PALAIS DE LA DÉCOUVERTE

Activités de découverte en mathématiques

Mathématiciens en herbes

(jeux et casse- têtes destinés à des élèves de CM2 . . .et au-dessus)

par Jean BRETTE
Département de Mathématiques et Informatique

Il n'y a plus des problèmes résolus et d'autres qui ne le sont pas, il y a seulement des problèmes plus ou moins bien résolus.

Henri Poincaré.

On demandait à John Cage:
- Mais pourquoi appeler "musique" ce que vous

faites?
- Quand je dis que c'est de la peinture, personne ne me croit!

Juillet 1991

le sommaire

le contexte

Fin 1987, Michel Hulin, alors Directeur du Palais, initialisa deux actions en direction des très jeunes enfants. En effet, jusque là, les différentes activités proposées par le Palais dans ses salles permanentes s'adressaient essentiellement à des élèves de 13 ans et plus (y compris des actions comme le Club Jean Perrin, créé au début des années 70, et qui regroupait une quinzaine d'enfants par section et par an).

La première idée était d'essayer de mettre au point des "manips" simples et spectaculaires, notamment en physique et en biologie, permettant aux enfants de prendre conscience, corporellement, sensitivement, de quelques principes fondamentaux en mécanique, acoustique, etc. : cela a donné lieu à la réalisation des salles "EUREKA".

La seconde idée consistait à étudier la possibilité d'animations plus ciblées en physique, chimie, maths, à mettre en œuvre avec de petits groupes d'élèves, disons une demi- classe de CM2 à 6ème, 5ème, au rythme d'une quinzaine par an.

le texte

Le texte qui suit est issu d'une première proposition dans ce sens, en maths, et en Février 88. Il répond à une demande de certains enseignants (ayant participé depuis à ces activités avec leurs élèves ou en ayant simplement appris l'existence).

Dans le texte initial, les problèmes étaient disjoints des solutions, qui étaient renvoyées à la fin. J'ai choisi ici le parti- pris opposé en faisant suivre chaque problème de sa solution et de son exploitation avec les enfants...mais le lecteur est vivement invité à chercher avant de poursuivre.

Au fil de l'expérience, qui commença en novembre 1988, certains de ces problèmes ont été abandonnés. En particulier, certains des casse- têtes envisagés à l'époque se sont révélés difficiles à gérer, pour des raisons diverses, qui seront abordées. Je les mentionne cependant car il me semble que certains pourraient s'insérer dans une activité "au long cours", en classe, ou dans des clubs de math.

Par ailleurs, les solutions sont présentées sous forme de dialogues, un peu "réécrits" bien sûr : les réactions ne sont pas homogènes, ni chez les enfants ni chez moi, et il est difficile de rendre compte de cette diversité, des surprises des enfants devant leurs propres performances, de leur enthousiasme.. ou de leur lassitude.

Ces dialogues, assez fidèles, sont, ou paraissent, un peu longs (pour l'auteur aussi!) mais ils répondent à une préoccupation des enseignants eux-mêmes : certains élèves d'écoles normales d'instituteurs, par exemple, à qui j'avais essayé de faire "jouer le jeu", mais sans rentrer tout à fait dans celui des enfants (et comment faire?), trouvèrent les activités intéressantes, se piquèrent même au jeu, mais avec un petit doute : "comment puis-je faire avec mes élèves ?".

La question dépend trop des élèves, des enseignants et de leurs rapports mutuels pour que je

prétende y répondre. Je propose simplement ici une exploitation possible, étayée par l'expérience d'une quarantaine de classes, et qui me semble approcher certains comportements ou démarches caractéristiques d'une activité proprement "mathématique".
Pour le reste, chacun fait ce qu'il veut, selon sa sensibilité propre.

faire des maths

Faire des maths consiste, essentiellement, à se poser des problèmes et éventuellement, à les résoudre. Ces problèmes peuvent avoir des origines très diverses : ils peuvent provenir du monde qui nous entoure (technique, physique, astronomie, etc.) et ils ont en général des applications pratiques; ils peuvent aussi provenir des maths elles-mêmes. Il s'agit alors de désir de connaissance, de curiosité, et les applications pratiques, quand il y en a, sont plus difficiles à déceler. Par exemple, je ne connais, à ce jour, aucune application pratique du fait qu'il existe une infinité de nombres premiers, et je n'ai pas le sentiment que cela risque de changer avant longtemps, mais cela m'est quand même très agréable de le savoir.
Quant à "résoudre" un problème, là encore, c'est selon : un problème peut avoir de nombreuses solutions, ou une seule, ou pas du tout, et il ne s'agit pas seulement de "comprendre ce qui se passe" mais aussi d'apporter la preuve que ce que l'on a compris est vrai. C'est le rôle de la démonstration. Ainsi, par exemple, il y a une différence, à faire toucher du doigt, entre "je n'ai pas trouvé de solution" et " je peux démontrer qu'il ne peut pas y en avoir".
L'activité mathématique comporte donc plusieurs étapes, en général imbriquées. Pour l'essentiel :

1) prendre conscience qu'il existe un problème (mathématique! je connais des tas de problèmes qui apparemment ne peuvent pas se résoudre mathématiquement).
2) formuler ce problème, c'est à dire préciser ce que l'on cherche, si toutefois on le sait dès le début (la formulation peut d'ailleurs évoluer en cours de route).
3) comprendre, (plus ou moins bien ... et si possible bien) ce qui se passe.
4) construire et rédiger la (une) démonstration.

- Le point 1 est affaire de goût, de curiosité personnelle, ou de nécessité : ce problème peut être utile pour en résoudre un autre.
- le point 2 est affaire de culture... et d'habitude: il s'agit de distinguer l'essentiel de l'accessoire, d'identifier les informations dont on dispose, ...
- le point 3 est aussi affaire de culture, d'habitude ... mais aussi d'intuition. On essaie de prendre le problème "par tous les bouts", on pense à des analogies, etc. Quelquefois, "ça marche".
- le point 4 dépend grandement de l'efficacité du point 3 et aussi de la connaissance, d'une part des outils ou des objets mathématiques en jeu, et d'autre part de certaines techniques de démonstration : récurrence, absurde, ... C'est l'étape de la "rigueur".

S'agissant de très jeunes enfants (CM2, 6 ème, 5 ème), quelle est la situation dans le milieu strictement scolaire (selon moi, et sans généraliser à tout prix car il existe des exceptions)?

Le point 1 n'est pas abordé, et comment pourrait-il en être autrement puisque c'est l'enseignant, ou l'auteur de manuel, qui propose. Il me parait donc difficile d'échapper à cette critique, c'est à dire de mettre <u>totalement</u> l'enfant en <u>situation de découverte autonome</u>.

Le point 2 n'est que très rarement abordé (chez Freinet par exemple). Dans la majeure partie des cas, l'énoncé est fourni à l'enfant, et assez souvent sous une forme syntaxiquement complexe.

Le point 3 consiste pour une part (importante) à démêler l'énoncé (c'est un peu de l'analyse grammaticale), et pour l'autre part à identifier les opérations à effectuer.

Enfin le point 4 consiste essentiellement à effectuer la (ou les) opération(s) nécessaire (s) : on construit effectivement la solution, car en général il y a une solution, et une seule.

Pour être plus nuancé, ajoutons que certains enseignants passent beaucoup de temps à analyser le point 3 avec leurs élèves, ne serait-ce que lors des corrections. Ajoutons aussi qu'une part importante de l'"activité mathématique", dans ces classes (et même plus tard), consiste en l'apprentissage et la maîtrise de certains outils (opérations élémentaires par exemple, algèbre linéaire plus tard, etc.) ou la connaissance de certains "objets mathématiques": nombres, formes géométriques, etc. C'est une activité de longue haleine, dont le schéma directeur est fixé par les programmes, et c'est une activité difficile, qui demande compétence, continuité dans le temps, patience... et une bonne connaissance de ses élèves.

les objectifs.

Cela dit, et pour autant que cette analyse sommaire soit correcte, comment le Palais peut-il intervenir?

En tenant compte du fait que nous ne connaissons pas les élèves au préalable, et qu'une séance ne doit pas excéder 1h 30 à 2 heures, ce qui est déjà beaucoup, il paraît difficile d'intervenir sur le dernier point (l'apprentissage d'outils, ou la familiarisation avec les objets). Par ailleurs, je vois mal pourquoi des enseignants viendraient au Palais faire entendre à leurs élèves à peu près le même discours que celui de leurs cours.

On a vu également que les points 1 et 2 peuvent difficilement être évacués : pour une activité aussi ponctuelle dans le temps, il faut bien que "quelqu'un" choisisse les problèmes.

Restent les points 3 et 4. Le problème est délicat dans la mesure où on aborde simultanément des problèmes heuristiques et des problèmes de démonstration (y compris le fait qu'il y a nécessité à la démonstration, ce qui n'est pas toujours aisé à faire percevoir).

Par ailleurs, il s'agit d'aider les enfants à mener une authentique démarche mathématique. Cela implique donc, en premier lieu :

a) qu'il soit facile de voir qu'il y a un problème,
b) que l'énoncé soit transparent au plan linguistique: il est inutile de superposer deux difficultés, maths et langue,
c) que les objets mathématiques en cause soient bien maîtrisés, et donc très élémentaires,
d) que la (ou les) démarche(s) heuristique(s) puisse(nt) être un prétexte à faire passer un certain nombres d'idées parmi lesquelles :

- un problème peut avoir une, des, ou pas de solutions,

- prouver qu'il n'y a pas de solution n'est pas "négatif", c'est aussi une façon de résoudre un problème,

- si la solution cherchée se trouve parmi un grand nombre de possibilités, chaque fois que l'on peut démontrer que la solution doit nécessairement posséder une propriété, on réduit le nombre de cas à étudier,

- si la solution doit nécessairement posséder deux propriétés contradictoires, alors il n'y a pas de solutions,

- dans certains cas, un problème peut être résolu plus facilement en changeant de cadre, par exemple un problème géométrique reformulé sous forme arithmétique (ou l'inverse),

- montrer que réfléchir et "faire des maths" permettent (dans certains cas) de gagner du temps. Par exemple en évitant de chercher une hypothétique solution ... qui n'existe pas!

- montrer qu'un problème, une fois résolu, peut suggérer des généralisations, ou de nouvelles questions. C'est ainsi qu'"avancent" les maths depuis trois mille ans.

- montrer que la solution d'un problème peut éventuellement servir à résoudre d'autres problèmes, proches mais différents,

- montrer que la recherche de la solution d'un problème peut passer par la résolution d'autres problèmes, ou en suggérer d'autres,

- accessoirement, montrer que l'activité mathématique peut s'appliquer aussi à des objets inexistants dans les programmes scolaires (graphes par exemple).

- ... cette liste n'est pas exhaustive!

On voit donc qu'il s'agit plus d'un travail qualitatif sur l'activité mathématique, que de l'acquisition ou la maîtrise d'outils ou de techniques. J'ajouterais un dernier point:

e) il serait souhaitable que cette activité, au moins au début, garde un caractère ludique.

les activités.

Compte tenu des contraintes a, b, c, d, e ci-dessus, les activités proposées consistent essentiellement à (tenter de) reconstituer des puzzles ou à (tenter de) résoudre de petits problèmes d'arithmétique.
Ils sont tous caractérisés par le fait qu'il semble exister, a priori, un grand nombre de combinaisons à essayer. Il y a donc une nécessité "à mettre de l'ordre". Par ailleurs, l'énoncé est transparent et le développement heuristique est assez riche.

Les problèmes de ce type sont quelquefois considérés comme des "gadgets", avec une lourde connotation péjorative; on entend aussi, quelquefois "c'est pas ça, les maths". Je souhaite donc faire deux remarques:
- certains de ces problèmes ont été posés, et résolus, par des gens comme Euler, Hamilton, Skolem, Conway, (lesquels?), l'un d'entr'eux à des applications en radio- astronomie (lequel?)
- ils sont certes moins fondamentaux que certains problèmes de maths "sérieux", si cette expression a un sens, mais tout dépend des objectifs que l'on se fixe.
- voir aussi John Cage en exergue.

les modalités.

Les séances durent de 1h30 à 2h au plus, et on alterne périodes d'exploration et solutions. Pendant la première phase, les enfants, par groupes de deux (mais c'est une simple question de matériel) tâtonnent, essayent de résoudre les problèmes, viennent au tableau écrire les résultats partiels, etc. Les problèmes qui possèdent une solution se résolvent très vite et, pour ceux qui sont impossibles, la recherche est limitée à 5 minutes. Pendant la seconde phase, on essaye de trouver ensemble le "pourquoi ça marche" ou le "pourquoi c'est impossible". De nombreux cas d'impossibilités se démontrent de la même façon. Par ailleurs, on peut envisager de fournir à l'enseignant un fascicule de solutions si le temps manque (NDLR: celui-ci par exemple).

le niveau requis.

Tous ces problèmes reposent, d'une certaine façon, sur la notion de parité, sauf le dernier. Cependant, l'argument de parité n'est pas immédiat pour les enfants. On se heurte alors à une difficulté: si l'on donne tout de suite cet argument, qui est très simple et facilement compréhensible, la solution prend un aspect "magique" et risque de persuader les enfants que la population se divise en deux parties : ceux qui pensent à cet argument et les autres, bref ceux "qui ont la bosse des maths" et "ceux qui ne l'ont pas".
Une autre démarche consiste à essayer de faire en sorte que les enfants découvrent eux-mêmes l'argument. Il faut alors trouver une aide possible, un cheminement pour y arriver. C'est évidemment beaucoup plus long.

Ainsi, dans les casse- têtes 1 et 2, qui posent le problème de couvrir un quadrillage à l'aide d'un carré rouge et de dominos, l'argument décisif est le suivant :
Si le quadrillage est coloré en quinconce, un domino couvre obligatoirement une case blanche et une grise. Plaçons maintenant le carré rouge en P. Comme il y a 17 dominos on couvrira obligatoirement, s'il y a une solution, 17 blanches et 17 grises. Or la surface à couvrir comporte 16 blanches et 18 grises. C'est donc impossible.

Pour qu'il y ait une solution, il est donc <u>nécessaire</u> que le carré rouge soit sur une case grise. Il reste à montrer que c'est suffisant, ce qui peut se faire par construction explicite.

On voit donc que les connaissances utiles sont assez réduites: selon les cas, il est nécessaire que les enfants sachent compter, sachent distinguer les nombres pairs des impairs, sachent diviser mentalement de petits nombres par trois ... Nous avons indiqué derrière chaque casse-tête le niveau requis pour comprendre la solution, mais c'est un peu arbitraire. Par exemple, la tolérance des enfants à la longueur d'un argument est très variable, même si chaque étape est élémentaire,.
La plupart des solutions sont du niveau CM2, 6ème. Celles qui sont indiqués "4ème" nécessitent de savoir ce qu'est une "variable": savoir par exemple ce que signifie 3a+b. C'est donc peu de chose et peut, dans certains cas, être exploité quand même avec des élèves plus jeunes.
L'avant dernier problème, mentionné "terminale", explore certaines propriétés du triangle de Pascal, mais on peut s'arrêter avant, et ne pas généraliser. Il en est ainsi d'autres petits problèmes arithmétiques, qui vont éventuellement "de l'école primaire à la recherche", et qui pourraient être ajoutés à ceux qui sont décrits ici.

le matériel.

Ces casse- têtes, et leurs supports matériels, ne posent aucun problème de fabrication (pour la plupart ils peuvent même être fabriqués en carton) et seul le casse-tête n°9 demande à être très précis (mais on peut en faire une version purement arithmétique avec papier et crayon, ou d'autres versions « matérielles » plus simples).

les casse-têtes.

<u>Casse-têtes n°1 et 2</u> **le carré rouge et les dominos** (CM2)

n°1 n°2

On dispose de 17 dominos couvrant chacun deux cases adjacentes du quadrillage, et d'un carré rouge. La case en haut à gauche est condamnée (elle peut servir à vérifier que tous les quadrillages des enfants sont bien dans la même position).
Si l'on place la carré rouge en R, peut-on couvrir les cases blanches avec les dominos?
Quand les enfants auront suffisamment essayé avec ces deux positions, leur faire essayer avec d'autres, et faire un tableau récapitulatif, en notant F pour les cases "faciles", où on a trouvé, et * pour les cases "difficiles", où on n'a pas trouvé.

exploitation

1) apparemment, on ne trouve pas de solutions pour le n°1, alors qu'on en trouve, et même plusieurs, pour le n°2. Peut-être qu'il n'y a pas de solutions pour le n°1, mais comment en être sûr? Il faudrait essayer toutes les façons de placer les dominos. Elles sont nombreuses, ça va être long! De plus, c'est souvent quand on place les derniers qu'on s'aperçoit que cela "ne marche pas". Que faire?
On a quand même gagné quelque chose: le n°1 est difficile, le n°2 est facile, et ça dépend de la position du carré rouge. On pourrait peut-être essayer d'autres positions du carré rouge?
(Les enfants cherchent puis vont inscrire au tableau leur conviction du moment. Après quelques essais et explorations, on aboutit à un récapitulatif du type de ceux ci-dessous. Au passage, c'est un bon exercice de repérage sur le plan. Il est néanmoins utile que l'animateur vérifie l'exactitude des inscriptions au fur et à mesure et "demande à voir", par exemple, quand une case impossible est indiquée F)

a) b)

- Est-ce que quelqu'un devine ce qui se passe (dessin a)?

Quelques minutes après (dessin b)

- Et maintenant?
- Oui, on dirait qu'il y en a un sur deux qui marche.
- Ce n'est pas sûr, mais cela a une tête à être ça, vérifions encore quelques positions (en fait c'est ça). Maintenant il faudrait comprendre pourquoi c'est comme ça, il y a sûrement une raison.

2) On va faire ce que font souvent les mathématiciens dans des cas semblables : on va essayer avec un problème qui ressemble, mais plus simple. Par exemple, est-ce qu'il se passe la même chose pour des quadrillages plus petits? Avec moins de dominos, bien sûr, et toujours en interdisant la case en haut à gauche.

2 x 2 :

- On aura besoin de? - Un domino et le carré rouge.
- Et on trouve . . .?
- Si le carré rouge est en A ou B, ça marche, s'il est en C, ça ne marche pas.
- Pourquoi? - Parce que quand il est en C, les cases A et B se touchent par un sommet et non par un côté, et qu'un domino, c'est deux carrés côte à côte.
- Donc? - C'est impossible!
- Difficile ou impossible? - Impossible!
- C'est ça. Cette fois on est sûr. Et c'est encourageant parce que cela ressemble au quadrillage de tout à l'heure, dans sa partie en haut à gauche. Essayons avec un carré de côté 3.

3 x 3 :

- On aura toujours le carré rouge, mais combien faut-il de dominos?
- ????
- Combien y a-t-il de cases en tout? - 3x3 = 9.
- Et si on retire le carré rouge et la case interdite? - 7.
- Un domino couvre combien de cases? - 2.
- Est-ce que 7 est divisible par 2? - Non. - Alors . . . ? - C'est impossible.
- On vient donc d'apprendre quelque chose : si le nombre de cases à couvrir est un nombre impair, le problème est impossible. Ou encore : pour que le problème ait (éventuellement) une solution, il est nécessaire que le nombre de cases à couvrir soit ...?
- Pair. - Pourquoi ? - Parce qu'un domino couvre deux cases.
- O.K., passons au quadrillage 5x5. Combien y a-t-il de cases en tout?
- 25.
- Et utiles, c’est à dire sans les carrés rouge et noir?
- 23.
- Et alors?
- C'est impossible!
- Et pour le carré de côté 7?
- 7x7 = 49, c'est impossible.
- Et si on prend un autre nombre impair?
- C'est impossible.
- Comment en es-tu sûr?
- ???
- etc ...

On tente alors de montrer que le carré d'un nombre impair est un nombre impair.

Le dialogue "type" est un peu long pour figurer ici, mais les enfants savent qu'il existe une infinité d'impairs (ou "autant qu'on veut", mais le terme "infinité" est souvent proposé) et sont rapidement conscients qu'il est donc impossible de les <u>essayer</u> tous (comme ils le proposent initialement et spontanément quand la question est posée). Ils sont également convaincus qu'on ne peut pas être sûr, "parce qu'on ne peut pas les attraper tous à la fois".

Avec les CM2 et 6ème, on regarde ce qui se passe modulo 10 (un nombre impair se termine par 1,3,5,7 ou 9) plutôt que de voir les nombres impairs sous la forme 2n+1, plus "fondamentale" mais moins proche de la pratique : on essaye donc les carrés de 11, de 21, de 31, en posant les opérations, pour constater qu'ils se terminent tous par 1. On analyse pourquoi le chiffres des unités du résultat ne dépend que de celui du nombre initial. En particulier, les carrés des nombres qui se terminent par 1 se terminent aussi par 1, parce que 1x1 = 1. C'est une assez grosse (et agréable) surprise chez les enfants, de constater qu'on vient ainsi d'en "attraper une infinité d'un coup". Les autres terminaisons impaires s'explorent ensuite sans difficulté (à part la connaissance des tables!): les terminaisons des carrés des nombres se terminant par 1, 3, 5, 7, 9 sont respectivement 1, 9, 5, 9, 1, et on les a finalement "tous attrapés".

A ce point, les réactions sont variées. Souvent, certains élèves voient la symétrie et se demandent si "c'est pareil quand on prend tous les nombres entre 1 et 10", ce qu'on vérifie. Zéro mis à part, la succession des terminaisons des carrés est 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, ce qui peut se justifier géométriquement. On peut en profiter pour poser, (si elle ne l'est pas par les élèves) la même question pour les terminaisons de deux chiffres.

Cela dit, Franck, élève en CM2, a dit un jour :"Alors un carré ne se termine jamais par 2, 3, 7 ou 8", résultat immédiatement baptisé "théorème de Franck", sous les applaudissements. On était à deux doigts de répondre à la question: un carré peut-il être le double d'un autre carré? mais les autres élèves étaient focalisés sur les "puzzles", et commençaient à s'ennuyer.

Finalement, on a quand même obtenu un résultat : pour qu'il y ait une solution, il est nécessaire que le **côté** du carré soit pair. On passe ensuite au carré 4x4.

4 x 4

- Combien y a-t-il de cases? - 4x4 = 16
- Combien faudra-t-il de dominos? - 8.
- Attention, il y a la case interdite et le carré rouge. - 7. - Très bien.

3) En expérimentant un peu, on constate qu'il y a des positions du carré rouge qui sont "faciles" et d'autres qui sont "difficiles". Parmi celles-ci, on peut même montrer, par exploration systématique, que certaines sont impossibles.

Exemples:

facile

facile
(symétrie diagonale)

faciles
(déplacement du domino 1
ers le haut et symétrie)

facile

symétrie

facile

symétrie

Bien entendu, cette méthode est systématique, mais c'est long. Ce serait pire encore avec le quadrillage 6x6 ou un autre, plus grand encore! On a quand même un peu plus d'informations sur ce qui se passe. En particulier, on connaît des cases où c'est "facile"; pour les autres, ou c'est "impossible", ou "on ne sait pas", comme dans le carré 6x6. On s'en serait peut-être aperçu plus tôt si on avait réellement joué sur un damier. Essayons.

On savait déjà qu'un domino couvre deux cases adjacentes. Sur un damier, on apprend, de plus, qu'il couvre toujours une case blanche et une case marquée F, quelle que soit sa position.

Comme on doit résoudre notre problème avec 7 dominos, on couvrira donc obligatoirement 7 cases blanches et 7 cases marquées "F". (Ce point est assez long à faire admettre, mais ça passe, commencer par : si un domino couvre ...deux dominos couvriront ?... etc.) Maintenant, comptons les cases. Comme on a supprimé le coin en haut à gauche, il reste 7 cases blanches et 8 cases "F". Si l'on place le carré rouge sur une case blanche, les dominos devraient couvrir 6 cases blanches et 8 "F", ce qui est impossible.

Pour qu'on puisse trouver une solution, il est donc nécessaire de placer le carré rouge sur une case marquée "F", de façon à avoir 7 blanches et 7 "F". Ce n'est pas suffisant pour affirmer qu'il existe une solution, mais au moins, cela nous dit qu'il n'est pas impossible qu'il y en ait ... et en fait, on a vu qu'il y en avait toujours.

On peut maintenant revenir au quadrillage 6 x 6 et appliquer la même idée: on identifiera les cases où c'est impossible, et on vérifiera que sur les autres c'est en fait toujours possible.(Mais cel peut se démontrer, bien sûr)

Résumons nous (enfin):

- on s'est posé un problème (et même deux),
- on s'est rendu compte qu'on avait intérêt à les traiter ensemble,
- on a vu que certaines cases étaient possibles et d'autres non, mais on ne savait pas trop pourquoi,
- on a alors essayé un problème similaire mais plus simple,
- on s'est aperçu, grâce au fait qu'un domino couvre deux cases, qu'il n'y avait jamais de solutions

quand le nombre de cases est un nombre impair. On en a déduit qu'il fallait que le côté du carré soit pair.

- notons au passage qu'en faisant cela on est passé d'un problème géométrique à un problème arithmétique.
- en explorant notre problème, on a constaté que les positions "faciles" formaient un damier, (et au passage on a utilisé des propriétés de symétrie)
- on a ainsi trouvé une nouvelle condition arithmétique nécessaire pour qu'une solution existe (éventuellement). Cette condition reflétait une information fournie par l'énoncé mais qu'on n'avait pas réussi à exploiter jusque là, à savoir qu'un domino couvre deux cases adjacentes.
- de plus, maintenant, on voit mieux comment on pourrait s'y prendre avec d'autres quadrillages: des rectangles, par exemple, ou des quadrillages biscornus ... c'est à dire bien plus que la réponse aux problèmes posés.

A B

Par exemple, pour le quadrillage ci-dessus, le domino 1, qui est nécessaire, sépare notre problème en deux problèmes plus petits, A et B, dont les solutions sont nécessaires à la résolution du problème entier. Ils ont tous les deux un nombre pair de cases, mais la "méthode du damier" montre que B est impossible, et donc aussi le problème initial.

- il faut bien voir, quand même, que cette méthode ne nous donne pas la, ou une, solution. Elle nous aide à gagner du temps quand il n'y en a pas. Ce n'est déjà pas si mal!
- pour être complet, il faudrait aussi montrer comment s'y prendre, dans le cas général, pour placer les dominos quand ce n'est pas impossible . . . mais c'est une autre histoire.(pas très difficile, d'ailleurs)

Casse-tête n° 3 **avec des carrés** (5ème, 4ème)

On dispose de carrés de côtés 2 et 3, en nombre suffisant. Peut-on couvrir ce carré 11x11?

exploitation

Cette fois-ci, le problème est apparemment plus compliqué : il n'y a pas de cases interdites, mais on ignore combien de pièces de chaque type sont nécessaires, ainsi que leurs positions. On ne sait même pas si le problème est résoluble ... et à l'autopsie, c'est à dire après expérimentation, il semble que non. Il existe sûrement une bonne raison (du moins on l'espère!)

- Quelqu'un a-t-il une idée?
- On pourrait faire pareil?
- C'est à dire . . . ?
- Essayer sur un damier.
- Pourquoi pas.
- On peut peut-être savoir combien il faudrait de pièces?
- C'est une autre idée, commençons par le damier.

Si l'on commence par une case noire dans le coin en haut et à gauche, combien y aura-t-il de cases noires? (L'échange peut prendre quelques minutes: compter le nombre total de cases, voir qu'il y a une case noire dans chaque coin, essayer avec des carrés impairs plus petits, ... bref, il y a 61 noires et 60 blanches).

- Une pièce carrée de 2x2 couvre ... ? - 2 noires et deux blanches.
- Et pour les pièces de 3x3? - 5 noires et 4 blanches.
- Toujours ? - Non, on peut avoir 4 noires et 5 blanches.
- C'est donc plus compliqué que tout à l'heure. Mais on peut quand même en tirer quelque chose : puisqu'il y a une différence de 1 entre le nombre total des cases noires et des blanches, cela ne peut pas être dû aux carrés 2x2, qui couvrent autant de noires que de blanches. Restent les carrés 3x3, qui peuvent être placés de deux façons sur le damier:

type A	type B
a carrés	b carrés

x carrés 2x2 **y carrés 3x3 avec y = a+b**

S'il y avait autant de pièces de type A que de type B, elles couvriraient autant de noires que de blanches. Il est donc nécessaire qu'il y ait une pièce de type A en excédent, c'est à dire que l'on ait a = b + 1.

Avec des 5èmes ou au dessus, on peut dénombrer les noires et les blanches:

nombre de noires : $N = 61 = 5a + 4b + 2x$ (1)
nombre de blanches: $B = 60 = 4a + 5b + 2x$ (2) , et par soustraction :
$N - B = 1 = a - b$

On n'a pas appris grand chose, mais c'est toujours ça. Essayons l'autre idée.

-Un carré 2x2 couvre 4 cases. S'ils sont au nombre de x, ils couvriront ...?
- 4x cases.
- S'il y a y carrés 3x3, ils couvriront . . .?
- 9y cases.
- Et comme il y a 121 cases en tout, on doit avoir ...?
- 4x + 9y = 121 .

- Parfait. Que sait-on sur x et y?
- ? ? ?
- Est-ce qu'on peut avoir $x = 2,5$?
- Non; x et y sont des nombres entiers.
- C'est tout ce qu'on sait?
- ? ?
- Est-ce que y peut être égal à 12?
- 9x12 = 108. Oui, c'est inférieur à 121.
- Attention, l'arithmétique ne voit pas tout. On tient compte de la surface (de l'aire) mais pas de la forme des pièces. Les deux problèmes ne sont pas équivalents. En fait, on ne peut pas placer plus de $x = 25$ carrés 2x2. ni plus de $y = 9$ carrés 3x3. (le vérifier).
- Est-ce qu'on peut avoir $y = 0$?
- Non, ça donne $4x = 121$ et y doit être entier.
- et $y =1$?
- $4x + 9.1 = 121 \Rightarrow 4x =112 \Rightarrow x = 28$, qui est supérieur à 25, c'est donc impossible.
-

A ce point, on peut continuer à tester les différentes valeurs de y (ou de x), ou alors (avec des élèves de 4ème par exemple) dire que si il existe une autre solution x', y' on doit avoir: :

$$4.\ x' + 9.\ y' = 121 \qquad (1) \qquad \text{et}$$
$$4.\ 28 + 9.\ 1 = 121 \qquad (2) \qquad \text{d'où, par soustraction:}$$

$$4\ (x'-28) + 9\ (y' - 1) = 0 \qquad (1) - (2) \qquad \text{et enfin :}$$

$$\mathbf{\frac{(28 - x')}{9} = \frac{(y' - 1)}{4} = t\ ,\quad \text{avec } t \text{ entier.}}$$

On trouve donc, finalement : $x' = 28$ et $y' = 1$
$x' = 19$ et $y' = 5$
$x' = 10$ et $y' = 9$.

La première et la dernière sont impossibles pour des raisons géométriques (le vérifier).
Reste la seconde: on a $y = a+b = 5$ et comme par ailleurs $a = b + 1$, on en tire : $a = 3$ et $b = 2$.
Cela ne résout toujours pas notre problème, cela nous dit simplement que, s'il existe une solution, elle doit nécessairement vérifier $a= 3$; $b = 2$.

(Bien entendu, avec des élèves plus jeunes, on supprimera cet exercice de résolution d'équation en nombres entiers).

Cela dit, on est quand même persuadé qu'il n'y a pas de solutions. Que peut-on faire de plus?

- L'idée du damier nous avait permis d'obtenir $a = b + 1$, mais d'où venait le 1?
- De la différence entre 61 et 60.
- On peut peut- être trouver un coloriage plus astucieux, où la différence serait plus grande?
- ? ? ?
- Supposons qu'on ait peint une colonne sur deux en noir, en commençant par une noire. On aura 6 colonnes noires et 5 blanches, c'est à dire 66 cases noires et 55 blanches. La différence est maintenant de 11.
- Oui, mais les carrés ne couvrent plus le même nombre de cases noires et blanches..
- Voyons cela. Les carrés 2x2 couvrent encore deux noires et deux blanches. Quant aux carrés 3x3, ceux de type C couvrent 6 noires et 3 blanches et ceux de type D 3 noires et 6 blanches.

type C type D

Reprenons le raisonnement du début : il est nécessaire qu'il y ait plus de pièces de type C que de type D. Chaque pièce C en excédent "ajoute" 3 cases noires. Il y a 11 cases noires en excédent. Comme 11 n'est pas un multiple de 3, le problème est **impossible**. (Ce qu'on peut aussi voir en écrivant les équations).

- Alors, ce n'était pas la peine de faire tout le reste!
- C'est vrai mais, d'une part on ne pouvait pas le savoir avant d'avoir essayé, et d'autre part on a quand même appris des choses :

a) on peut aborder un problème de plusieurs façons,

b) on est passé d'un problème géométrique à un problème arithmétique. C'était plus facile à traiter mais les deux problèmes n'étaient pas équivalents. A l'avenir, il faudra se méfier.

c) au passage, on a vu comment résoudre une équation linéaire à deux variables, en nombres entiers.

Casse-tête n°4 **un carré et des équerres** (6ème, 5 ème)

On dispose de 15 pièces de type A et d'un carré de type B. Peut-on couvrir ce carré 8x8?

exploitation

1) Après expérience, le problème semble impossible.
2) on essaye la méthode du damier, en vain : toutes les pièces couvrent deux noires et deux blanches et on ne peut donc pas conclure.
3) on essaye avec les bandes: il y a 32 cases blanches et 32 noires.
4) la pièce carrée couvre deux noires et deux blanches. Les pièces en équerre couvrent, selon leur position, 1 blanche et 3 noires (on dira que ces pièces sont de type A1) ou 3 blanches et une noire (pièces de type A2).
5) il y a 15 pièces en équerre, donc A1+ A2 = 15, et par conséquent A1 est différent de A2.
6) il y aura donc au moins deux cases noires en excédent, ou deux blanches : il n'y a donc pas de

solution.

Après quelques essais, conformes aux indications ci-dessus, les deux casse-têtes précédents ont été abandonnés : leur côté "négatif" déçoit, et démobilise, les enfants. Cela peut paraître contradictoire avec les objectifs cités plus hauts, mais les deux casse-têtes 1 et 2, et le suivant, montrent des situations "négatives" similaires, avec la compensation importante que, au moins dans certains cas, "ça marche!".

Cela dit, la situation est différente dans une activité annuelle, où ces deux problèmes (3 et 4) peuvent sans doute être conservés, ne serait-ce que pour montrer qu'on peut transporter une méthode d'un problème à un autre.

Casse-tête n°5 **encore des équerres**

On dispose d'un carré et de 6 pièces en équerre. Peut-on couvrir ce quadrillage en plaçant le carré en: A ou C (CM1 ou 2), D ou E (CM2), B (4ème), F (long)?

exploitation

1) on a trouvé des solutions pour A et C. (faire remarquer aux enfants qu'il y en a plusieurs, que certaines possèdent des symétries, les leurs faire chercher, etc.). En voici deux.

2) pour B, D, E, F, on n'a pas trouvé.

3) cas D et E : on essaye le damier. (figure ci-dessous à gauche)
Chaque pièce en équerre couvre 2 blanches et 2 noires. Si le carré est en D ou E, il reste 13 cases noires et 11 blanches, à couvrir à l'aide des six équerres. Conclure.

4) Par contre, si le carré est en B ou F, il reste 12 cases noires et 12 blanches, et cette méthode ne permet pas de conclure.

5) Essayons la méthode des bandes (figure ci-dessus à droite):

- une équerre peut alors couvrir 3N et 1B (type a) ou 1N et 3B (type b)
-il y a 6 équerres : $6 = a + b$ (1)
- on doit couvrir, en tout 15N et 9B, on peut donc écrire:

$$15 = 3a + b \qquad (2)$$

et

$$9 = a + 3b \qquad (3).$$

- en soustrayant terme à terme (1) de (3) , on obtient $9 - 6 =$ **3 = 2b**, ce qui est impossible puisque b doit être entier.

6) reste le cas F.

Si l'on reprend le raisonnement ci-dessus, on doit couvrir 14N et 10B, et les équations (2) et (3) deviennent respectivement $14 = 3a + b$ et $10 = a + 3b$, d'où l'on tire, avec (1) : $4 = 2b$, ... et on ne peut pas conclure.
En fait, je n'ai pas trouvé de méthode rapide pour trancher ... ce qui ne veut pas dire qu'il n'en existe pas, bien sûr! Pour l'instant, si l'on veut vraiment être certain, il va falloir essayer toutes les combinaisons. Bien sûr, c'est long ... et pas très élégant ...mais ça arrive, même pour des problèmes "sérieux". (En particulier, la classification des groupes finis simples demande, pour l'instant, environ 10 000 pages de démonstration. Tout espoir n'est pas perdu, il y a d'étranges coïncidences avec d'autres théories, apparemment éloignées, ce qui peut permettre, peut-être, de trouver des propriétés plus profondes permettant de simplifier la preuve.)

Voyons comment pourrait se faire une telle exploration systématique:

Commençons par chercher toutes les façons de couvrir la case située en bas à gauche, marquée d'une croix : il y en a quatre:

- Manifestement, si l'on sait résoudre 2 on saura résoudre 3, puisque les zones découvertes sont les mêmes, à rotation près. Or, cette zone ne peut pas être couverte, comme on peut s'en rendre compte en essayant de couvrir la case marquée d'une croix, ci-dessous.

- Reste le cas 4, qu'on peut analyser de la même manière, et qui conduit lui aussi à une impossibilité, notamment parce qu'on retrouve la zone ci-dessus.

Résumons nous:

- on avait à résoudre un problème qui ressemblait un peu à des problèmes déjà vus,
- on a essayé une première méthode, qui a permis de trancher dans deux cas sur 4 (D et E impossibles),
- on a essayé une seconde méthode, elle aussi éprouvée, qui a permis de trancher un troisième cas (B impossible),
- pour le dernier cas (F), et en désespoir de cause, on est passé à une exploration systématique.
- on est tombé sur un sous- problème plus simple, mais nécessaire à la solution.
- on a vérifié que ce sous- problème est impossible. Il n'y a donc pas de solution dans le cas F.

commentaires:

a) En général, on ne conduit pas la totalité de l'exploration durant la séance, et on se contente d'en donner le début.
b) il m'est arrivé une fois, avec des CM2, de faire allusion à la longueur de certaines solutions, et à la "démonstration de 10000 pages", fruit des travaux de nombreux mathématiciens, pendant un siècle. La réaction a été immédiate: "Qu'est-ce que c'est comme problème?". J'ai donc choisi d'essayer de parler de groupes, et spécialement de groupes de permutations. Nous avons ainsi passé la fin de la séance à écrire les permutations de 2, puis 3 lettres, puis les dénombrer dans le cas de n lettres, composer les permutations de 3 lettres, mettre en évidence le fait que le produit n'est pas commutatif, etc. Le fait qu'on puisse faire des opérations sur autre chose que des nombres les a beaucoup surpris et, finalement, cette diversion s'est révélée beaucoup plus intéressante que les puzzles eux mêmes, tant pour moi que pour les enfants. Cependant, c'est très ponctuel : malgré d'autres provocations similaires avec d'autres classes, l'expérience n'a pu être renouvelée, faute de réaction d'ensemble de la classe.

Casse-tête n°6 **un petit cube** (CM2, 6ème)

Avec les pièces ci-dessus, peut-on reconstituer le cube de 3x3x3?

Casse-tête n°7 **. . et un gros** (6 ème, 5ème)

Il est semblable au précédent mais d'un niveau de difficulté considérablement supérieur si l'on cherche de façon empirique, sans faire un minimum de math.
Peut-on reconstituer un cube de côté 5 avec les pièces suivantes:
- 3 barettes de 1x1x3 ; un cube de 2x2x2; une pièce de 2x2x1 et 13 pièces de 4x2x1?

exploitation

Pour le petit, et aux symétries près, tout le monde a trouvé la même solution:

- Mézalor, où est le problème?
- Le problème est précisément que tout le monde a trouvé la même.
  Vous êtes sûrs qu'il n'y en a pas d'autres? Vous avez tout essayé?
- Oui.
- Et pour l'autre casse-tête (le n°7)? Est-ce que vous avez trouvé?
- Non.
- A votre avis, c'est possible ou non?
- Non!
- En fait, si! Mais pour trouver, il faut avoir compris pourquoi il n'y a qu'une solution pour le petit. Si on n'a pas compris, si on ne fait que tâtonner, on peut chercher pendant des heures, voire des jours! Il y a trop de possibilités. Il faut mettre de l'ordre, voir si on ne peut pas réduire l'exploration; par exemple en trouvant des conditions nécessaires sur la position des pièces. Essayons sur le petit, ci-dessus.

Coupons mentalement notre cube en trois tranches horizontales.
- Combien y a-t-il de petits cubes dans chaque tranche? - Neuf.
- Bien, maintenant, prenons une pièce de 2x2x1. Si elle est entièrement contenue dans la tranche supérieure, combien occupe-t-elle de petits cubes? - 4.
- Elle peut être verticale et à moitié dans la tranche, et compter pour ...? - 2.
- Enfin, elle peut être ailleurs dans le cube, et dans ce cas elle compte pour ... ? - 0.
- Parfait. Une question : 4, 2 et 0 sont des nombres ..? - Pairs!
- Et 9 ?
- Impair.

- Par conséquent ?
- ? ? ?
- Une tranche contient 9 cubes. Les grosses pièces contribuent pour 4, 2 ou 0 cubes, c'est à dire pour un nombre pair de cubes. Quand on ajoute ensemble des nombres pairs on obtient un nombre . . ?
- Pair!
- Que peut-on faire pour occuper un nombre impair de cubes dans la tranche supérieure?
- Mettre un petit cube.
- O.K. il est nécessaire qu'il y ait un petit cube dans la tranche supérieure. Et dans la tanche du milieu?
- Aussi.
- Et dans la tranche du bas?
- Aussi.
- Parfait, on a maintenant une condition : il est nécessaire qu'il y ait un petit cube dans chaque tranche horizontale. Maintenant, est-ce qu'il peut y avoir deux cubes l'un au dessus de l'autre? (les avis sont partagés). Coupons le cube en 3 tranches verticales.
- Ah! oui, c'est pareil!
- On a donc maintenant un nouveau problème : comment placer trois petits cubes dans le grand de telle façon qu'il y en ait un seul dans chaque tranche? Il y a la solution qu'on a trouvé, mais y'en a-t-il d'autres?
- Oui.
- Comment?

- Est-ce qu'il y en a d'autres (on en montre une autre, avec les cubes). Très bien, mais c'est la même . . . aux symétries près, si l'une marche, l'autre aussi. Est-ce qu'on peut trouver une condition qui interdise cette disposition?
- On pourrait colorier.
- Pourquoi pas. En damier ou en bandes?
- On peut commencer par le damier.
- D'accord, mais c'est un peu plus compliqué parce qu'on est dans l'espace. On obtient la figure ci-dessous, à gauche. Combien y a-t-il de cubes noirs? - 14 - Et de blancs ? -13 - Si on place les cubes où tu as dit (les x)?, on supprime combien de cubes noirs ou blancs - 2 noirs et un blanc. - Il nous reste donc ? - 12 noirs et 12 blancs - Et alors ? - On ne peut rien dire, il y a six pièces carrées, et chacune couvre 2 noirs et 2 blancs.

- Alors ? Qu'est-ce qu'on fait?
- On essaye les bandes? (ci-dessus, à droite).
- Cette fois-ci, il y a . . . ?

- 15 noirs et 12 blancs. (note: *in vivo*, ces problèmes de dénombrements sont un peu plus longs qu'ici!)
- Et si on place les petits cubes ?
- Il reste 14 noirs et 10 blancs.
- Et alors ?
- Les autres pièces doivent couvrir 12 noirs et 12 blancs, donc c'est impossible, il n'y a que la solution qu'on a trouvé au début.
- Et pour le casse-tête n°7 ?
- On fera pareil ?
- C'est un tout petit peu plus délicat, mais c'est la même idée: chaque tranche comporte 25 cubes et les grosses pièces ne peuvent contribuer à une tranche que pour 8, 4, 2 ou 0 cubes. On arrive à la conclusion que si il existe une solution, les petites pièces de 3x1x1 doivent être placées de telle façon qu'il n'y ait jamais deux cubes de deux pièces différentes dans la même tranche, toujours pour des raisons de parité).

commentaire: le casse-tête 3x3x3 a beaucoup de succès, comme jeu, auprès des enfants. Il est plus difficile de les intéresser à l'unicité de la solution. Le cube de côté 5, dont personne ne trouve la solution, est effectivement motivant, comme mentionné au début, mais il est assez rare qu'il reste du temps, pendant une séance, pour que les enfants aient le temps de sécher. Par contre, des enfants, et plusieurs enseignants, ont relevé les types de pièces pour en faire réaliser à domicile.

Jeu n°8 **le chat et la souris** (CM2)

Ce jeu se joue à deux : le chat et la souris, placés comme indiqué ci-dessus. Le chat commence et les joueurs jouent alternativement en se déplaçant d'un point à un point voisin relié par un trait.

Le chat aura gagné s'il mange la souris, c'est à dire s'il se place sur le point où elle se trouve. Est-ce possible? Si oui quelle est la stratégie à suivre?

exploitation

Supposons que le sommet supérieur n'existe pas, et colorions alternativement les sommets en noir et blanc. Au début, le chat et la souris sont tous les deux sur un sommet noir. S'ils jouent un coup chacun, ils seront tous deux sur un sommet blanc, et ainsi de suite : le chat ne pourra jamais rattraper la souris. La seule façon de gagner, pour le chat, consiste à jouer de manière à se trouver, au moment de jouer, sur un sommet de couleur différente du point où se trouve la souris. C'est possible s'il "perd un coup" en passant par le sommet. (ci-dessous).

Casse-tête arithmétique n°9 **le jeu des cavaliers** (CM2 et plus)

On dispose d'une planchette percée de sept lignes de 24 trous, espacés de 2cm, et de 12 cavaliers numérotés de 1 à 12. L'écartement des pieds du cavalier n°i est de 2i cm.

But du Casse-tête: placer les cavaliers sur les lignes de façon qu'à la fin, il n'y ait jamais deux pieds dans la même colonne. Pour commencer, on peut essayer avec les cavaliers de 1 à 4 à placer sur les 8 premières colonnes, comme ci-dessous, par exemple :

Peut-on toujours trouver une solution en utilisant les cavaliers de 1 à n et les 2n premières colonnes?

Note : ce casse-tête est assez délicat à construire, mais on peut avantageusement le remplacer par 2n drapeaux sur lesquels on pose des jetons numérotés de 1 à n en deux exemplaires. la distance entre deux drapeaux portant le même nombre doit être égale à ce nombre. Exemple:

Cependant, les cavaliers, dont l'écartement est fixé matériellement, évitent bien sûr les erreurs de placement et facilitent les vérifications.

solution

Si l'on peint alternativement les colonnes en noir et blanc, on vérifie qu'un cavalier "impair" possède une "pied dans chaque couleur", alors qu'un cavalier "pair" a les deux pieds de la même couleur.

Pour que le problème ait une solution, et puisqu'il y a autant de colonnes noires que de blanches (2n est un nombre pair), il est **nécessaire** que le nombre de cavaliers pairs soit lui-même un nombre pair, c'est à dire que n soit de la forme 4k ou 4k+1. On peut montrer, par construction explicite, que cette condition est suffisante.

commentaires :

Ce casse-tête est délicat à réaliser, et nous n'en n'avons qu'un exemplaire rigide. Il n'y a donc pas eu d'exploitation autre que collective. Des expériences menées dans d'autres contextes montrent cependant que les enfants (et les autres) accrochent bien sur ce problème combinatoire qui peut être proposé très tôt (CE2), avec peu de cavaliers.

<u>Casse-tête n°10</u> **sans lever le crayon** (CM2, 6 ème)

Peut-on dessiner les figures suivantes "sans lever le crayon"?

a b c

note : pour une version "matérielle" de ce problème, on peut dessiner les graphes sur des planchettes, munir les sommets de pitons et remplacer le "trait de crayon" par une cordelette de longueur suffisante. Bien entendu, on peut multiplier les dessins à l'infini, mais ces trois-là représentent typiquement les trois seules situations qui peuvent se présenter.

exploitation

Commençons par donner un nom aux sommets qui sont des carrefours (A,B,C,D) et aux arêtes qui les joignent (a,b,c,d,e,f,g,h). Voici l'une des solutions trouvées, et la description du trajet, qui alterne les arêtes et les carrefours, c'est à dire les majuscules et les minuscules.

- Puisqu'on doit passer par chaque arête une fois et une seule, chaque lettre minuscule doit apparaître une seule fois : c'est bien le cas. Puisqu'on part d'un sommet et qu'on aboutit à un sommet, le trajet doit commencer et finir par une majuscule et comme il y a 8 minuscules, il doit y avoir 9 majuscules : c'est bien le cas. On constate aussi que les lettres B, C et D sont citées deux fois, alors que A l'est 3 fois. A quoi est-ce dû?
- ? ? ?
- Prenons la lettre C, par exemple : elle est encadrée, la première fois, par a et b : on arrive par a et on repart par b; la seconde fois par f et h.
- C est cité deux fois parce que c'est la moitié du nombre d'arêtes qui passent par C.
- O.K. Et D ..?
- C'est pareil.
- Et B ..?
- Une fois on arrive et on repart, et la seconde fois il ne reste qu'une arête et on ne peut pas repartir.
- Et A ?
- Comme il y a 5 arêtes, il faut passer 3 fois : deux fois on peut repartir et on utilise 4 arêtes et la dernière arête sert pour commencer.
- Bien, on a compris combien de fois chaque majuscule doit être citée. Maintenant, est-ce qu'il peut exister une autre solution, où A ne serait pas à un bout du trajet, mais seulement à l'intérieur?
- . . ?
- Si A n'était qu'à l'intérieur du trajet, il faudrait le citer combien de fois?
- 3.
- S'il est à l'intérieur, il doit être encadré par combien de minuscules, à chaque fois?
- 2.
- Si bien qu'en tout, il devrait être encadré de combien de minuscules?
- 6
- Et c'est possible?
- non : il n'y a que cinq arêtes qui arrivent en A.
- Donc A est <u>nécessairement</u> à un bout. Et B?
- C'est pareil.
- Pourquoi?
- Parce qu'il y a un nombre impair d'arêtes qui arrivent en B.
- On a donc obtenu une information importante: si un sommet est l'extrémité d'un nombre impair d'arêtes, il doit être <u>nécessairement</u> à un bout du trajet. Combien un trajet peut-il avoir de bouts?
- Deux : le départ et l'arrivée.
- Et alors?
- ? ? ?
- Dans un problème comme celui-là, pour qu'il y ait éventuellement une solution, combien peut-il y avoir de sommets impairs ? Au plus ?
- Deux.
- Et que peut-on dire sur la solution, si elle existe?

- Il faudra commencer par un sommet impair, et finir par l'autre.
- Très bien. Regardons le dessin ci-dessous, à gauche. Combien y a-t-il de sommets impairs?
- 4.
- Par conséquent ?
- C'est impossible.
- Et celui de droite?

- Tous les sommets sont pairs.
- Et alors?
- C'est impossible.
- Ah non! Ce qu'on a vu, c'est que s'il existe des sommets impairs il est nécessaire qu'ils ne soient que deux. On n'a rien dit pour le cas où il n'en n'existe pas. Et en plus, on a vu qu'il y a des solutions, et même beaucoup. Regardons ce qui se passe si on part de A vers B, en utilisant l'arête a. Le trajet commencera par AaB. Mais que se passerait-il si on supprimait l'arête a?
- ? ? ?
- On aurait un nouveau dessin dans lequel nous aurions combien de sommets impairs?
- Ah, oui, deux : A et B.
- Et alors?
- Comme on est en B, il faudra finir par l'autre sommet impair, c'est à dire A.
- Très bien : quand il n'y a pas de sommet impair, s'il y a une solution, elle finit nécessairement là où elle a commencé : c'est un circuit fermé. On a donc maintenant le résultat suivant : pour qu'on puisse parcourir un dessin sans lever le crayon, il faut que le nombre de sommets impairs soit nul ou égal à deux.
- Mais ça ne nous dit pas s'il y en a, ou comment il faut faire.
- C'est vrai mais c'est un moyen commode, et rapide, de savoir si ça vaut la peine de chercher ou s'il n'y a pas de solution. Par exemple, si un dessin possède 50 sommets, avec beaucoup d'arêtes pour chacun d'eux, il n'y a que 50 vérifications à faire, alors qu'il peut exister des milliards de chemins à essayer. Cela dit, est-ce qu'on peut trouver une solution, quand la condition est vérifiée?
- ? ? ?
- Est-ce qu'on peut trouver une méthode qui nous assure, si le nombre de sommets impairs est nul ou égal à deux, qu'il existe toujours au moins une solution?

L'échange avec les enfants est assez long, aussi je ne donne ici que les grandes lignes:

1) une arête possède deux extrémités. Le nombre total des extrémités d'arêtes, qui est égal à deux fois le nombre d'arêtes, est donc pair.

2) Si tous les sommets sont pairs, on part d'un sommet, A par exemple, et on parcourt les arêtes successives du graphe, en les effaçant (ou en les colorant). Deux situations peuvent se produire:

- soit on a eu de la chance (ou du flair), on a fait à chaque carrefour les bons choix et on revient en A après avoir effectivement parcouru tout le graphe. Dans ce cas, on a gagné.
- soit on revient en A sans pouvoir en repartir, et il reste un graphe à dessiner (ou plusieurs disjoints). De toute façon, on a supprimé un nombre pair d'extrémités d'arêtes, il en reste donc un nombre pair strictement plus petit.

3) on part alors d'un nouveau sommet, et on recommence. On obtient ainsi un nombre fini de

cycles, qui épuisent le dessin initial.

4) puisque celui-ci est connexe (d'un seul morceau) certains de ces cycles possèdent un ou plusieurs sommets communs.

5) on peut remplacer deux cycles possédant un (ou plusieurs) point(s) commun(s), par un seul cycle : on part d'un sommet de l'un des cycles et on parcourt celui-ci jusqu'au premier point commun. On passe alors sur l'autre cycle, que l'on parcourt en entier. On revient donc au carrefour commun et l'on repasse alors sur le cycle initial pour revenir au point de départ.

6) on a donc diminué d'une unité le nombre total de cycles, et on est donc assuré, après un nombre fini de telles opérations, d'obtenir un cycle unique qui parcourt tout le dessin.

7) Quand il existe deux sommets impairs, on part du premier et on parcourt une arête que l'on efface (ou marque). Ce faisant, on modifie la parité du sommet initial, qui devient pair, et du sommet suivant. Deux situations peuvent se produire:

- le sommet suivant est précisément le second sommet impair : il devient donc pair et nous sommes ramenés au cas précédent : tous les sommets sont pairs et il existe donc une solution.
- le sommet suivant était initialement pair : il devient donc impair. Nous obtenons alors un nouveau dessin, possédant deux sommets impairs, mais une arête de moins. On est donc assuré, en un nombre fini de coups, de rejoindre le second sommet impair.

On dispose maintenant d'un critère efficace:

Pour qu'on puisse parcourir un dessin sans lever le crayon, **il faut et il suffit que le nombre de sommets impairs soit nul ou égal à deux.**

Ce théorème est dû à Euler, mathématicien suisse du 18ème siècle.

Casse-tête n° 11 **le voyageur de commerce** (6 ème, 5 ème)

Il y a ici treize villes, reliées par des routes. Un voyageur de commerce habite A. Peut-il visiter chaque ville une fois et une seule et rentrer directement chez lui à la fin de son circuit?

exploitation

Personne n'a trouvé et tout le monde pense qu'il n'y a pas de solution. Comment être sûr?

- ça ressemble au problème précédent.
- comment ça?
- c'est un peu pareil, mais au lieu de passer par toutes les arêtes il faut passer par tous les sommets une fois et une seule et revenir au point de départ.
- c'est vrai, mais il y a quand même une différence : dans le problème précédent, comme on parcourt toutes les arêtes, on est obligé de passer par tous les sommets, éventuellement plusieurs fois. Ici, une fois que l'on est passé par un sommet, on utilise deux arêtes mais cela condamne toutes celles qui aboutissent à ce même sommet.

Les deux problèmes, qui ont l'air de se ressembler, sont en fait très différents. En particulier, bien que ce problème date d'un siècle environ (il est dû au mathématicien irlandais Hamilton), on ne connaît à ce jour aucun critère simple, analogue au critère d'Euler dans le problème précédent, permettant de trancher dans le cas d'un graphe quelconque : la seule "méthode" consiste à tout essayer : le temps d'exploration dépend donc du nombre de chemins, qui peut être considérable, et non des nombres de sommets ou d'arêtes, beaucoup plus réduits.

Cependant, dans ce cas ci, il est possible de trancher rapidement : ce graphe est en effet très particulier : il est possible de colorier les sommets en noir et blanc de telle façon que chaque sommet blanc ne soit relié qu'à des sommets noirs, et réciproquement. Cela signifie que s'il existe une solution, elle sera forcément de la forme BNBNBN ...
Il est donc facile de conclure : puisqu'on doit partir de A, qui est noir, et y revenir, le trajet, en terme de succession de noirs et de blancs, devrait comporter 8 noirs (puisque A doit être compté deux fois) et six blancs. C'est manifestement impossible : vieux problème de platanes et d'intervalles!

Ces deux problèmes de graphes rencontrent également un certain succès auprès des élèves. Mais leur exploitation complète occupe une séance entière.

Casse- tête n°12 **le triangle diabolique** (CM2 à terminale)

Remplir les triangles ci-dessus, avec selon les cas, les nombres de 1 à 3, 1 à 6, etc. La règle du jeu est la suivante : chaque nombre doit être égal à (la valeur absolue de) la différence des deux nombres qui sont au-dessus de lui, s'il y en a. Chaque nombre doit être utilisé une fois et une seule.

Exemple:

15 13 3 . .

2 10 . . etc.

8 . .

exploitation et solutions

le triangle de base 2

Pour le triangle de base 2, à remplir avec les nombres de 1 à 3, tout le monde trouve, bien sûr. Aux symétries près, il y a deux solutions:

```
3   2        3   1
  1            2
```

le triangle de base 3

Pour le triangle de base 3, à remplir avec les nombres de 1 à 6, l'exploration est beaucoup plus longue. Elle se simplifie cependant en remarquant que le plus grand (ici 6) doit être sur la première ligne, ce qui est d'ailleurs vrai pour n'importe quel triangle. De même 5 ne peut pas être plus bas que sur la seconde ligne, 4 la troisième, etc. Bref, on finit par trouver les quatre solutions (peut-être):

```
6   2   5      6   1   4      4   6   1      5   6   2
  4   3          5   3          2   5          1   4
    1              2              3              3
```

Même si on a trouvé, c'est très long. Dans le cas des triangles de taille supérieure, on sent bien que cela va être inextricable. On gagnerait certainement à réfléchir.

On a vu que le plus grand nombre doit être sur la première ligne. Les considérations de parité permettent d'en savoir un peu plus.

- Faire remarquer (ou découvrir) aux élèves que la différence entre deux nombres de même type (pair ou impair) est toujours un nombre pair, et que la différence de deux nombres de types différents est toujours impaire. Si l'on représente par 0 un nombre pair et par 1 un impair, on a :

$$0 - 0 = 0 ; \quad 1 - 1 = 0 ; \quad 0 - 1 = 1 - 0 = 1 \qquad (S)$$

- faire chercher (c'est un excellent exercice) toutes les combinaisons possibles de pairs et d'impairs sur la première ligne : dans le cas ci-dessus, il y en avait 8 :

<u>0 0 0</u>, <u>0 0 1</u>, <u>0 1 0</u>, <u>0 1 1</u>, 1 0 0 , <u>1 0 1</u>, 1 1 0, 1 1 1.

La dernière ne peut pas se produire car 6 est un nombre pair et doit être sur la première ligne. La seconde et la cinquième sont symétriques, de même que la 4ème et la 7ème : on peut donc négliger la 5ème et le 7 ème, et explorer seulement les combinaisons soulignées.

Voyons maintenant, en termes de parité, ce que sont les triangles correspondants, en appliquant les règles de soustraction (S) vues plus haut :

```
0   0   0      0   0   1      0   1   0      0   1   1      1   0   1
  0   0          0   1          1   1          1   0          1   1
    0              1              0              1              0

   A)             B)             C)             D)             E)
```

La solution A) ne peut pas convenir, parce qu'il n'y a que des nombres pairs, et qu'entre 1 et 6, il y a 3 nombres pairs et 3 impairs. Ce critère élimine aussi les cas D) et E), où apparaissent 4 impairs. Finalement, il nous reste seulement deux cas à étudier (B et C), au lieu de huit!

<u>Cas B)</u>: (on notera les cases paires avec des caractères ajourés, les impairs en gras)

𝕒 𝕓 **c**

𝕕 **e**

f

Comme 6 doit être sur la première ligne, il ne peut être qu'en 𝕒 ou en 𝕓 : on a donc 2 sous-cas à étudier :

𝕒 **= 6 :** alors **5** est en **c** (s'il était en e, il ne pourrait provenir que de 5 = 6-1, et 𝕓 devrait valoir 6, ce qui est impossible). Dans ce cas, 3 peut-être en e ou f.

- si **e = 3** : alors 𝕓 **= 2** et 𝕕 **= 4**, et on aboutit à :

6 2 5

4 3

1

- si **f = 3** : alors **e = 1**, ce qui implique 𝕓 **= 4** et 𝕕 **= 2**, qui implique f= 2 - 1= 1 = e, ce qui est impossible. Reste l'autre cas :

𝕓 **= 6 :** alors **5** est en **c** ou **e**:

- si **c = 5** : alors **e = 6-5 = 1** et donc **f = 3**. Dans ce cas, 𝕕 = 3 + 1 = **4** et par conséquent 𝕒**=2.**

2 6 5

4 1

3

- si **e = 5** : alors **c = 1** et donc **f = 3**, d'où 𝕕**= 2** et 𝕒 **= 4**.

4 6 1

2 5

3

ce qui achève l'étude du cas B). Reste le cas C)

<u>Cas C</u> : par symétrie, il suffit d'étudier le cas 𝕒 **= 6** .

6 b 𝕔

d e

𝕗

Alors **b=5** ou **d=5**.

- si **b = 5** : alors **d= 6-5 = 1** et par conséquent **e = 3**. D'où 𝕔 **= 2**.
Malheureusement, f vaut : 3-1 = 2 = c , ce qui est impossible.

- si **d = 5** : alors **b = 1** et **e = 3**. D'où 𝕔**= 4** et 𝕗 **= 2** ce qui nous donne
bien la dernière solution trouvée précedemment :

6 1 4

5 3

2

le triangle de base 4

Là encore, les conditions de parité, jointes au fait qu'il doit y avoir 5 nombres pairs et 5 impairs, simplifient considérablement les choses, et il n'y a finalement que trois types de configurations à explorer, au lieu de seize: 0 0 1 0 ; 0 0 1 1 ; 0 1 0 1, ce qui est appréciable.
Les 4 solutions sont :

6 10 1 8	8 10 1 6	8 10 3 9	8 3 10 9
4 9 7	2 9 5	2 7 6	5 7 1
5 2	7 4	5 1	2 6
3	3	4	4

le triangle de base 5

Cette fois, sur les 32 cas possibles, seuls 5 conduisent aux 8 nombres impairs nécessaires :
0 0 1 0 1, 0 0 1 1 1, 0 1 1 1 1, 1 0 0 0 1, 1 0 0 1 1.
Malgré tout, l'exploration peut s'avérer longue : c'est sans doute un bon prétexte pour parler d'arborescence, . . . et partager la tâche entre les élèves. Finalement, il n'y a qu'une solution, à la symétrie près, qui provient de 0 0 1 0 1:

6 14 15 3 13

8 1 12 10

7 11 2

4 9

5

le triangle de base 6

Nous devons avoir, dans ce cas, 11 nombres impairs, 10 pairs, et 64 combinaisons binaires possibles. Après les avoir écrites, et déterminé les couples qui sont symétriques, on teste les combinaisons restantes . . . et on a l'heureuse surprise de constater qu'aucune ne conduit à 11 nombres impairs! Le triangle de base 6 est donc **impossible**.

Un peu d'observation montre de plus que, dans chacun des cas explorés, le nombre de 1 est **toujours pair**, ce qui ne s'était pas produit pour les triangles 3, 4 et 5. La cause est la suivante :

Chaque triangle peut être vu comme une somme terme à terme (et modulo 2) de triangles "primitifs", dont la première ligne ne comporte qu'un seul 1. Il en existe 6 et, par symétrie, 3 seulement à vérifier :

```
1 0 0 0 0 0       0 1 0 0 0 0       0 0 1 0 0 0
 1 0 0 0 0         1 1 0 0 0         0 1 1 0 0
  1 0 0 0           0 1 0 0           1 0 1 0
   1 0 0             1 1 0             1 1 1
    1 0               0 1               0 0
     1                 1                 0
```

Chacun d'eux comporte un nombre pair de 1. La somme modulo 2 fait disparaitre éventuellement les 1 par paires : 1 + 1 = 0. Par conséquent, toute somme de triangles primitifs conduit à un nombre pair de 1.

Ce résultat peut inciter à chercher s'il existe d'autres tailles de triangles pour lesquelles cette propriété se vérifie. Cela conduit à l'étude du triangle de Pascal modulo 2, et à de jolis théorèmes sur le nombre de 1 apparaissant dans une ligne. En particulier on peut atteindre le résultat suivant: si $n = 2^k-2$, tous les triangles primitifs sont pairs. Si $k > 2$, le triangle de base n est impossible.

Par ailleurs, d'après Martin Gardner, un certain Taylor aurait fourni une preuve astucieuse montrant qu'en fait il n'y a pas de solution pour $n > 9$. L'ordinateur montre qu'il n'y en a pas non plus pour n= 7 et 8.

commentaires: Ce problème est typiquement un "problème au long cours", qui nécessite beaucoup plus de deux heures, et que les volontaires peuvent explorer pendant leur temps libre, quitte à échanger leurs informations, leurs "trucs". Je le propose souvent en fin de séance, pour le voyage de retour ... en signalant qu'il peut être utile de se souvenir que nous avons parlé de nombres pairs et impairs pendant deux heures.

Casse-tête n°13: **avec les nombres de 1 à 9** (à partir du CE2)

Peut-on remplir ce triangle avec les nombres de 1 à 9 , pris chacun une fois et une seule, de telle sorte que la somme sur chacun des côtés soit constante?

exploitation

Ce casse-tête, qui ne fait pas appel à des propriétés de parité, permet cependant une exploitation assez riche, elle aussi au long cours. Le texte qui suit, dont la première partie n'a été testée (mais avec succès) qu'avec un enfant de CE2 de mes amis, donne une idée de ce qu'on peut faire. Pour des raisons de place, je renonce ici au dialogue (qui fut actif) tout en gardant certaines présentations, même si elles paraissent un peu puériles hors contexte.

Comme on ne dit rien sur la constante, il est utile, pour une première phase exploratoire, de la fixer égale à 17, pour des raisons que l'on élucidera plus tard. (plusieurs solutions sont trouvées, et il s'agit maintenant de voir comment on pourrait les trouver **toutes**).

Pour la commodité du repèrage, on donne un nom à chaque place: on pourra dire ainsi je met le 1 au point a, par exemple, au lieu de dire je met le 1 en haut. On peut aussi dire, en abrégé a=1, ce qui signifie la même chose. Il faut donc voir les lettres comme les places (ou des boites) dans lesquelles on va essayer de mettre des nombres. Par exemple, pour dire que la somme vaut 17, on écrira : a + b + c + d = 17, ce qui veut dire qu'on veut mettre quatre nombres dans les boites a, b, c, d et que la somme de ces nombres doit faire 17.

Par exemple, on peut prendre a = 1; b = 3; c = 4; d = 9.

```
         a                            1

       b    i                       3    i

     c         h                  4         h

   d    e    f    g             9    e    f    g
```

Cela dit, on peut écrire qu'on cherche à placer les nombres de telle façon que l'on ait:

a + b + c + d = 17
d + e + f + g = 17
g + h + i + a = 17

et si on additionne tout, à gauche et à droite, on aura:

(a + b + c + d + e + f + g + h + i)+ a + d + g = 17 + 17+ 17 = 51 **(1)**

où les lettres qui représentent les sommets, a, d, g, apparaissent deux fois puisque chacune appartient à deux côtés.(ce qui avait été remarqué par l'enfant)

Par ailleurs les lettres a, b, ... , h, i représentent les nombres de 1 à 9 , mais eventuellement dans un autre ordre. Comme l'ordre n'a pas d'importance quand on fait une addition, on peut donc écrire que:

(a + b + c + d + e + f + g + h + i) = 1+ 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45.

On peut alors remplacer, dans la formule (1), ce qui est entre parenthèses par 45, ce qui donne:

45 + a + d + g = 51 **(2).**

Maintenant, que faut-il ajouter à 45 pour obtenir 51? 6, bien sûr.

45 + 6 = 51 **(3)**

et si on compare les formules (2) et (3), on voit que c'est la même, à condition que a+d+g = 6.

On a donc une information de plus qu'au début :
la somme des trois sommets vaut 6.

Comment peut-on faire 6 en prenant trois nombres différents entre 1 et 9?
Il n'y a qu'une façon de s'y prendre : 1 + 2 + 3 = 6, à l'ordre près. Notre triangle ressemble donc à:

1

b i

c h

2 e f **3**

(on verra plus tard ce qui se passe si on tient compte de l'ordre: 123, 132, 231, 213, 312, 321)

Maintenant, si on veut que le côté qui va de 1 à 2 fasse 17, il faut que l'on ait:

1 + b + c + 2 = 17, ce qui est pareil que 1 + 2 + b + c = 17 ou que 3 + b + c = 17.

Mais ça, c'est pareil que de dire **b + c = 14** , parce que si on remplace b+c par 14, on obtient bien 3 + 14 = 17, qui est vrai.

De la même façon, en regardant les deux autres côtés, on trouve que :

e + f = 12 (car 2 + 12 + 3 = 17),

et que : **i + h = 13** (car 1 + 13 + 3 = 17).

Notre gros problème du début se ramène maintenant à trois petits problèmes bien plus simples:

il nous reste les nombres 4, 5, 6, 7, 8, 9, pour réaliser :

b + c = 14 ; e + f = 12 et i +h = 13.

Commençons par b et c . Il n'y a que deux façons d'obtenir 14 avec les nombres qui nous restent : 5 + 9 et 6 + 8 et c'est tout! (toujours à l'ordre près). On a donc deux cas à étudier :

<u>cas n°1 : 5 + 9 = 14</u> dans ce cas, notre triangle ressemble à :

1

5 i

9 h

2 e f **3**

et il nous reste les nombres 4, 6 , 7 , 8 pour réaliser e+f = 12 et i+h = 13.
Il n'y a qu'une seule façon d'obtenir 12 : 12 = 4 + 8; et il reste 6 et 7 pour faire 13, ce qui est vrai et nous donne une première solution :

1

5 **7**

9 **6**

2 **4** **8** **3** (fin du cas n°1)

cas n°2 : 6 + 8 =14 : dans ce cas, notre triangle ressemble à :

1

6 i

8 h

2 e f **3**

et il nous reste les nombres 4 , 5 , 7 , 9 pour réaliser e+f = 12 et i+h = 13.

Il n'existe qu'une façon d'obtenir 12 : 5 + 7, et il reste 4 et 9 dont la somme vaut effectivement 13, d'où une autre solution:

1

6 **9**

8 **4**

2 **5** **7** **3** (fin du cas n°2)

Voilà, on a fini: quand la somme vaut 17 , il y a **deux solutions** différentes, **si on ne tient pas compte de l'ordre.**

On a vu plus haut qu'il y avait 6 façons de ranger les nombres 1, 2, et 3 sur les sommets (la recherche des ces 6 façons, des symétries qui apparaissent, etc, peut faire l'objet d'une activité spécifique)

1	**3**	**2**
2 **3**	**1** **2**	**3** **1**
1	**3**	**2**
3 **2**	**2** **1**	**1** **3**

Prenons notre première solution, et la cinquième façon (soulignée) de placer les sommets, par exemple, et reportons, dans le même ordre, les nombres respectivement compris entre 1 et 2, 2 et 3, 3 et 1, on obtient:

1	**3**
5 **7**	**8** **6**
9 **6**	**4** **7**

2 4 8 3   **<u>2</u> 9 5 <u>1</u>**

la solution initiale donne la cinquième solution

Comme on peut faire pareil avec les autres permutations, on obtient donc **6 solutions distinctes**. Mais ce n'est pas tout! Si l'on prend l'une d'entre elles, par exemple celle ci-dessus, à droite, on peut échanger le 4 et le 8, ou le 6 et le 7, ou le 9 et le 5, sans que cela change les sommes le long des côtés. Et ces échanges peuvent se faire séparément ou simultanément.

Par exemple, si on échange seulement le 9 et le 5, on obtient

3   **3**

8 6 et si on échange **8 <u>7</u>**
de plus le 7 et le 6
4 7   **4 <u>6</u>**

2 <u>5 9</u> 1   **2 5 9 1**

ce qui fournit encore une autre solution. Comme il y a 2 façons pour placer le 9 et le 5, 2 façons pour le 8 et le 4, et 2 façons pour le 6 et le 7, cela nous donnera 2x2x2 = 8 solutions à partir de la 5ème solution.

Résumons-nous:
notre solution n°1 donne 6 solutions, en changeant l'ordre des sommets. Chacune d'elles donne huit solutions en changeant l'ordre sur les côtés. La solution n°1 donne donc, en fait, une famille de 6x8 = 48 solutions. De même la seconde. Par conséquent,

quand la somme vaut S = 17, il y a 96 solutions, réparties en deux familles, et on les a toutes, ou du moins on sait comment faire pour les attraper.

Maintenant, il existe peut-être des solutions avec d'autres sommes.

Est-ce que la somme peut être égale à 16? Non! Reprendre le raisonnement du début :

si S = 16: 3 x 16 = 48 = 45 + a+d+g d'où a+d+g = 3 , ce qui est impossible.

Est-ce que la somme peut être égale à 18?

3 x 18 = 54 = 45 + a+d+g d'où **a+d+g = 9.**

Comment obtenir 9 ?

9 = 1 + 2 + 6
9 = 1 + 3 + 5
9 = 2 + 3 + 4,

et c'est tout, à l'ordre près, mais cela, on sait le faire : chaque solution nous en donnera 48.
Nous avons donc trois cas à étudier, c'est <u>plus long</u>, mais <u>ce n'est pas plus difficile</u>. (ici, en classe, on peut diviser la tâche entre plusieurs équipes).

<u>cas n°1: 9 = 1+2+6</u>
il nous reste à utiliser les nombres 3, 4, 5, 7, 8, 9, et notre triangle ressemble à:

1   on fait comme plus haut, et notre problème se ramène aux trois suivants:

b i

c h

2 e f **6**

b + c = 15
e + f = 10
i + h = 11.

Il n'y a qu'une façon d'obtenir 15 avec les nombres dont on dispose : 7 + 8 = 15, et il reste alors 3 , 4 , 5 , 9 pour satisfaire les deux autres égalités, ce qui est manifestement impossible. Le cas n°1 ne peut donc pas conduire à une solution.

<u>cas n°2: 9 = 1+3+5</u>
il nous reste à utiliser les nombres 2, 4, 6, 7, 8, 9, et notre triangle ressemble à :

1

b i

c h

3 e f **5**

on fait comme plus haut, et notre problème se ramène aux trois suivants:

b + c = 14
e + f = 10
i + h = 12.

Il n'y a qu'une façon d'obtenir 14 avec les nombres dont on dispose : 6 + 8 = 14, et il reste alors 2 , 4 , 7 , 9 pour satisfaire les deux autres égalités, ce qui est manifestement impossible. Le cas n°2 ne peut donc pas non plus conduire à une solution.

<u>cas n°3: 9 = 2+3+4</u> il nous reste à utiliser les nombres 1, 5, 6, 7, 8, 9, et notre triangle ressemble à :

2

b i

c h

3 e f **4**

on fait comme plus haut, et notre problème se ramène aux trois suivants:

b + c = 13
e + f = 11
i + h = 10.

Commençons cette fois par la dernière: Il n'y a qu'une façon d'obtenir 10 avec les nombres dont on dispose : 10 = 1+ 9, et il reste alors 5, 6, 7, 8 pour satisfaire les deux autres égalités, ce qui est manifestement impossible. Le cas n°3 ne peut donc pas non plus conduire à une solution.
Aucun des seuls trois cas possibles ne conduit à une solution:

il n'y a donc pas de solutions quand S = 18.

On peut alors, sur le même principe, et toujours en partageant les tâches car cela devient long, explorer les sommes supérieures:

pour **S = 19**, la somme des sommets vaut 12, il y a 7 décompositions et on obtient **4** solutions:

1	1	2	2
5 7	6 9	5 6	6 9
9 3	8 2	9 4	8 1
4 2 6 7	4 3 5 7	3 1 8 7	3 4 5 7

pour **S = 20** , la somme des sommets vaut 15, il y a 8 décompositions et **6** solutions:

1	2	2	3	4	4
6 7	4 7	6 9	4 9	2 7	3 9
8 3	9 3	7 1	8 1	9 3	8 1
5 2 4 9	5 1 6 8	5 3 4 8	5 2 6 7	5 1 8 6	5 2 7 6

pour **S = 21** , la somme des sommets vaut 18, il y a 7 décompositions et **4** solutions :

3	3	3	3
5 8	4 7	5 9	2 6
7 1	8 2	6 1	9 4
6 2 4 9	6 1 5 9	7 2 4 8	7 1 5 8

pour **S = 22**, la somme des sommets vaut 21, il y a 3 décompositions, et **aucune** solution, comme pour S= 18. Curieux. D'autant plus que pour S = 21, il y a précisément le même nombre de décompositions et de solutions que pour S=19. (A ce stade, on peut, soit exploiter tout de suite cette observation si quelqu'un fait la remarque, soit poursuivre l'exploration avec S = 23.)

pour **S = 23**, la somme des sommets vaut 24 , il n'y a qu'une décomposition (7+8+9) et **2** solutions (comme pour S=17):

7	7
2 4	3 6
6 3	5 1
8 1 5 9	8 2 4 9

pour **S = 24** et plus, la somme des sommets vaut 27 ou plus et c'est donc impossible.

tableau récapitulatif:

S	16 ou moins	17	18	19	20	21	22	23	24 ou plus
N	0	2	0	4	6	4	0	2	0

Tout ceci parait bien trop symétrique pour être dû au hasard: essayons d'y voir clair.
17 et 23 ont le même nombre de solutions, 18 et 22 aussi, et 19 et 21 aussi.
De plus on a 17 + 23 = 18 + 22 = 19 + 21 = (20 + 20) = 40. Coïncidence?

Observons les solutions pour S = 19 et 21.

Dans chaque cas, elles se répartissent en deux groupes qui possédant respectivement les sommets:

S = 19	S = 21
1 4 7	3 6 9
2 3 7	3 7 8

et on remarque que sur chaque ligne, la somme de deux nombres symétriques par rapport au milieu vaut 10. En fait, c'est bien naturel : considérons un triangle qui ne soit rempli que de 10, et dont la somme sur chaque côté vaut donc 40, et un triangle dont la somme vaut 17. On obtiendra ipso facto une solution pour S = 40 - 17 = 23 en faisant la différence terme à terme entre les deux triangles initiaux :

10		1		9	10 - 1 = 9;
10 10	-	6 9	=	4 1	10 - 6 = 4; 10 - 9 = 1;
10 10		8 4		2 6	10 - 8 = 2; 10 - 4 = 6;
10 10 10 10		2 5 7 3		8 5 3 7	etc .....

On reconnaît dans ce dernier une permutation de la seconde solution S = 23 citée plus haut.

Le cas S = 20 est intéressant : puisque 20 = 40 - 20, chaque solution pour S = 20 donne une solution S=20. Question : est-ce une autre ou est-ce la même, à permutation près?

remarque : il y a 18 solutions de base pour placer les nombres de 1 à 9 sur ce triangle de façon que les sommes, sur chaque côté, soient égales. Comme chaque solution en donne 48, par permutations, il y a donc 48 x 18 = 864 solutions différentes à ce problème, alors qu'il existe 362880 façons de ranger les nombres sur le triangle. La probabilité de trouver une solution en plaçant les nombres au hasard est donc de 864 / 362880 ≅ 2,38 ‰ , un peu plus que 2 chances sur 1000. Cela valait la peine de réfléchir!

la bibliographie sommaire

Penser à:

- la parité ; le livre du problème ; IREM Strasbourg? 1975? (bibli)
- Jeux I et II , APM (le pb du chat?) (tél Francis)
- M.Gardner (bibli) : les cubes ?

sur le pb des cavaliers
- Revue du Palais
- article dans le bulletin de l'APM
- tiré à part de Bermond (arch)

sur le triangle diabolique:
- Revue du Palais 1977- 78?
- M.Gardner
- Steinhaus : 100 pbs pour un pb proche (bibli)

les nbs de 1 à 9 : l'énoncé dans F. Cerquetti-Aberkane : Histoires de comptes (Epigones)

Ajouté en février 2008.

Sur le casse –tête n°13. Ces dernières années, nous avons surtout travaillé d'abord avec les nombres de 1 à 6 disposés à raison de 3 par côté. C'est beaucoup plus simple et cependant très riche (symétries, compléments, rotations, groupe S 3, etc) J'ai la flemme de rédiger.
Sur le triangle diabolique : une démonstration complète d'impossiblité pour n>5 existe dans un numéro de Quadrature (je n'ai pas la réf chez moi)