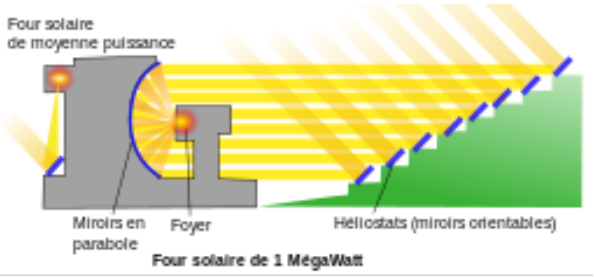
Fonctionnement des fours solaires de Mont-Louis et d'Odeillo

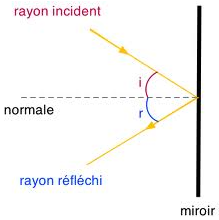
Des miroirs orientables réfléchissent les rayons du soleil pour les envoyer sur une deuxième série de miroirs, et de là ils convergent vers une cible située au sommet d'une tour centrale.

Le plus puissant des fours solaires est celui d'Odeillo qui permet d'atteindre des températures supérieures à 3000°C. Le premier four solaire (à double réflexion) a été construit à Mont-Louis en 1949, et est utilisé actuellement entre autres pour cuire des objets en céramique.

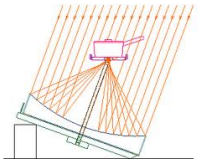


Rappel de la loi de la réflexion

Le rayon réfléchi est le symétrique du rayon incident par rapport à la normale du miroir :



L'objectif de l'exercice est de déterminer une courbe qui réfléchit des rayons parallèles en un unique point O donné.



1. Résolution graphique : tracé approché de la courbe

   On munit le plan d'un repère $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. On suppose que les rayons incidents sont parallèles à l'axe des ordonnées.

   (a) Tracer les droites (D_i), d'équation $x = i$, pour tout i entier relatif compris entre -7 et 7.

   (b) Soit M_7 le point de coordonnées $(7\,;\,5)$. Tracer un miroir de façon à ce que le rayon incident passant par M_7 se réfléchisse en un rayon passant par O. Préciser la méthode de construction.

   (c) On suppose que la courbe et le miroir sont confondus entre les droites (D_7) et (D_6). Placer le point M_6 d'intersection de la courbe et de la droite D_6.

   (d) Tracer un nouveau miroir de façon à ce que le rayon incident passant par M_6 se réfléchisse en un rayon passant par O.

   (e) De proche en proche, tracer une courbe qui réfléchit les rayons incidents en des rayons passant par O.

   (f) La courbe obtenue vous évoque-t-elle une courbe connue ?

2. Équation différentielle associée

   On note f la fonction associée à la courbe cherchée (celle qui réfléchit tous les rayons incidents en des rayons passant par O).

   (a) Dans un nouveau repère $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, placer un point $M(x;y)$. On suppose toujours que les rayons incidents sont parallèles à l'axe des ordonnées, construire le miroir associé à M. On note (T) la droite sur laquelle est placé le miroir : c'est en fait la tangente à la courbe cherchée.

   (b) La droite parallèle à (T) et qui passe par O coupe le rayon incident passant par M en un point K. Montrer que le triangle OMK est isocèle en M.

   (c) Exprimer les coordonnées de K en fonction de x et y.

   (d) Déduire des questions précédentes l'expression de $f'(x)$ en fonction de x et de $f(x)$.

   (e) Donner l'équation différentielle vérifiée par f, avec la condition initiale. Quel est le type de cette équation différentielle ?

3. Une courbe solution

   On suppose que f est une fonction du second degré.

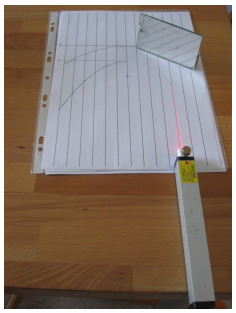
   (a) Donner l'expression de $f(x)$ en utilisant la question 1 (par lecture graphique, en assimilant la courbe obtenue à une parabole).

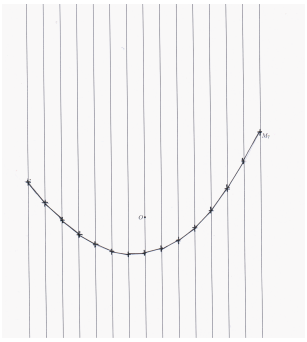
   (b) Déterminer l'expression de $f(x)$ en utilisant l'équation différentielle de la question 2 (en cherchant les solutions de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$).

Ce devoir a été donné en 2012-2013 en première année d'université, dans le cadre d'un cours d'analyse. L'objectif est de résoudre un problème en utilisant une équation différentielle. Il s'agit de déterminer l'équation d'une courbe, de la forme $y = f(x)$, où la fonction f est connue à travers une relation liant x, $f(x)$ et $f'(x)$.

Le problème est illustré « dans l'espace », à travers les fours solaires, mais il s'agit en réalité de résoudre un problème dans le plan. On ne cherche pas une surface réfléchissante, mais une courbe.

Pour s'approprier le problème, les étudiants ont d'abord manipulé en classe avec un laser et un miroir réfléchissant (voir le document élève pour la manipulation, page 4 de ce document).
On positionne le miroir en M_7 de façon à ce que le rayon passe par le point O après réflexion ; on trace alors un « morceau de la courbe » le long du miroir, jusqu'au rayon suivant, etc...
On obtient ainsi, pas à pas, une ligne brisée. Elle peut faire penser à une parabole.





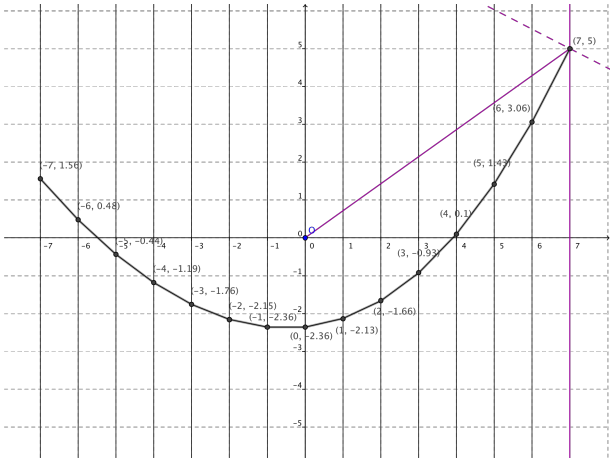
1. Résolution graphique : tracé approché de la courbe

Le tracé se fait sur le même principe que lors de la manipulation, sauf que les outils ne sont plus un laser et un miroir, mais une règle et un compas, et que l'on utilise la loi de la réflexion.

On peut tracer la bissectrice intérieure de l'angle formé par le rayon et la demi-droite $[M_7O)$ (en pointillés sur la figure), puis la perpendiculaire à celle-ci (c'est-à-dire la bissectrice extérieure) pour représenter le miroir.

La construction se fait ensuite pas à pas comme précédemment.

Elle peut se faire en utilisant le logiciel Geogebra.



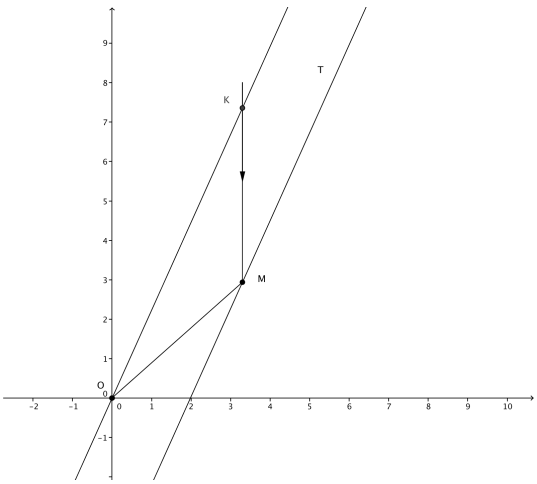
2. Équation différentielle associée

La droite (T) est perpendiculaire à la bissectrice (intérieure) de l'angle $\widehat{OMK}$ par construction. La droite (OK) étant parallèle à (T), la bissectrice est aussi perpendiculaire à (OK), et donc aussi hauteur du triangle OMK. Le triangle OMK est donc isocèle en M.

On a $x_K = x_M$ et $y_K = y_M + KM$, et comme $KM = OM$, on a $K\left(x, y + \sqrt{x^2+y^2}\right)$

$f'(x)$ est le coefficient directeur de la droite (T), c'est donc aussi le coefficient directeur de la droite (OK), d'où :

$$f'(x) = \frac{y_K - y_O}{x_K - x_O} \text{ soit } \boxed{f'(x) = \frac{y + \sqrt{x^2+y^2}}{x}}$$



Cette égalité est définie sur un intervalle où $x \neq 0$, par exemple sur l'intervalle $]0;+\infty[$. Cela vient du fait que pour $x = 0$, c'est-à-dire pour un point M pour lequel le rayon passerait par O avant de se réfléchir en M (pour revenir en M), la droite (OK) n'a pas de coefficient directeur. Dans ce cas, la tangente à la courbe doit être parallèle à l'axe des abscisses, et l'on doit donc avoir $f'(0) = 0$.

la fonction f cherchée est donc une solution sur $]-\infty\ ;\ 0[$ ou sur $]0\ ;\ +\infty[$ de l'équation différentielle (E) : $xy' = y + \sqrt{x^2+y^2}$. Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre, non linéaire.

3. Une courbe solution

La résolution de l'équation différentielle n'était pas demandée aux étudiants. Néanmoins elle peut se faire avec les connaissances du premier semestre de première année de Licence. Ce sera l'objet du paragraphe 4.

Dans ce devoir, on se contente de chercher des solutions sous la forme de fonctions polynômes du second degré.

(a) Graphiquement

On admet que la courbe est une parabole, donc son équation est de la forme $y = a(x-\alpha)^2 + \beta$, où (α, β) sont les coordonnées du sommet, et a peut se déterminer sachant que la parabole passe par le point M_7 de coordonnées $(7\ ;\ 5)$. En prenant $S(0\ ;\ -2)$ pour le sommet, on obtient $y = \frac{1}{7}x^2 - 2$.

(b) Par le calcul

– On admet que la solution cherchée est de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, (avec $a \neq 0$), d'où $f'(x) = 2ax + b$.
On traduit le fait que f est solution de l'équation différentielle $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$x(2ax+b) - (ax^2+bx+c) = \sqrt{x^2 + (ax^2+bx+c)^2}$$
$$ax^2 - c = \sqrt{x^2 + (ax^2+bx+c)^2}$$

On élève au carré : $a^2x^4 - 2acx^2 + c^2 = a^2x^4 + 2abx^3 + (1 + b^2 + 2ac)x^2 + 2bcx + c^2$, soit :

$$-2acx^2 = 2abx^3 + (1 + b^2 + 2ac)x^2 + 2bcx$$

Par identification des coefficients des deux membres, comme $a \neq 0$, on a $b = 0$, puis $c = -\frac{1}{4a}$.

On peut vérifier que réciproquement, toute fonction de la forme $f(x) = ax^2 - \frac{1}{4a}$ est solution de (E).

– Pour répondre au problème, on cherche une fonction f telle que $f(7) = 5$: $49a - \frac{1}{4a} = 5$. On trouve deux valeurs possibles pour a, l'une positive, l'autre négative. Comme les rayons lumineux étaient orientés dans le sens contraire de (Oy), la parabole est « tournée vers le haut », et donc $a > 0$.
On trouve $a = \frac{5 + \sqrt{74}}{98} \approx 0,139$.

4. Résolution de l'équation différentielle

(a) Déterminons les solutions de l'équation différentielle (E_1) : $y' = \frac{y + \sqrt{x^2+y^2}}{x}$, sur l'intervalle $]0; +\infty[$ ou sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0[$.

Avec le changement de variable $z = \frac{y}{x}$, y est solution de $(E_1) \Leftrightarrow z$ solution de (E_2) : $\frac{z'}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{1}{|x|}$.

– Sur $]0; +\infty[$, $(E_2) \Leftrightarrow \text{argsh}(z) = \ln(x) + C, (C \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow z = \text{sh}\left(\ln(x) + C\right), (C \in \mathbb{R})$

Sachant que $\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, on trouve $z = \frac{1}{2}\left(xe^C - \frac{1}{xe^C}\right)$, puis $y = xz = \frac{1}{2}\left(x^2e^C - \frac{1}{e^C}\right)$.

En posant $k = \frac{e^C}{2}$, les solutions de (E_1) sont donc les fonctions de la forme : $\boxed{y = kx^2 - \frac{1}{4k}, k \in \mathbb{R}_+^\star}$

– Sur $]-\infty\ ;\ 0[$, $(E_2) \Leftrightarrow \text{argsh}(z) = -\ln(-x) + C, (C \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow z = \text{sh}\left(-\ln(-x) + C\right), (C \in \mathbb{R})$

On trouve $z = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{e^C} - \frac{e^C}{x}\right)$, puis $y = xz = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{e^C} - e^C\right)$.

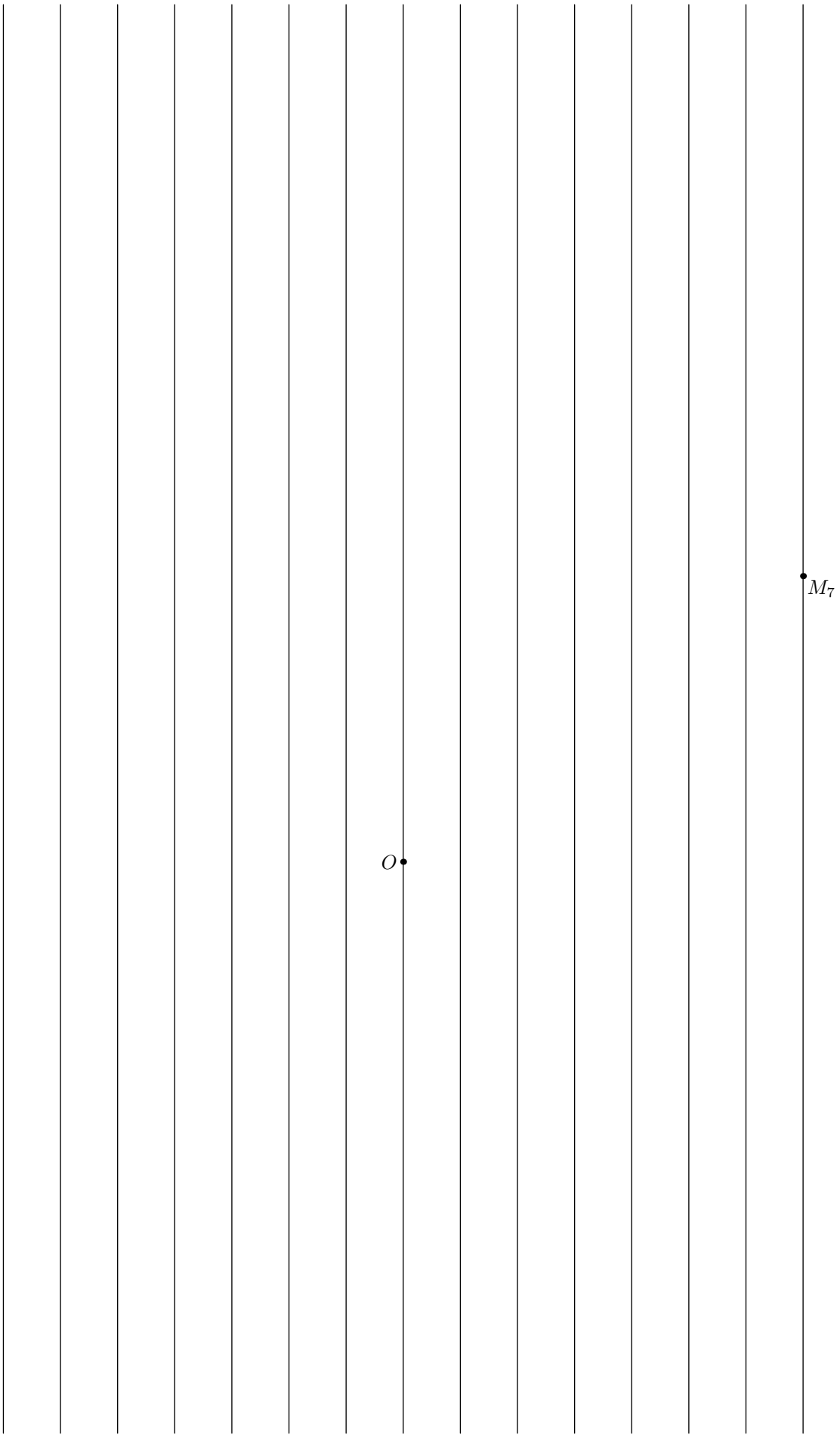
En posant $k = \frac{1}{2e^C}$, les solutions de (E_1) sont donc les fonctions de la forme : $\boxed{y = kx^2 - \frac{1}{4k}, k \in \mathbb{R}_+^\star}$

Remarque : les solutions définies sur $]0; +\infty[$ ou sur $]-\infty\ ;\ 0[$ peuvent se prolonger en 0 en posant $y(0) = -\frac{1}{4k}$, on a alors bien $y'(0) = 0$.

(b) Avec une condition initiale $(x_0; y_0)$

On calcule le paramètre k en résolvant l'équation : $y_0 = kx_0^2 - \frac{1}{4k}$, qui équivaut à $4k^2x_0^2 - 4ky_0 - 1 = 0$.
Il s'agit d'une équation du second degré, de discriminant strictement positif, donc avec deux racines réelles, dont l'une est positive et l'autre négative (en effet, le produit des racines est égal à $\frac{-1}{4k^2}$ qui est négatif).
Le paramètre k que nous cherchons est positif, il y a une solution unique.

Remarque : la solution négative de k donne une parabole « tournée dans l'autre sens », qui correspondrait à l'objet pour des rayons lumineux orientés dans le même sens que l'axe (Oy)


M_7
O