# Transformations d'images

A.-M. Aebischer

IREM de Franche-Comté

- Une image numérique est composée de pixels ;

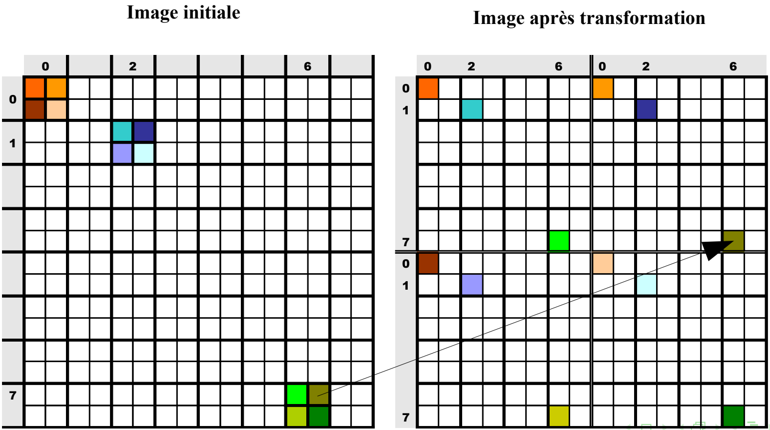
- *Brouiller une image*, c'est appliquer une méthode pour mélanger les pixels.

- Une image numérique est composée de pixels ;

- *Brouiller une image*, c'est appliquer une méthode pour mélanger les pixels.

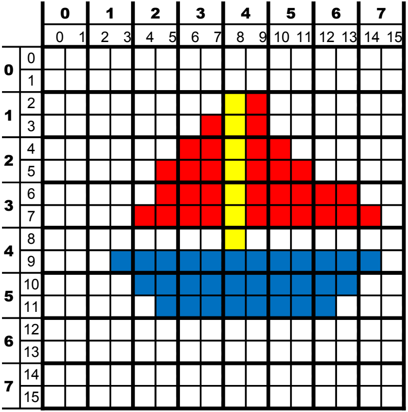
# La transformation du photomaton

Pour transformer une image de dimension paire :



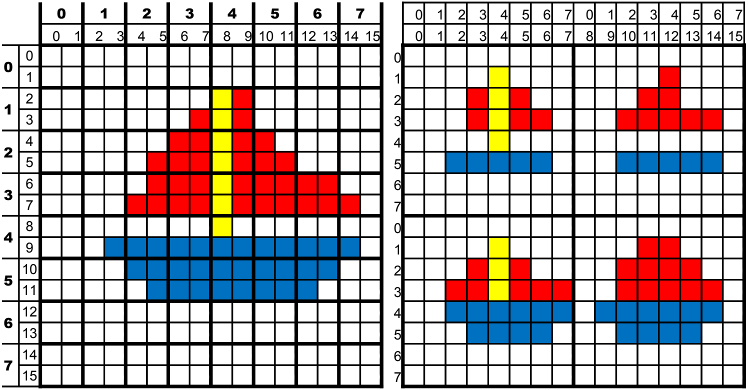
# La transformation du photomaton

Exemple 1



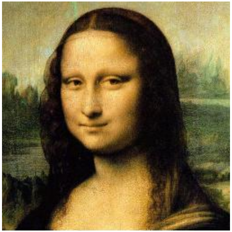
# La transformation du photomaton

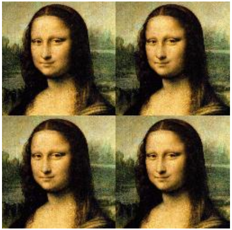
Exemple 1

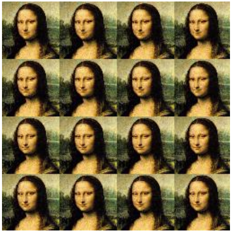


# La transformation du photomaton

Exemple 2







Et si on continue ?

# Bilan des essais

On retrouve toujours l'image initiale au bout d'un nombre fini d'essais.
Ce nombre d'essais est très variable :

- *La Joconde* de taille 256x256 : 8 étapes ;
- *La Joconde* de taille 260x260 : 36 étapes ;
- *La Joconde* de taille 512x512 : 9 étapes ;
- *Les manchots* de taille 640x640 : 210 étapes.

## Bilan des essais

On retrouve toujours l'image initiale au bout d'un nombre fini d'essais.
Ce nombre d'essais est très variable :

- *La Joconde* de taille 256x256 : 8 étapes ;
- *La Joconde* de taille 260x260 : 36 étapes ;
- *La Joconde* de taille 512x512 : 9 étapes ;
- *Les manchots* de taille 640x640 : 210 étapes.

# Bilan des essais

On retrouve toujours l'image initiale au bout d'un nombre fini d'essais.
Ce nombre d'essais est très variable :

- *La Joconde* de taille 256x256 : 8 étapes ;
- *La Joconde* de taille 260x260 : 36 étapes ;
- *La Joconde* de taille 512x512 : 9 étapes ;
- *Les manchots* de taille 640x640 : 210 étapes.

# Bilan des essais

On retrouve toujours l'image initiale au bout d'un nombre fini d'essais.
Ce nombre d'essais est très variable :

- *La Joconde* de taille 256x256 : 8 étapes ;
- *La Joconde* de taille 260x260 : 36 étapes ;
- *La Joconde* de taille 512x512 : 9 étapes ;
- *Les manchots* de taille 640x640 : 210 étapes.

## Questions

- Pourquoi retrouve-t-on toujours l'image initiale en mélangeant les pixels suivant cette méthode ?
- Cette propriété est-elle liée à la transformation utilisée ?
- Comment prévoir en fonction de la taille de l'image le nombre d'essais qui la feront réapparaître à l'identique ?

# Questions

- Pourquoi retrouve-t-on toujours l'image initiale en mélangeant les pixels suivant cette méthode ?
- Cette propriété est-elle liée à la transformation utilisée ?
- Comment prévoir en fonction de la taille de l'image le nombre d'essais qui la feront réapparaître à l'identique ?

## Questions

- Pourquoi retrouve-t-on toujours l'image initiale en mélangeant les pixels suivant cette méthode ?
- Cette propriété est-elle liée à la transformation utilisée ?
- Comment prévoir en fonction de la taille de l'image le nombre d'essais qui la feront réapparaître à l'identique ?

# Simplification du problème : les lignes

Lorsqu'on applique la transformation du photomaton, les pixels d'une ligne sont tous envoyés sur une même ligne.

Exemple : cas d'une image à 8 pixels

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | Position initiale |
| 0 | 2 | 4 | 6 | 1 | 3 | 5 | 7 | Position après transformation |

La transformation reclasse les entiers : les pairs d'abord, suivis des entiers impairs.

# Simplification du problème : les colonnes

Lorsqu'on applique la transformation du photomaton, les pixels d'une colonne sont tous envoyés sur une même colonne.

Exemple : cas d'une image à 8 pixels

| Position initiale | Position après transformation |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 6 |
| 4 | 1 |
| 5 | 3 |
| 6 | 5 |
| 7 | 7 |

Le déplacement d'un pixel par la méthode du photomaton s'obtient en appliquant la <u>même</u> transformation $\sigma$ sur le numéro de ligne et sur le numéro de colonne :

$$(i,j) \mapsto (\sigma(i), \sigma(j))$$

Il suffit d'étudier la transformation sur les lignes !

# Quelques cas particuliers

**Cas d'une image à 8 pixels**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | Position initiale |
| 0 | 2 | 4 | 6 | 1 | 3 | 5 | 7 | après 1 transformation |
| 0 | 4 | 1 | 5 | 2 | 6 | 3 | 7 | après 2 transformations |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | après 3 transformations |

Temps de retour $= 3$

# Quelques cas particuliers

## Cas d'une image à 10 pixels

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Position initiale |
| 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | après 1 transformation |
| 0 | 4 | 8 | 3 | 7 | 2 | 6 | 1 | 5 | 9 | après 2 transformations |
| 0 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 9 | après 3 transformations |
| 0 | 7 | 5 | 3 | 1 | 8 | 6 | 4 | 2 | 9 | après 4 transformations |
| 0 | 5 | 1 | 6 | 2 | 7 | 3 | 8 | 4 | 9 | après 5 transformations |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | après 6 transformations |

Temps de retour $= 6$

## Quelques cas particuliers

- Pourquoi retrouve-t-on toujours l'image initiale en mélangeant les pixels suivant cette méthode ?
- Cette propriété est-elle liée à la transformation utilisée ?
- Comment prévoir en fonction de la taille de l'image le nombre d'essais qui la feront réapparaître à l'identique ?

## Quelques cas particuliers

- Pourquoi retrouve-t-on toujours l'image initiale en mélangeant les pixels suivant cette méthode ?
- Cette propriété est-elle liée à la transformation utilisée ?
- Comment prévoir en fonction de la taille de l'image le nombre d'essais qui la feront réapparaître à l'identique ?

## Quelques cas particuliers

- Pourquoi retrouve-t-on toujours l'image initiale en mélangeant les pixels suivant cette méthode ?
- Cette propriété est-elle liée à la transformation utilisée ?
- Comment prévoir en fonction de la taille de l'image le nombre d'essais qui la feront réapparaître à l'identique ?

## Explication « locale » pour une permutation quelconque

Considérons la permutation $\sigma$ de 8 éléments suivante :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | Position initiale |
| 1 | 4 | 5 | 2 | 6 | 3 | 0 | 7 | après 1 transformation |

Il semble naturel de suivre les images successives d'un élément.

- $7 \longrightarrow 7$ (invariant)
- $0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 4 \longrightarrow 6 \longrightarrow 0$ (retour en 4 itérations)
- $2 \longrightarrow 5 \longrightarrow 3$ (retour en 3 itérations)

Ainsi, on est assuré que $\sigma^{12} = \mathrm{id}$.

# Explication « locale » pour une permutation quelconque

Considérons la permutation $\sigma$ de 8 éléments suivante :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | Position initiale |
| 1 | 4 | 5 | 2 | 6 | 3 | 0 | 7 | après 1 transformation |

Il semble naturel de suivre les images successives d'un élément.

- $7 \longrightarrow 7$ (invariant)
- $0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 4 \longrightarrow 6 \longrightarrow 0$ (retour en 4 itérations)
- $2 \longrightarrow 5 \longrightarrow 3$ (retour en 3 itérations)

Ainsi, on est assuré que $\sigma^{12} = \mathrm{id}$.

## Explication « locale » pour une permutation quelconque

Considérons la permutation $\sigma$ de 8 éléments suivante :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | Position initiale |
| 1 | 4 | 5 | 2 | 6 | 3 | 0 | 7 | après 1 transformation |

Il semble naturel de suivre les images successives d'un élément.

- $7 \longrightarrow 7$ (invariant)
- $0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 4 \longrightarrow 6 \longrightarrow 0$ (retour en 4 itérations)
- $2 \longrightarrow 5 \longrightarrow 3$ (retour en 3 itérations)

Ainsi, on est assuré que $\sigma^{12} = \mathrm{id}$.

## Explication « locale » pour une permutation quelconque

Considérons une ligne $(1, 2, \ldots, N)$ et un entier $i_0$, $1 \leqslant i_0 \leqslant N$.

- tant que la valeur initiale n'a pas réapparu, les images successives de $i_0$ sont deux à deux distinctes (bijection) ;
- les images successives de $i_0$ par une permutation donnée prennent au maximum $N$ valeurs distinctes ;
- la valeur initiale du nombre réapparaît donc au bout d'une nombre fini d'itérations.

# Explication « locale » pour une permutation quelconque

Considérons une ligne $(1, 2, \ldots, N)$ et un entier $i_0$, $1 \leqslant i_0 \leqslant N$.

- tant que la valeur initiale n'a pas réapparu, les images successives de $i_0$ sont deux à deux distinctes (bijection) ;
- les images successives de $i_0$ par une permutation donnée prennent au maximum $N$ valeurs distinctes ;
- la valeur initiale du nombre réapparaît donc au bout d'une nombre fini d'itérations.

## Explication « locale » pour une permutation quelconque

Considérons une ligne $(1, 2, \ldots, N)$ et un entier $i_0$, $1 \leqslant i_0 \leqslant N$.

- tant que la valeur initiale n'a pas réapparu, les images successives de $i_0$ sont deux à deux distinctes (bijection) ;
- les images successives de $i_0$ par une permutation donnée prennent au maximum $N$ valeurs distinctes ;
- la valeur initiale du nombre réapparaît donc au bout d'une nombre fini d'itérations.

# Explication locale pour une permutation quelconque

$$(\forall i \in [1, N]) \quad (\exists n_i \in \mathbb{N}) \qquad \sigma^{n_i}(i) = i$$

$M = \mathrm{PPCM}(n_1, \ldots, n_N)$ est donc un nombre d'itérations qui renvoie l'image initiale :

$$(\forall i \in [1, N]) \quad \sigma^M(i) = i$$

# Explication locale pour une permutation quelconque

C'est une méthode très naturelle qui correspond à la décomposition de la permutation en produit de cycles disjoints.

*Exemple* : $\sigma$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 5 | 4 | 6 | 0 | 3 | 1 |

Ici :

$0 \to 2 \to 4 \to 0$ : $\sigma^3(0) = 0$ idem pour 2 et 4

$1 \to 5 \to 3 \to 6 \to 1$ : $\sigma^4(1) = 1$, idem pour 5, 3 et 6

Ainsi, $\sigma^{12} = id$.

$$\sigma = (0\,2\,4)(1\,5\,3\,6)$$

# Explication générale

L'ensemble $\mathcal{S}_N$ des permutations d'un ensemble à $N$ éléments a une structure de groupe : $(\mathcal{S}_N, \circ)$. C'est un groupe fini de cardinal $N!$.

$$(\forall f \in \mathcal{S}_N)(\exists k \in \mathbb{N}) \quad f^k = \mathrm{id}$$

Le plus petit entier $k$ vérifiant $f^k = \mathrm{id}$ est appelé *ordre* de $f$.

Quel est l'ordre de la permutation qui intervient dans la transformation du photomaton ?

# Ordre de la transformation du photomaton

La transformation du photomaton appliquée à une ligne de longueur $2p$ peut se décrire ainsi :

$$\begin{cases} i \text{ pair} & \sigma(i) = \frac{i}{2} \\ i \text{ impair} & \sigma(i) = p + E[\frac{i}{2}] \end{cases}$$

## La taille de l'image est une puissance de 2

Appliquons la transformation du photomaton à une ligne de longueur $2^N$. Chaque nombre de 0 à $2^N - 1$ se représente en base 2 par un nombre à $N$ chiffres (0 ou 1).

$$i \text{ pair} \quad : i = \underbrace{101\ldots1}_{\frac{i}{2}}0 \quad \sigma(i) = \frac{i}{2} = 0\underbrace{101\ldots1}_{\frac{i}{2}}$$

$$i \text{ impair} : i = \underbrace{101\ldots1}_{E[\frac{i}{2}]}1 \quad \sigma(i) = 2^{N-1} + E[\tfrac{i}{2}] = 1\underbrace{101\ldots1}_{E[\frac{i}{2}]}$$

La transformation se traduit par un décalage (circulaire) des chiffres d'un cran vers la droite.

# La taille de l'image est une puissance de 2

**Conclusion**

Si une image est un carré de taille $2^N \times 2^N$, l'ordre de la permutation associée à la transformation du photomaton est $N$.

## Image de taille quelconque

- On commence par étudier la permutation sur une ligne de longueur $2N$ ($N$ n'étant pas une puissance de 2) ;
- on essaie de ramener le problème à une ligne de longueur $2^p$, ce qui ne peut pas se faire en mettant bout à bout les lignes de longueurs $2N$ ;
- dans la transformation, la dernière case (ou la première) est invariante, on la met donc de côté et on étudie une ligne de longueur $2N - 1$.

# Image de taille quelconque

- On commence par étudier la permutation sur une ligne de longueur $2N$ ($N$ n'étant pas une puissance de 2) ;
- on essaie de ramener le problème à une ligne de longueur $2^p$, ce qui ne peut pas se faire en mettant bout à bout les lignes de longueurs $2N$ ;
- dans la transformation, la dernière case (ou la première) est invariante, on la met donc de côté et on étudie une ligne de longueur $2N - 1$.

## Image de taille quelconque

- On commence par étudier la permutation sur une ligne de longueur $2N$ ($N$ n'étant pas une puissance de 2) ;
- on essaie de ramener le problème à une ligne de longueur $2^p$, ce qui ne peut pas se faire en mettant bout à bout les lignes de longueurs $2N$ ;
- dans la transformation, la dernière case (ou la première) est invariante, on la met donc de côté et on étudie une ligne de longueur $2N - 1$.

# Image de taille quelconque

Soit $q$ le plus petit entier tel que $2^q - 1$ soit multiple de $2N - 1$.

C'est possible car : $\mathrm{PGCD}(2, 2N-1) = 1$.
2 est donc inversible dans $\mathbb{Z}/(2N-1)\mathbb{Z}$ :

$$2 \in (\mathbb{Z}/(2N-1)\mathbb{Z})^*$$

$[(\mathbb{Z}/(2N-1)\mathbb{Z})^*, \times]$ est un groupe multiplicatif.

$q =$ ordre de 2 dans $(\mathbb{Z}/(2N-1)\mathbb{Z})^*$ vérifie $2^q \equiv 1 \mod [2N-1]$.

## Image de taille quelconque

- Il donc un entier naturel $k$ tel que $2^q - 1 = k(2N - 1)$ ;
- si l'on met bout à bout $k$ lignes de longueur $2N - 1$, on constitue ainsi une ligne de longueur $2^q - 1$ ;
- on replace tout à la fin la dernière case mise en réserve pour obtenir une grande ligne de longueur $2^q$.
- au bout de $q$ transformations, la nouvelle ligne retrouve sa forme initiale.

# Image de taille quelconque

- Il donc un entier naturel $k$ tel que $2^q - 1 = k(2N - 1)$ ;
- si l'on met bout à bout $k$ lignes de longueur $2N - 1$, on constitue ainsi une ligne de longueur $2^q - 1$ ;
- on replace tout à la fin la dernière case mise en réserve pour obtenir une grande ligne de longueur $2^q$.
- au bout de $q$ transformations, la nouvelle ligne retrouve sa forme initiale.

## Image de taille quelconque

- Il donc un entier naturel $k$ tel que $2^q - 1 = k(2N - 1)$ ;
- si l'on met bout à bout $k$ lignes de longueur $2N - 1$, on constitue ainsi une ligne de longueur $2^q - 1$ ;
- on replace tout à la fin la dernière case mise en réserve pour obtenir une grande ligne de longueur $2^q$.
- au bout de $q$ transformations, la nouvelle ligne retrouve sa forme initiale.

## Image de taille quelconque

- Il donc un entier naturel $k$ tel que $2^q - 1 = k(2N-1)$ ;
- si l'on met bout à bout $k$ lignes de longueur $2N-1$, on constitue ainsi une ligne de longueur $2^q - 1$ ;
- on replace tout à la fin la dernière case mise en réserve pour obtenir une grande ligne de longueur $2^q$.
- au bout de $q$ transformations, la nouvelle ligne retrouve sa forme initiale.

## Image de taille quelconque

La transformation sur la « grande » ligne a-t-elle les mêmes effets que la transformation limitée à la ligne initiale ?

# Image de taille quelconque

- Les nombres de la ligne de longueur $2^q$ sont numérotés de 0 à $2^q - 1$ ;
- appliquer la méthode du photomaton, c'est regrouper d'abord tous les pairs, puis placer tous les impairs ;
- $k \geqslant 2$, donc on a mis bout à bout au moins deux séquences de la ligne initiale tronquée ;
- les pairs s'écrivent $0, 2, \ldots, 2N-2, 2N, 2N+2, \ldots 4N-2 \ldots$ ;
- modulo $2N-1$, cela devient :

$$0, 2, \ldots, 2N-2, 1, 3, \ldots, 2N-1 \ldots.$$

## Image de taille quelconque

- Les nombres de la ligne de longueur $2^q$ sont numérotés de 0 à $2^q - 1$ ;
- appliquer la méthode du photomaton, c'est regrouper d'abord tous les pairs, puis placer tous les impairs ;
- $k \geqslant 2$, donc on a mis bout à bout au moins deux séquences de la ligne initiale tronquée ;
- les pairs s'écrivent $0, 2, \ldots, 2N-2, 2N, 2N+2, \ldots 4N-2 \ldots$ ;
- modulo $2N-1$, cela devient :

$$0, 2, \ldots, 2N-2, 1, 3, \ldots, 2N-1 \ldots.$$

## Image de taille quelconque

- Les nombres de la ligne de longueur $2^q$ sont numérotés de 0 à $2^q - 1$ ;
- appliquer la méthode du photomaton, c'est regrouper d'abord tous les pairs, puis placer tous les impairs ;
- $k \geqslant 2$, donc on a mis bout à bout au moins deux séquences de la ligne initiale tronquée ;
- les pairs s'écrivent $0, 2, \ldots, 2N-2, 2N, 2N+2, \ldots 4N-2 \ldots$ ;
- modulo $2N-1$, cela devient :

$$0, 2, \ldots, 2N-2, 1, 3, \ldots, 2N-1 \ldots.$$

# Image de taille quelconque

- Les nombres de la ligne de longueur $2^q$ sont numérotés de 0 à $2^q - 1$ ;
- appliquer la méthode du photomaton, c'est regrouper d'abord tous les pairs, puis placer tous les impairs ;
- $k \geqslant 2$, donc on a mis bout à bout au moins deux séquences de la ligne initiale tronquée ;
- les pairs s'écrivent $0, 2, \dots, 2N-2, 2N, 2N+2, \dots 4N-2 \dots$ ;
- modulo $2N-1$, cela devient :
$$0, 2, \dots, 2N-2, 1, 3, \dots, 2N-1 \dots.$$

# Image de taille quelconque

- Les nombres de la ligne de longueur $2^q$ sont numérotés de 0 à $2^q - 1$ ;
- appliquer la méthode du photomaton, c'est regrouper d'abord tous les pairs, puis placer tous les impairs ;
- $k \geqslant 2$, donc on a mis bout à bout au moins deux séquences de la ligne initiale tronquée ;
- les pairs s'écrivent $0, 2, \dots, 2N-2, 2N, 2N+2, \dots 4N-2 \dots$ ;
- modulo $2N-1$, cela devient :
$$0, 2, \dots, 2N-2, 1, 3, \dots, 2N-1 \dots.$$

# Image de taille quelconque

- La restriction de la transformation sur la ligne de longueur $2^q - 1$ aux deux premières séquences est la transformation du photomaton appliqués aux $2N - 1$ premiers éléments de la ligne de longueur $2N$ ;
- la ligne de longueur $2N$ revient donc à l'identique au bout de $q$ itérations.

# Image de taille quelconque

- La restriction de la transformation sur la ligne de longueur $2^q - 1$ aux deux premières séquences est la transformation du photomaton appliqués aux $2N - 1$ premiers éléments de la ligne de longueur $2N$ ;
- la ligne de longueur $2N$ revient donc à l'identique au bout de $q$ itérations.

# Image de taille quelconque

## Conclusion

Si l'image est un carré de taille $2N \times 2N$, et si $\sigma$ est la permutation associée à la transformation du photomaton, le plus petit entier $q$ tel que $2^q - 1$ est un multiple de $2N - 1$ vérifie $\sigma^q = \mathrm{id}$.

# Image de taille quelconque

Si l'image est un rectangle de taille $2P \times 2Q$, l'ordre de la permutation associée à la transformation du photomaton est

$$\mathrm{PPCM}(p, q)$$

- $p$ étant l'ordre de la permutation opérant sur les lignes ;
- $q$ étant l'ordre de la permutation opérant sur les colonnes.