frac{5k\pi}{16} & \dots & \cos \frac{35\pi}{16} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos \frac{15\pi}{16} & \cos \frac{30\pi}{16} & \dots & \cos \frac{15k\pi}{16} & \dots & \cos \frac{105\pi}{16} \end{pmatrix}$$

( $k+1$ )-ième colonne

Lemme : Pour tout entier relatif  $k$  non multiple de 16 on a :

$$\cos \frac{k\pi}{16} + \cos \frac{3k\pi}{16} + \cos \frac{5k\pi}{16} + \dots + \cos \frac{15k\pi}{16} = \sum_{n=0}^{n=7} \cos \frac{(2n+1)k\pi}{16} = 0$$

La démonstration qui suit, bien qu'un peu technique, peut être un exercice intéressant à proposer aux élèves de Terminale S (cours obligatoire) en illustration de l'intérêt de la notation exponentielle pour les nombres complexes.

Pour simplifier, elle peut être faite pour un nombre  $k$  particulier ( $k = 1$  par exemple) et le symbole de sommation peut être remplacé par une somme avec des pointillés.

Démonstration :

$$\text{On pose } Z = e^{i\frac{k\pi}{16}} + e^{i\frac{3k\pi}{16}} + \dots + e^{i\frac{15k\pi}{16}} = \sum_{n=0}^{n=7} e^{i(2n+1)\frac{k\pi}{16}}$$

Pour démontrer le lemme, il est équivalent de montrer que  $\text{Ré}(Z) = 0$ .

$$Z = \sum_{n=0}^{n=7} e^{i(2n+1)\frac{k\pi}{16}} = \sum_{n=0}^{n=7} e^{i \times 2n \times \frac{k\pi}{16}} \times e^{i\frac{k\pi}{16}} = e^{i\frac{k\pi}{16}} \times \sum_{n=0}^{n=7} e^{i\frac{nk\pi}{8}} = e^{i\frac{k\pi}{16}} \times \sum_{n=0}^{n=7} \left( e^{i\frac{k\pi}{8}} \right)^n$$

Si  $e^{i\frac{k\pi}{8}} \neq 1$  ( $k$  non multiple de 16) on reconnaît la somme des 8 premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison  $q = e^{i\frac{k\pi}{8}}$ . Alors :

$$Z = e^{i\frac{k\pi}{16}} \times \frac{1 - \left( e^{i\frac{k\pi}{8}} \right)^8}{1 - e^{i\frac{k\pi}{8}}} = e^{i\frac{k\pi}{16}} \times \frac{1 - e^{ik\pi}}{1 - e^{i\frac{k\pi}{8}}}$$

Procédons par disjonction de cas :

♦ si  $k$  est pair : alors  $e^{ik\pi} = 1$  donc  $Z = 0$  et il en résulte :  $\text{Ré}(Z) = 0$ .

♦ si  $k$  est impair : alors  $e^{ik\pi} = -1$  donc :

$$Z = e^{i\frac{k\pi}{16}} \times \frac{2}{1 - e^{i\frac{k\pi}{8}}} = \frac{2}{e^{-i\frac{k\pi}{16}}(1 - e^{i\frac{k\pi}{8}})} = \frac{2}{e^{-i\frac{k\pi}{16}} - e^{i\frac{k\pi}{16}}} = \frac{2}{-2i \sin \frac{k\pi}{16}} = \frac{i}{\sin \frac{k\pi}{16}}$$

Alors  $Z$  est un imaginaire pur donc  $\text{Ré}(Z) = 0$ .

$$e^{a+b} = e^a \times e^b$$

$$e^{na} = (e^a)^n$$

Pour tous nombres complexes  $a$  et  $b$  et tout entier relatif  $n$ .

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Pour tout entier naturel  $n$  et tout nombre complexe  $q \neq 1$ .

$$e^{ix} - e^{-ix}$$

$$= \cos x + i \sin x - (\cos x - i \sin x)$$

$$= 2i \sin x \quad \text{pour tout réel } x.$$

Rque : si  $k$  est un multiple de 16 alors la somme vaut 8 ou  $-8$ .  
 Dans le cas particulier où  $k = 0$ , elle vaut 8.

Prop : La matrice  $A$  décrite précédemment est orthogonale.

Démonstration :

On note  $C_k$  le vecteur qui forme la  $k$ -ième colonne de la matrice  $A$ .

$$C_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \dots \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} \text{ et } C_{k+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cos \frac{k\pi}{16} \\ \frac{1}{2} \cos \frac{3k\pi}{16} \\ \dots \\ \frac{1}{2} \cos \frac{15k\pi}{16} \end{pmatrix} \text{ pour } 1 \leq k \leq 7.$$

Pour montrer que  $A$  est orthogonale, il est équivalent de montrer que la famille des vecteurs colonnes  $(C_1, \dots, C_8)$  est orthonormée.

$$\diamond \langle C_1 | C_1 \rangle = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 8 \times \frac{2}{16} = 1$$

◆ Pour  $1 \leq k \leq 7$  :

$$\langle C_1 | C_{k+1} \rangle = \frac{\sqrt{2}}{4} \times \frac{1}{2} \cos \frac{k\pi}{16} + \frac{\sqrt{2}}{4} \times \frac{1}{2} \cos \frac{3k\pi}{16} + \dots + \frac{\sqrt{2}}{4} \times \frac{1}{2} \cos \frac{15k\pi}{16} = \frac{\sqrt{2}}{8} \left( \cos \frac{k\pi}{16} + \dots + \cos \frac{15k\pi}{16} \right) = 0$$

car  $k$  n'est pas multiple de 16.

◆ Pour  $1 \leq i \leq 7$  et  $1 \leq j \leq 7$  :

$$\langle C_{i+1} | C_{j+1} \rangle = \frac{1}{4} \left( \cos \frac{i\pi}{16} \times \cos \frac{j\pi}{16} + \cos \frac{3i\pi}{16} \times \cos \frac{3j\pi}{16} + \dots + \cos \frac{15i\pi}{16} \times \cos \frac{15j\pi}{16} \right)$$

$$\text{Or, pour tous réels } a \text{ et } b : \cos a \times \cos b = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$$

$$\langle C_{i+1} | C_{j+1} \rangle = \frac{1}{8} \left( \cos \frac{(i+j)\pi}{16} + \cos \frac{(i-j)\pi}{16} + \cos \frac{3(i+j)\pi}{16} + \cos \frac{3(i-j)\pi}{16} + \dots + \cos \frac{15(i+j)\pi}{16} + \cos \frac{15(i-j)\pi}{16} \right)$$

$$\langle C_{i+1} | C_{j+1} \rangle = \frac{1}{8} \left( \underbrace{\cos \frac{(i+j)\pi}{16} + \dots + \cos \frac{15(i+j)\pi}{16}}_{\substack{=0 \\ \text{car } 2 \leq i+j \leq 14 \\ \text{non multiple de 16}}} + \underbrace{\cos \frac{(i-j)\pi}{16} + \dots + \cos \frac{15(i-j)\pi}{16}}_{\substack{-6 \leq i-j \leq 6 \text{ donc} \\ \begin{cases} 0 \text{ si } i-j \neq 0 \\ 8 \text{ si } i-j=0 \end{cases}}} \right)$$

$$\langle C_{i+1} | C_{j+1} \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \frac{1}{8} \times 8 = 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Conclusion : la famille de vecteurs  $(C_1, \dots, C_8)$  est orthonormée donc la matrice  $A$  est orthogonale et  $A^{-1} = A^t$ .

On peut généraliser ce résultat pour tout  $N$  entier strictement positif.

## Annexe 4 : interprétation de la TCD

On rappelle le calcul de la TCD :

$$TCD(\bar{L}) = A^t \times \bar{L} \times A \text{ où } a_{ij} = \alpha(j) \cos\left(\frac{\pi(j-1)}{2N} \times (2i-1)\right)$$

$$\text{pour } 1 \leq i \leq N \text{ et } 1 \leq j \leq N \text{ avec } \alpha(j) = \begin{cases} \sqrt{1/N} & \text{si } j = 1 \\ \sqrt{2/N} & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $\bar{L}$  est une sous-matrice de taille  $N \times N$  de la matrice des luminances.

Dans le cas où  $N = 8$  :

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos \frac{\pi}{16} & \cos \frac{2\pi}{16} & \dots & \cos \frac{k\pi}{16} & \dots & \cos \frac{7\pi}{16} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos \frac{3\pi}{16} & \cos \frac{6\pi}{16} & \dots & \cos \frac{3k\pi}{16} & \dots & \cos \frac{21\pi}{16} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos \frac{5\pi}{16} & \cos \frac{10\pi}{16} & \dots & \cos \frac{5k\pi}{16} & \dots & \cos \frac{35\pi}{16} \\ \frac{2}{2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos \frac{15\pi}{16} & \cos \frac{30\pi}{16} & \dots & \cos \frac{15k\pi}{16} & \dots & \cos \frac{105\pi}{16} \end{pmatrix}$$

Si on note  $TCD(k; l)$  le nombre de la matrice  $TCD(\bar{L})$  positionné à la ligne  $k$  et à la colonne  $l$  et  $\bar{L}(i; j)$  le nombre de la matrice de luminance  $\bar{L}$  positionné à la ligne  $i$  et à la colonne  $j$ , on obtient :

$$TCD(k; l) = \alpha(k)\alpha(l) \sum_{i=1}^{i=8} \sum_{j=1}^{j=8} \bar{L}(i; j) \times \cos\left[\frac{\pi}{16}(k-1)(2i-1)\right] \times \cos\left[\frac{\pi}{16}(l-1)(2j-1)\right]$$

$$\text{où } \alpha(k) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ si } k = 1, \frac{1}{2} \text{ sinon}$$

### Mais d'où vient cette formule ?

#### Rappels séries de Fourier :

On considère une fonction  $f$  périodique de période  $T$  sous certaines conditions d'intégrabilité. Alors :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n e^{i \times \frac{2\pi n t}{T}} \text{ où } C_n = \frac{1}{T} \int_{\text{période } T} f(t) e^{-i \times \frac{2\pi n t}{T}} dt.$$

Si la fonction  $f$  est réelle et paire, alors :

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=+\infty} A_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \text{ où } A_n = \frac{2}{T} \int_{\text{période } T} f(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt = C_n + C_{-n} = 2C_n \text{ pour } n \geq 0.$$

*Rq*ue : le nombre  $\frac{A_0}{2} = C_0 = \frac{1}{T} \int_{\text{période } T} f(t) dt$  est la valeur moyenne de la fonction sur une période.

### Que faire si $f$ n'est pas périodique ?

Par exemple, on considère une fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0; p]$ . On peut la faire coïncider sur cet intervalle avec une fonction  $\tilde{f}$  périodique définie sur  $\mathbb{R}$  et de période  $T \geq p$ .

Si on veut une série de Fourier avec uniquement des cosinus, il suffit de prolonger la fonction  $f$  par  $\tilde{f}(x) = f(-x)$  sur  $[-p; 0]$  pour la rendre paire puis de rendre le tout périodique de période  $T = 2p$ .

Alors la fonction  $f$  et la série de Fourier liée à  $\tilde{f}$  coïncident sur tout l'intervalle  $[0; p]$ .

On obtient :

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=+\infty} A_n \cos\left(\frac{\pi n t}{p}\right) \text{ où } A_n = \frac{2}{2p} \int_{-p}^p f(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{2p}\right) dt = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \cos\left(\frac{\pi n t}{p}\right) dt.$$

## Que faire si la fonction $f$ est discrète ?

On suppose que la fonction  $f$  prend  $N$  valeurs  $f(0), f(1), \dots, f(N-1)$ .

Si on la remplace par une fonction "en escalier"  $\bar{f}$  telle que  $\bar{f}(t) = f(E(t))$  pour  $t \in [0; N[$ , on peut appliquer le procédé précédent sur  $\bar{f}$  (prolongement par parité puis périodicité avec  $p = N$ ).

Alors, pour  $x$  entier compris entre 0 et  $N-1$  :  $f(x) = \bar{f}(t)$  pour tout réel  $t$  de l'intervalle  $[x; x+1[$  et en choisissant

$$t = x + \frac{1}{2} = \frac{2x+1}{2} \quad \text{on obtient la formule : } f(x) = \bar{f}\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos\left(\frac{\pi n(2x+1)}{2N}\right) \quad (1).$$

Pour le calcul des coefficients  $A_n$ , on utilise la relation de Chasles sur les intervalles  $[0; 1[$ ,  $[1; 2[$ , ...,  $[N-1; N[$  :

$$A_n = \frac{2}{N} \int_0^N \bar{f}(t) \cos\left(\frac{\pi n t}{N}\right) dt = \frac{2}{N} \times \sum_{k=0}^{k=N-1} f(k) \int_k^{k+1} \cos\left(\frac{\pi n t}{N}\right) dt$$

Pour comprendre la formule de la TCD, on peut imaginer la méthode suivante (bien qu'approximative) : on choisit d'approcher l'intégrale entre  $k$  et  $k+1$  par la valeur obtenue en  $t = k + \frac{1}{2} = \frac{2k+1}{2}$  (méthode des rectangles avec une somme de Riemann utilisant les milieux). On obtient :

$$A_n \approx \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{k=N-1} f(k) \cos\left(\frac{\pi n \times (2k+1)}{2N}\right) \quad \text{et alors } f(x) \approx \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{k=N-1} f(k) + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos\left(\frac{\pi n(2x+1)}{2N}\right) \quad (1).$$

*Rq :* On reconnaît à nouveau la valeur moyenne de la fonction  $f$  dans le premier terme de la série (1).

Chaque coefficient  $A_n$  s'écrit donc à l'aide d'une base de  $N$  cosinus :  $\left(\cos\left(\frac{\pi n(2k+1)}{2N}\right)\right)_{k \in [0; N[}$  dépendant de  $n$ .

Pour ne garder que  $N$  bases différentes, pallier d'éventuels problèmes de convergence de la série et pour que la méthode d'approximation par une somme de Riemann soit réaliste (normalement les variations du cosinus doivent être faibles, ce qui n'est plus le cas quand  $n$  est proche de  $N$ ), on choisit de tronquer la série (1) :

$$f(x) \approx \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{k=N-1} f(k) + \sum_{n=1}^{n=N-1} A_n \cos\left(\frac{\pi n(2x+1)}{2N}\right) \quad (1').$$

Et afin de normaliser l'ensemble (et obtenir ainsi une matrice de passage orthonormée formée des  $N$  vecteurs de base : cf. [annexe 3](#)), on change un peu les coefficients  $A_n$  en posant :

$$\alpha(0) = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad \text{et} \quad \alpha(n) = \sqrt{\frac{2}{N}} \quad \text{pour } 1 \leq n \leq N-1, \quad \text{puis} \quad A_n' = \alpha(n) \sum_{k=0}^{k=N-1} f(k) \cos\left(\frac{\pi n(2k+1)}{2N}\right).$$

Alors on obtient :

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{n=N-1} \alpha(n) A_n' \cos\left(\frac{\pi n(2x+1)}{2N}\right) \quad (1')$$

Les coefficients  $A_n'$  sont liés à l'analyse fréquentielle de la fonction  $f$ , ils donnent  $N$  nombres qui sont la TCD de  $f$ . Puis on reconstitue la fonction  $f$  à partir de ces coefficients et de la base de cosinus choisie, on dit qu'on inverse la TCD.

D'où les formules trouvées dans la littérature pour la TCD à 1 dimension, si on note  $A_n' = F(n)$  :

$$TCD(f) : \quad F(n) = \alpha(n) \sum_{k=0}^{k=N-1} f(k) \cos\left(\frac{\pi n(2k+1)}{2N}\right) \quad \text{pour } 0 \leq n \leq N-1$$

$$\text{Inverse de la TCD : } \quad f(k) = \sum_{n=0}^{n=N-1} \alpha(n) F(n) \cos\left(\frac{\pi n(2k+1)}{2N}\right) \quad \text{pour } 0 \leq k \leq N-1$$

*Rque* : Les égalités écrites sont exactes malgré la troncature de la série (1) car la matrice de passage ainsi obtenue avec la base de cosinus et après normalisation est orthogonale donc les formules sont totalement réversibles et symétriques (cf. annexe 3).

### Application à une ligne de pixels : TCD à 1 dimension (approche expérimentale)

On considère la fonction discrète  $f$  qui donne la luminance d'une ligne de 8 pixels numérotés de 0 à 7 : on a 8 valeurs comprises entre 0 et 255 pour 8 niveaux de gris différents.  
Le but de la compression est de réduire le nombre d'informations mais on ne peut pas faire sauter des pixels ...

On fait donc l'analyse fréquentielle des 8 nombres : le premier coefficient  $A_0 = F(0)$  est proportionnel à la luminance moyenne des pixels (donc à la somme des luminances) puis les autres coefficients répartissent les disparités des niveaux de gris selon les différentes fréquences.

Pour le calcul, on considère le vecteur ligne  $L$  donnant les luminances des 8 pixels, alors on a  $TCD(L) = L \times A$  où :

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos \frac{\pi}{16} & \cos \frac{2\pi}{16} & \dots & \cos \frac{k\pi}{16} & \dots & \cos \frac{7\pi}{16} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos \frac{3\pi}{16} & \cos \frac{6\pi}{16} & \dots & \cos \frac{3k\pi}{16} & \dots & \cos \frac{21\pi}{16} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos \frac{5\pi}{16} & \cos \frac{10\pi}{16} & \dots & \cos \frac{5k\pi}{16} & \dots & \cos \frac{35\pi}{16} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos \frac{15\pi}{16} & \cos \frac{30\pi}{16} & \dots & \cos \frac{15k\pi}{16} & \dots & \cos \frac{105\pi}{16} \end{pmatrix}$$

$A$  est une matrice orthogonale (cf. annexe 3) puisqu'on a normalisé les 8 bases (pour  $0 \leq n \leq 7$ ) formées des cosinus  $\left( \cos \left( \frac{\pi n(2k+1)}{16} \right) \right)_{k \in [0;8[}$  avec le paramètre  $\alpha$ .

Voici différents exemples de TCD :

ligne luminance	fonction $f$ associée	ligne TCD obtenue
(30 30 30 30 30 30 30 30)	$f(k) = 30$	(84,85 0 0 0 0 0 0 0)
(15 40 65 90 115 140 165 190)	$f(k) = 25k + 15$	(289,91 -161,06 0 -16,84 0 -5,02 0 -1,27)
(0 3 16 39 72 115 168 231)	$f(k) = 5k^2 - 2k$	(227,69 -212,60 63,09 -22,22 14,14 -6,63 4,48 -1,67)
(220 103 57 90 2 108 13 112)	aléatoire	(249,26 84,80 101,49 36,69 50,56 17,48 68,56 -78,82)

On observe que plus la corrélation entre les valeurs est forte plus les basses fréquences ont un impact : les nombres sont de plus petits dans la ligne TCD (cela est encore plus vrai si les variations entre nombres consécutifs sont faibles). Par contre dans le cas de 8 nombres générés de façon aléatoire (absence de corrélation), les hautes fréquences peuvent ressortir autant que les faibles.

Dans le cas d'une image, une ligne de 8 pixels présentera des variations faibles en luminosité, à moins de contenir un contour. On pourra donc quantifier la compression (avec la matrice de quantification) de façon à garder principalement les basses fréquences sans réelle perte d'information.

### Application en dimension 2

Pour compresser une image on aurait donc pu procéder ligne par ligne en réglant la longueur des lignes (lignes de 8 valeurs par exemple). On choisit plutôt de "mixer" les lignes et les colonnes en travaillant sur des matrices 8x8 (le choix de ce format est dû à la volonté de réduire les calculs et le temps de compression).

D'où la formule (en numérotant les pixels de 1 à 8 et non de 0 à 7) :

$$TCD(k; l) = \alpha(k)\alpha(l) \sum_{i=1}^{i=8} \sum_{j=1}^{j=8} \bar{L}(i; j) \times \cos \left[ \frac{\pi}{16} (k-1)(2i-1) \right] \times \cos \left[ \frac{\pi}{16} (l-1)(2j-1) \right]$$

$$\text{pour } 1 \leq k \leq 8 \text{ et } 1 \leq l \leq 8 \text{ et où } \alpha(k) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2}} & \text{si } k = 1 \\ \frac{1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Que l'on peut écrire :  $TCD(\bar{L}) = A^t \bar{L} A$ .

Le produit  $\bar{L}A$  correspond à la TCD à une dimension ligne par ligne sur les 8 lignes de la matrice  $\bar{L}$ . On effectue ensuite la TCD à une dimension sur les colonnes du résultat en multipliant par  $A^t$  : on joue donc sur la corrélation des valeurs de luminance en ligne et en colonne ce qui améliore grandement le procédé.

Du point de vue mathématique, la TCD correspond à un changement de base (où  $A$  est la matrice de passage).

On passe d'une matrice de luminances basée sur la position des pixels à une matrice TCD basée sur l'analyse spectrale des luminances (c'est-à-dire qu'on obtient les coefficients harmoniques dans la base de cosinus choisie).

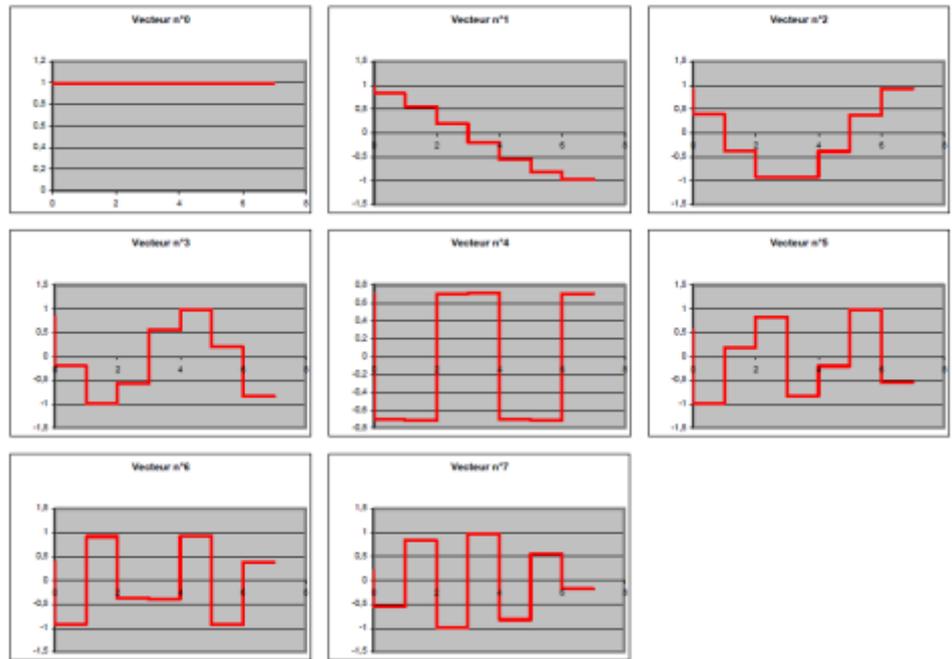
*Remarque :*

On appelle vecteur  $n$  ( $0 \leq n \leq 7$ ) la base de 8 cosinus liée au coefficient  $F(n)$ .

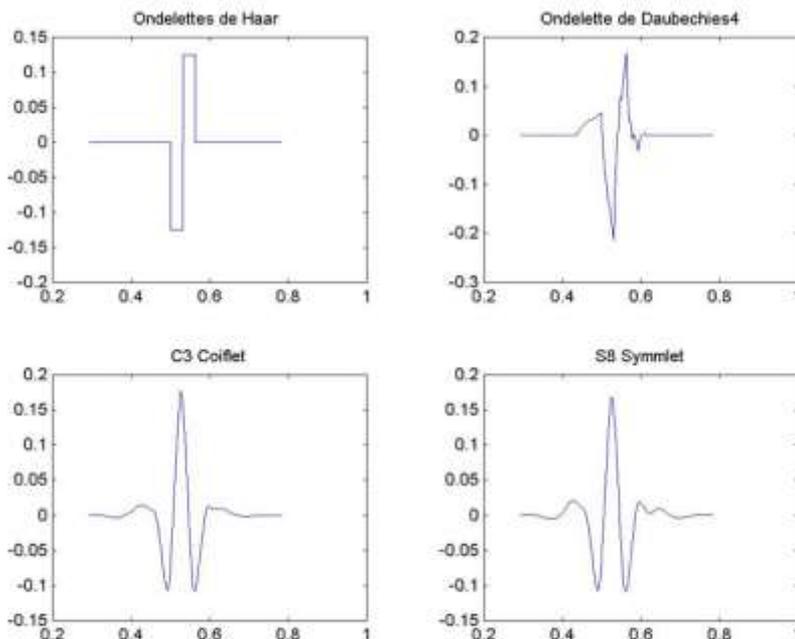
Pour chaque vecteur, on peut représenter les valeurs des 8 cosinus par la fonction en escalier reliant les points de la sinusoïde d'équation :

$$y = \cos\left(\frac{n\pi(2x + 1)}{16}\right)$$

pour  $x$  entier entre 0 et 7.



La compression présentée ici s'appuie sur l'expression du signal dans ces bases de cosinus. D'autres types de compressions plus récents et plus performants (ex : JPEG 2000) s'appuient sur les ondelettes et donc utilisent d'autres bases.



Sources :

<http://www.univ-sba.dz/fsi/lmd/Math3/Cours-seriesFourier.pdf>

<http://www.pierreaudibert.fr/tra/Compressionimage.pdf>

<http://www.chireux.fr/mp/cours/Compression JPEG.pdf>

## Annexe 5 : documents processing

À la fin du diaporama, des exemples sur des images (comportant plus de 4 pixels ...) sont donnés.

La compression a été principalement faite sur la matrice de luminance, les matrices de chrominances ayant été laissées intactes (pas de sous-échantillonnage).

Le taux de compression proposé correspond à l'étape de quantification faite sur le modèle de l'activité : on divise chaque coefficient  $TCD(i ; j)$  par  $1 + k(i + j - 1)$  et on arrondit à l'entier le plus proche.

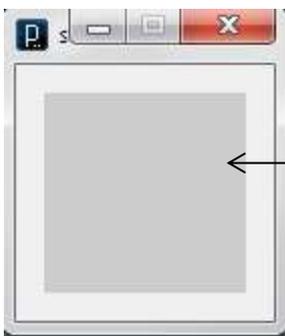
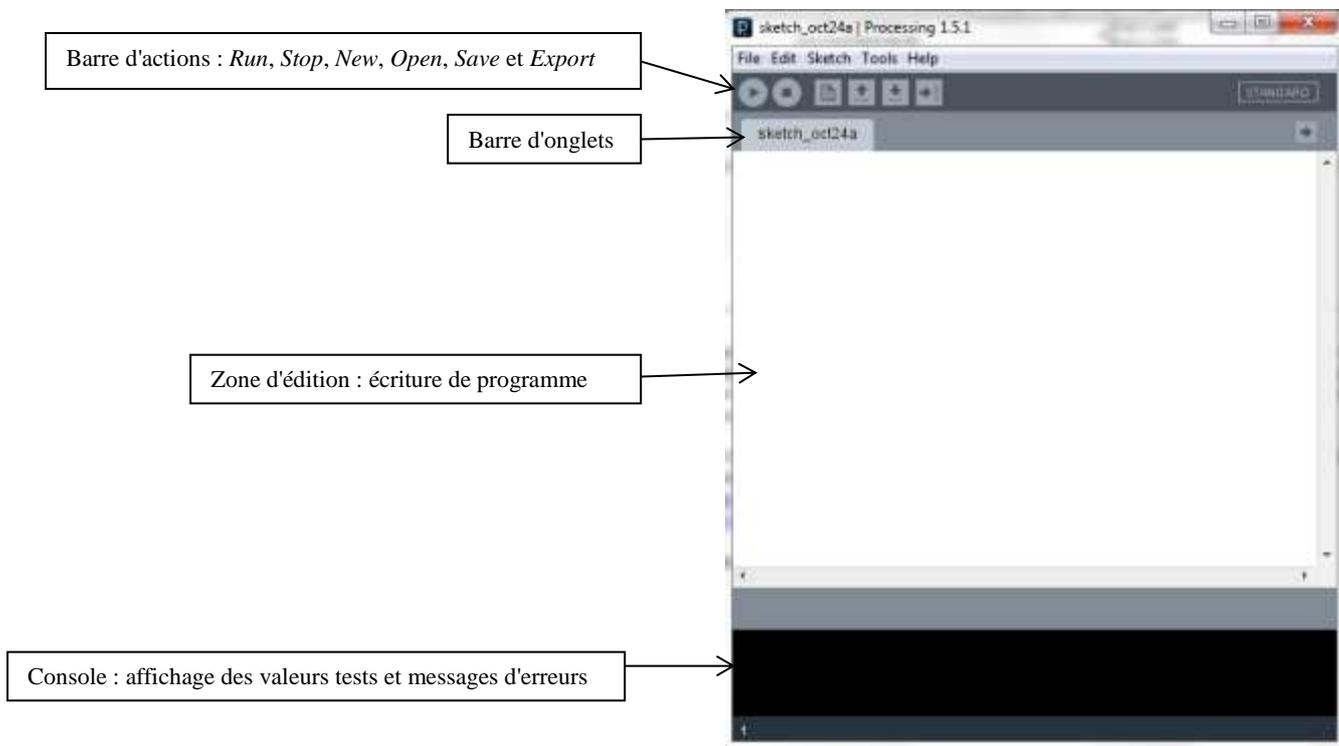
Les exemples ont été programmés avec le logiciel libre Processing qui permet de dessiner, créer des animations et travailler sur des images avec du code informatique. Pour plus de renseignements (et tutoriels), nous conseillons les sites suivants :

<https://fr.flossmanuals.net/processing/introduction/>

<http://www.ecole-art-aix.fr/rubrique81.html>

On peut se contenter des images du diaporama, où montrer aux élèves les effets de la compression en utilisant les fichiers processing.

Après téléchargement du logiciel, l'exécution du logiciel ouvre une première fenêtre qui se présente ainsi :



Espace de dessin : fenêtre qui s'ouvre lorsqu'on appuie sur le bouton *Run*

## Fichier compression\_jpeg\_02 :



Explications :

Matrice couleur originale : image de départ (il y a 8 images possibles numérotées de 0 à 7, sélection avec les flèches gauche et droite).



Matrice luminance originale : niveaux de gris des pixels, matrices  $\tilde{L}$  traitées par blocs de  $8 \times 8$ .

Matrices chrominances M et N originales : matrices  $M$  et  $N$  où les nombres sont représentés en niveaux de gris (on remarque les grandes zones de niveaux de gris quasi équivalents et que l'on pourrait donc sous-échantillonner, ce qui ne sera pas fait ici).

Matrice luminance JPEG : matrice obtenue après application de la TCD et de la quantification sur les matrices  $\tilde{L}$  en  $8 \times 8$  (le coefficient de compression utilisé dans la quantification varie de 0 à 100 avec les flèches bas et haut du clavier) puis décompression.

Matrice couleur JPEG : matrice précédente à laquelle on a rajouté les matrices de chrominances originales.

Partie ZOOM : elle permet d'obtenir le zoom d'une partie de l'image où se trouve la souris, on peut ainsi mieux regarder les différences entre l'image d'origine et la matrice couleur JPEG finale.

Plus le taux de compression est élevé, et plus on voit apparaître les carrés  $8 \times 8$  dans la matrice finale (effets de bord).

## Fichier compression\_jpeg\_03 :

Matrice luminance originale

28	158	252	164	18	69	183	216
93	233	254	200	38	30	154	215
141	251	254	185	29	3	118	216
168	254	250	124	3	0	91	205
144	254	190	52	2	0	65	194
48	125	73	17	13	0	45	180
1	6	5	21	24	0	31	165
0	0	6	30	25	1	20	140

Matrice luminance JPEG

43	144	244	184	38	37	159	235
101	186	258	184	36	29	145	224
168	227	261	170	30	15	123	210
186	225	228	136	18	2	100	197
144	173	162	89	8	-6	78	182
70	99	91	48	7	-7	58	163
5	40	40	25	15	-5	39	141
-29	10	17	18	23	-2	27	125

Matrice TCD

taux de compression : 10

Matrice erreur

-14	13	8	-19	-20	31	23	-18
-7	47	-4	16	1	1	8	-9
-26	24	-6	15	0	-11	-4	5
-18	29	22	-12	-14	-2	-8	8
0	81	28	-36	-6	5	-13	11
-22	25	-18	-31	6	6	-12	16
-4	-33	-34	-3	8	4	-7	24
28	-10	-10	12	1	2	-6	14

Matrice couleur JPEG

Explications :

Ce fichier a une exécution plus rapide que le précédent.

Même principe : 6 images possibles sélectionnables avec les flèches gauche et droite, taux de compression (dans la quantification) allant de 0 à 100, sélectionnable avec les flèches bas et haut.



Dans ce fichier, on peut zoomer sur un carré de 64 pixels dans l'image d'origine grâce aux flèches du pavé numérique : chiffres 2, 6, 8 et 4. Le carré apparaît dans la zone liée.

En-dessous est reportée la matrice de luminance originale avec, à sa gauche, l'image correspondante en niveaux de gris, et à sa droite apparaît la matrice obtenue après TCD et quantification : on voit bien apparaître de plus en plus de 0 à mesure que l'on se rapproche des hautes fréquences (coin en bas à droite). C'est d'autant plus visible si le taux de compression est élevé.

La matrice en bas à gauche représente le résultat obtenu après décompression avec à sa gauche l'image correspondante en niveaux de gris et en-dessous l'image reconstituée en couleur avec les chrominances qui ont été gardées intactes.

Enfin, en bas à droite, on a fait calculé la matrice d'erreur qui donne les écarts entre la matrice de luminance d'origine et la matrice de luminance JPEG.