Archimède
et la Quadrature du cercle

Il n'est pas de problème plus longtemps ouvert dans l'Histoire des Mathématiques que celui de la quadrature du cercle. De quand date-t-il ? On ne le sait ; on sait seulement que les Grecs, experts en géométrie, s'y sont cassés les dents pendant des siècles et ont créé, pour tenter de le résoudre, des objets nouveaux qui ont permis une approche, ou une solution partielle, mais n'ont jamais réussi à refermer le problème sur une solution qui apaise les esprits définitivement. Il est probable que ce problème soit plus ancien que la science grecque, et, en particulier, que les Egyptiens se le soient posé. Il faudra encore passer les importantes découvertes de la Renaissance et des XVIII$^{\text{ième}}$ et XIX$^{\text{ième}}$ siècles pour qu'on ose affirmer enfin : **nous connaissons la réponse à cette question**.

Le problème a tellement étonné qu'il a donné une expression : **c'est la quadrature du cercle**, synonyme pour les uns de : c'est impossible et pour les autres de : c'est extrèmement difficile.

Il m'offre l'occasion de rapprocher les différents sens des mots utilisés ici :

- **problème** : qui hors des mathématiques, est surtout embêtement, difficulté, tracas.

- **solution** : qui est pour le chimiste, mélange parfait, par opposition à suspension, où les particules sont imbriquées sans perdre leur identité.

- **résolution** : qui est pour le physicien un pouvoir lié à la capacité de voir de l'œil ou d'un appareil optique.

et de penser que ce n'est peut-être pas par hasard que les hommes de notre mode de pensée ont choisi les mêmes mots pour décrire ces sens car le problème vrai que se pose un mathématicien le dérange et le tracasse jusqu'à ce qu'il aît trouvé une réponse qui se mélange à sa matière mentale au point qu'il y trouve le repos, que l'épine aît disparu et aît fait place à l'intégration d'une connaissance qui est alors inséparable de l'être qui a fait cette démarche. L'histoire de la démonstration dans l'Histoire nous montre aussi que ce qui a pu être une vraie solution à une époque, paraît approximative ou intuitive à une autre époque, comme si notre pouvoir de voir augmente dans le temps.

Une réflexion pédagogique en découle naturellement : mettre des élèves devant un vrai problème, de leur niveau de résolution, est la chance de leur donner un vrai savoir et non un vernis disponible pour un examen superficiel, en suspension provisoire dans leur esprit.

Quel est donc ce problème ? Un cercle étant donné, être capable avec une règle et un compas de construire un carré de même aire que le disque. C'est donc aussi le problème de la connaissance du disque par comparaison au carré de son rayon ou de son diamètre **comme une fraction**. Car si quelqu'un avait trouvé une telle fraction, la construction n'aurait plus posé de problème.

Une autre réflexion m'a été faite par Jean-Marie Vigoureux sur l'importance extraordinaire du problème de la quadrature du cercle : sa dimension mystique. En effet, dans la plupart des civilisations, comme en Chine, le carré est le symbole de la terre et le cercle celui du ciel, et le fait que l'homme essaie d'être le lien entre le terrestre et le divin est au fond de sa quête spirituelle. Qu'on observe les cathédrales qu'un temps de grande religiosité comme le Moyen-Age a produites : les fondations sont toutes à angles droits - carrées ou alors dans le rapport doré symbole de l'harmonie terrestre - et les voutes, coupoles et rosaces circulaires et inaccessibles comme images du ciel. Qu'on s'interroge enfin sur la solution définitive du problème qui, au XIX$^{\text{ième}}$ siècle, a pris la forme d'une coupure définitive entre les nombres **constructibles** à la règle et au compas enfermés dans les nombres **algébriques** et le nombre π, symbole numérique du cercle, reconnu **transcendant**. Ce langage n'est-il pas toujours religieux ? Et cette reconnaissance de la transcendance de π précède de 20 ans la séparation de l'Eglise et de l'Etat !

Ce texte se scinde en deux chapitres : le premier est une reproduction partielle de l'ouvrage remarquable écrit par Jean-Etienne Montucla en 1754 sur l'histoire de la Quadrature du cercle, situant très bien ce que fut cette longue quète chez les Grecs et le second, la présentation des trois propositions faites par Archimède sans jamais citer le "Problème" mais qui en sont sa contribution fondamentale. Vision extraordinaire, dans les résultats annoncés, tellement étonnants que les grands mathématiciens de la Renaissance auront du mal à les accepter, et dans les démonstrations où il donne, de façon percutante un aperçu de ses façons de convaincre par son calcul intégral, les suites numériques et son approche infinitésimale. Raccourci fondamental et pas prodigieux du Grand Maitre sur le problème le plus ardu de l'Histoire !

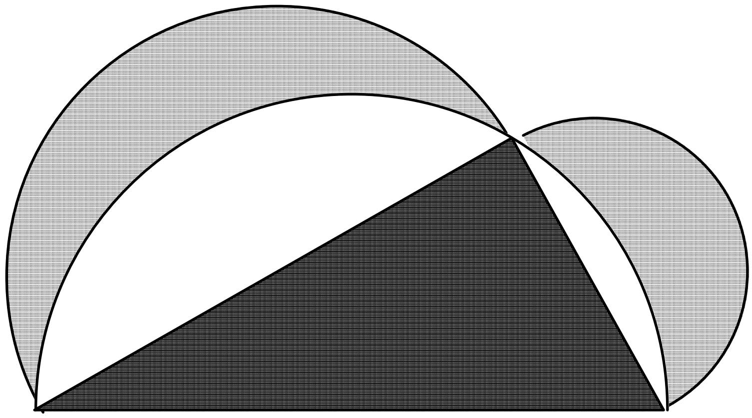
I - La Quadrature du cercle chez les Grecs vue par Montucla en 1754

Le texte qui suit est fait d'extraits de l'œuvre de Montucla, montrant les pas les plus significatifs faits par les Grecs sur le problème.

Note : Les lunules d'Hippocrate

Hippocrate découvrit une surface à bords courbes quarrable, ou plutôt une réunion de surfaces en forme de croissants de lune. La démonstration repose sur le théorème de Pythagore, en le voyant comme une relation entre les aires de 3 figures semblables construites sur les côtés d'un triangle rectangle - pas nécéssairement carrées. L'aire de celle qui repose sur l'hypothénuse est toujours la somme des 2 autres.

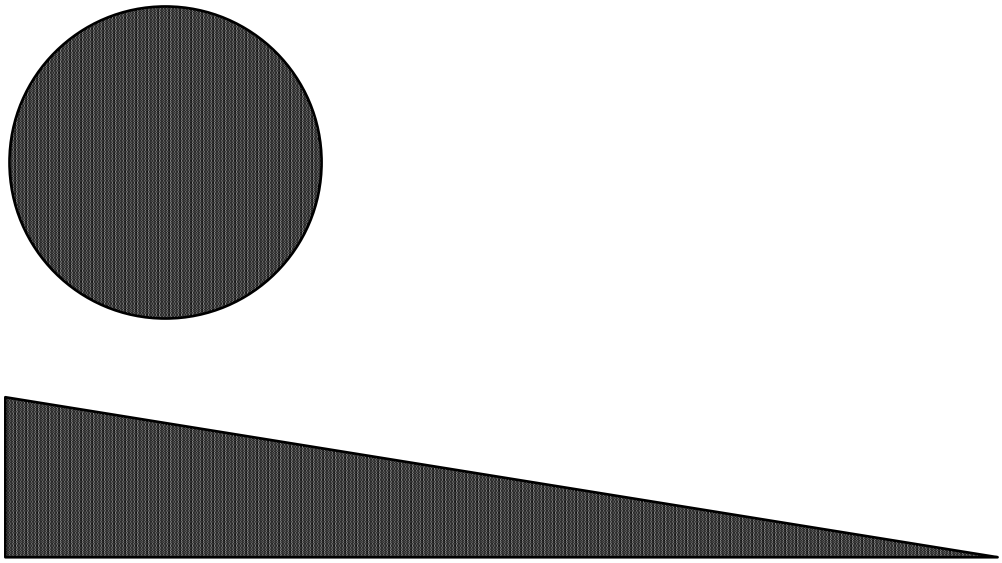
En prenant 3 demi-disques, et en retournant vers l'intérieur le plus grand, Hippocrate affirme que le grand disque est la somme des 2 autres, et que s'il retranche aux 2 termes égaux la partie commune, l'égalité demeure : donc la somme des 2 lunules équivaut au triangle rectangle.



II - La contribution d'Archimède

3 propositions concernent le problème dont 2 forment à elles seules l'ouvrage le plus court d'Archimède : De la mesure du cercle. En voici le contenu :

Proposition 1 : Tout cercle équivaut au triangle rectangle pour lequel on a le rayon égal à l'un des côtés adjacents à l'angle droit et le périmètre égal à la base.



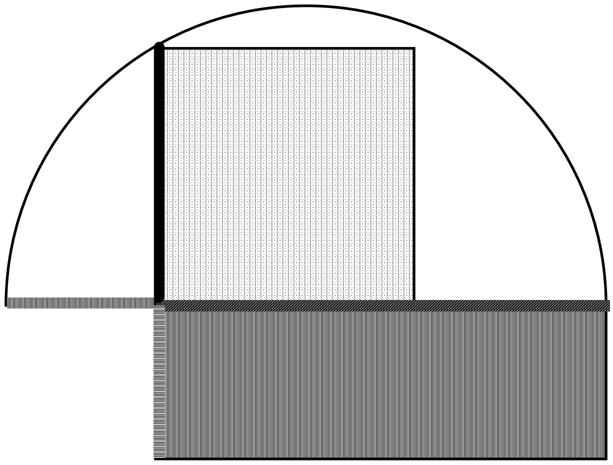
Proposition 2 : Le périmètre de tout cercle vaut le triple du diamètre augmenté de moins de la septième partie, mais de plus des dix soixante et onzièmes parties du diamètre.

Corollaire : L'aire d'un disque vaut près des $\frac{11}{14}$ du carré de son diamètre.

La troisième proposition vient d'un autre livre où Archimède invente la première courbe à définition cinématique de l'Histoire : sa spirale. En effet, à part les courbes fondamentales que sont la droite et le cercle (la première n'étant d'ailleurs pas conçue comme illimitée par les Grecs mais comme un segment, si bien que lorsqu'Euclide veut désigner ce que nous appelons : une droite, il parle de la droite prolongée), les Grecs utilisent les coniques qui sont des coupes de cônes ou des courbes mécaniques comme la conchoïde de Nicomède qui est une déformation de droite. Le livre : Des spirales est tout à fait remarquable par les résultats qu'Archimède obtient sur la mesure des révolutions successives et secteurs de sa spirale (voir "Le trésor d'Archimède") mais il contient en plus une première partie qui fait l'étude des tangentes à la spirale pour aboutir à la proposition suivante :

Proposition 3 : Si une ligne est tangente à l'extrémité d'une spirale décrite en première révolution, et, si du point d'origine de la spirale, on élève une perpendiculaire sur la droite initiale de révolution, cette perpendiculaire rencontrera la tangente, tandis que la droite située entre la tangente et l'origine de la spirale, sera égale à la circonférence du premier cercle.

Contenu de la proposition 1 : Sous son aspect insignifiant, elle ramène le disque à un triangle. Il est clair qu'un triangle - comme tout polygone - est quarrable, c'est-à-dire qu'on peut construire un carré de même aire à la règle et au compas puisqu'on peut le transformer en un rectangle en divisant en deux l'une de ses dimensions et qu'Euclide nous a laissé la construction de la moyenne géométrique toujours en usage, qui ramène tout rectangle à un carré.



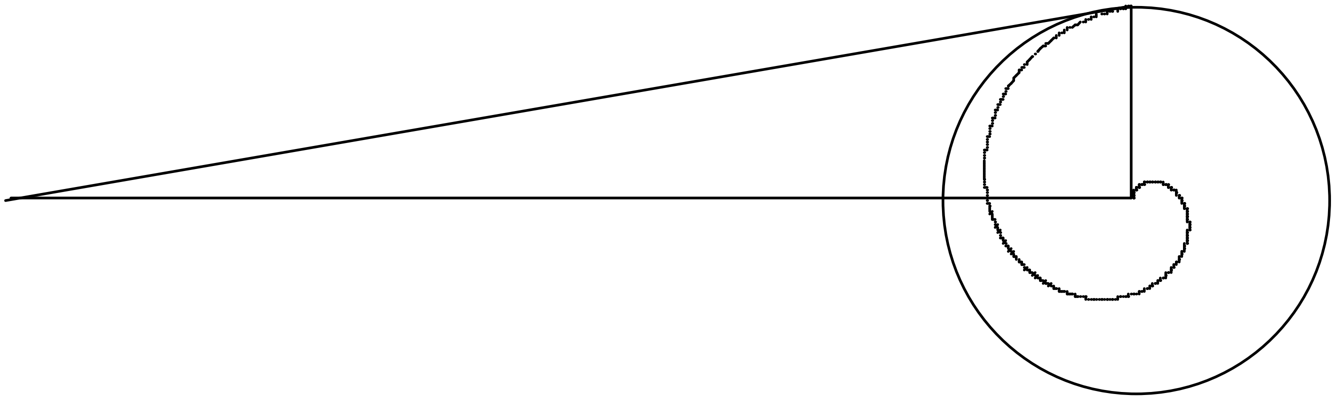
Evidemment, le problème est que le triangle équivalent au disque, s'il a une hauteur facile à construire, parce que c'est le rayon, a une base qui contient toute la difficulté, puisque c'est un segment qui a la longueur du cercle. Autrement dit, Archimède affirme ici qu'il est équivalent de quarrer le disque (problème d'aires) ou de rectifier le cercle (problème de longueur) ! Mais ce nouveau problème ne parait pas plus simple puisque de grands esprits de la Renaissance se demanderont encore s'il est possible qu'un segment ait même longueur qu'un cercle !

Ce n'est pas la solution du "problème" mais une transformation fondamentale vers une autre approche.

Contenu de la proposition 2 : c'est le nombre π, si je peux me permettre car un rapport n'est pas un nombre pour les Grecs, qui est en question. Archimède, fort de sa première démarche essaie d'approcher la longueur du cercle et découvre l'encadrement le plus précis de l'Antiquité :

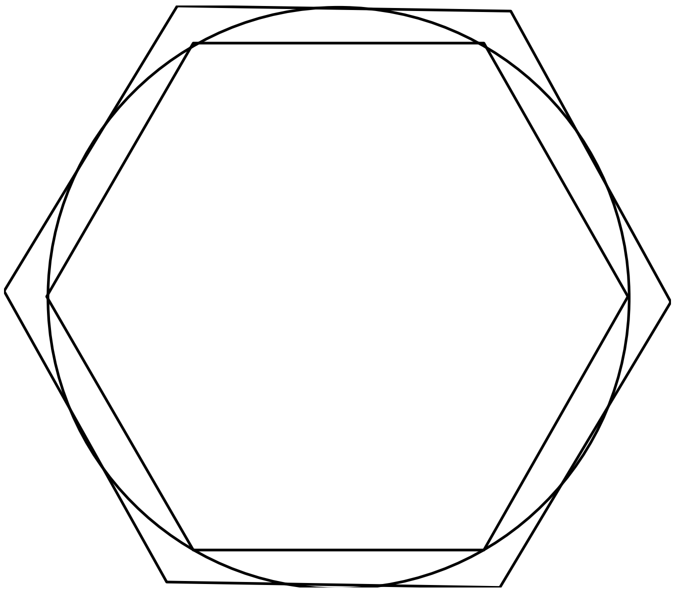
$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$$

Contenu de la proposition 3 : c'est certainement lui qui a incité Archimède à inventer sa spirale : trouver une construction d'un segment de la longueur d'un cercle ; et justement la sous-tangente de la spirale en fin de première révolution a exactement la longueur du cercle de fin de première révolution ! Bien sûr, le problème eût été résolu si cette fameuse tangente avait été constructible, malheureusement !

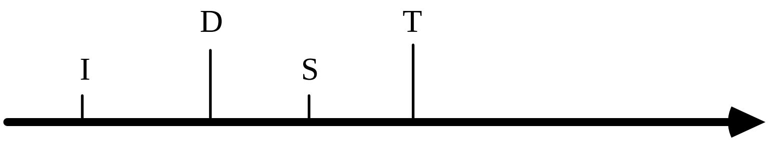


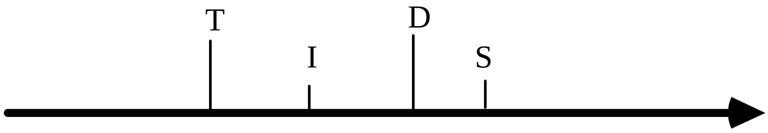
Mais tout de même, quel sens des relations géométriques !

Démonstration de la proposition 1 : C'est une démonstration typique d'Archimède par **exhaustion**. Il a montré ailleurs (voir " Le Trésor d'd'Archimède " page 112) qu'il peut construire sur un cercle donné, 2 polygones réguliers semblables, l'un inscrit, l'autre circonscrit, d'aires plus proches l'une de l'autre que toute aire donnée.



Si le disque D et le triangle T sont inégaux, leur différence est donnée et il peut construire 2 polygones réguliers, l'un inscrit, l'autre circonscrit, de différence inférieure à celle de D et T. On a donc 2 cas de figure suivant que D > T ou D < T :





Chaque polygone est équivalent à un triangle de base le périmètre du polygone et de hauteur la distance du centre à ses côtés qu'on nomme apothème.

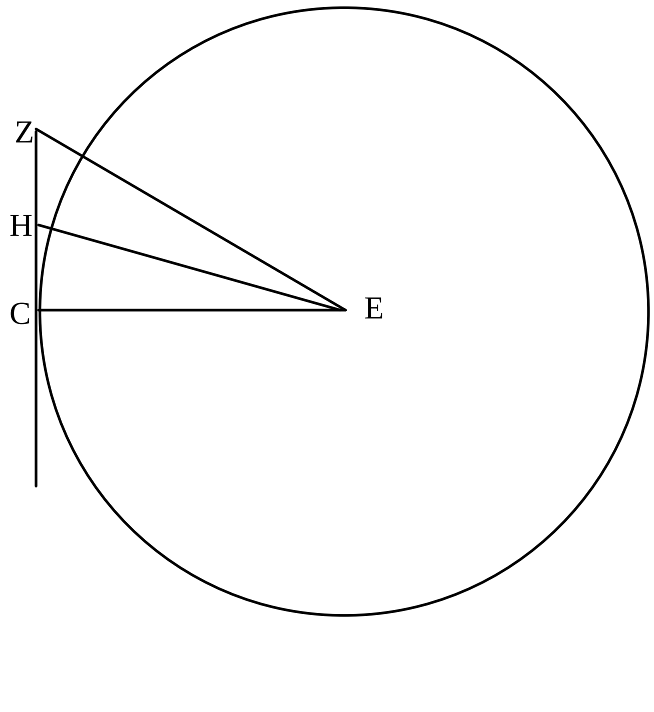
Dans le cas 1, le polygone S a une aire plus petite que T bien qu'il soit équivalent à un triangle de base supérieure et de hauteur égale à ceux de T.

Dans le cas 2, le polygone I a une aire plus grande que T bien qu'il soit équivalent à un triangle de base inférieure et de hauteur inférieure à ceux de T.

Dans les deux cas, il y a contradiction, et la seule hypothèse plausible est l'égalité des aires de D et T.

Démonstration de la proposition 2 : Le détail en est laborieux pour atteindre à une telle précision. Voyons-en le principe : il part d'un hexagone circonscrit pour la borne supérieure et d'un hexagone inscrit pour la borne inférieure. Dans chaque cas, il va partager l'angle 4 fois en deux donc en 16 petits angles dans un angle de 60°, c'est-à-dire qu'il crée 2 polygones réguliers de 96 côtés, l'un inscrit, l'autre circonscrit, dont il va mesurer le côté en le majorant dans le premier cas, en le minorant dans le second.

Voici, à titre d'exemple, comment il passe du côté de l'hexagone circonscrit à celui du dodécagone, la même démarche étant reprise trois fois pour atteindre le 96-gone.



$$\frac{EZ}{CZ} = 2 = \frac{306}{153}$$

$$\frac{EC}{CZ} = \frac{\sqrt{EZ^2 - CZ^2}}{CZ} = \frac{\sqrt{70227}}{153} > \frac{265}{153}$$

Il tombe "par hasard" (et sans nous dire pourquoi il part de $\frac{306}{153}$) sur $\frac{265}{153}$ qui est une approximation par fraction continue de $\sqrt{3}$ à moins de $\frac{3}{100000}$! Dans la seconde partie, il partira de même de $\frac{1351}{780}$ qui est une autre approximation par fraction continue de $\sqrt{3}$!

Comme EH est bissectrice : $\frac{ZE}{EC} = \frac{ZH}{HC}$ et $\frac{ZE + EC}{EC} = \frac{ZH + HC}{HC} = \frac{ZC}{HC}$

Par échange : $\frac{ZE + EC}{ZC} = \frac{EC}{HC} \geq \frac{306 + 265}{153} = \frac{571}{153}$

Enfin par Pythagore : $\frac{EC^2 + CH^2}{HC^2} \geq \frac{571^2 + 153^2}{153^2} = \frac{349450}{153^2}$

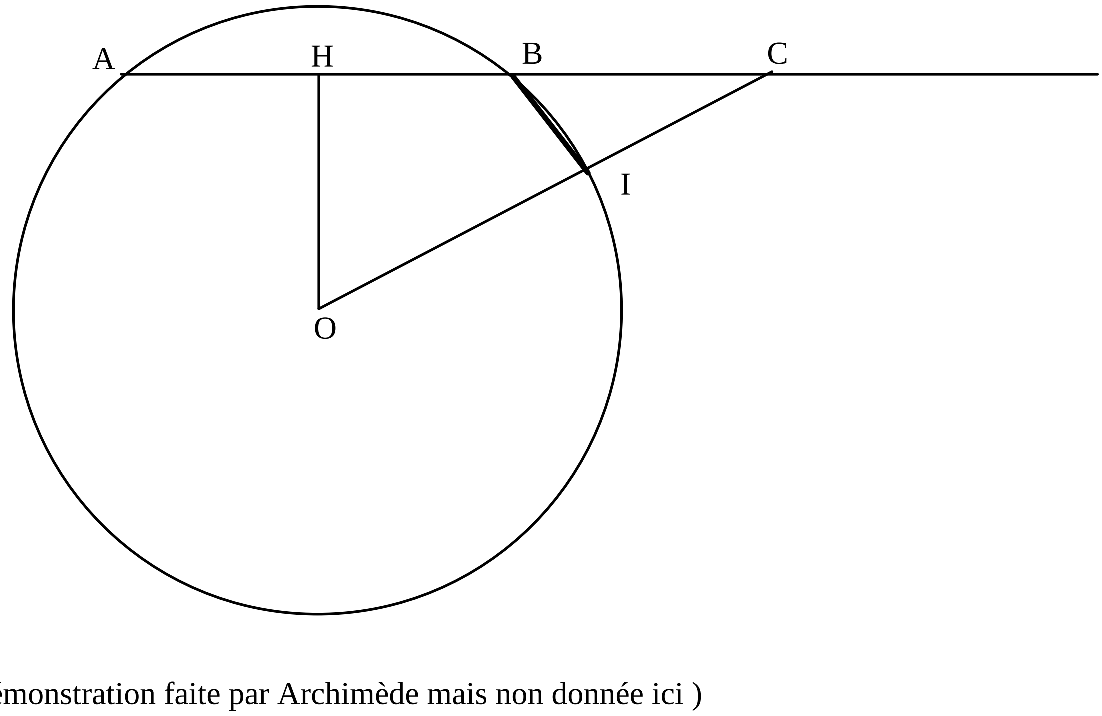
Et en prenant les racines : $\frac{EH}{CH} \geq \frac{591\frac{1}{8}}{153}$

Voici un aperçu qui suffira au courage de la plupart ; partant de $\frac{EZ}{CZ}$ il atteint $\frac{EH}{CH}$ et recommence 3 fois cette démarche pour atteindre sa majoration de $3\frac{1}{7}$ et 4 fois pour sa minoration de $3\frac{10}{71}$

Démonstration de la proposition 3 : elle nécéssite une certaine connaissance de la spirale qui est une courbe engendrée par un point se déplaçant en mouvement uniforme sur une demi-droite tournant d'un mouvement uniforme autour de son origine (voir " Le Trésor d'Archimède " pages 22 - 23). Elle nécéssite un lemme :

Lemme : Un cercle étant donné, ainsi qu'une corde AB et 2 segments MN et PQ, si $\frac{PQ}{MN} > \frac{BH}{HO}$ alors il est possible de trouver un point C sur la droite AB tel que :

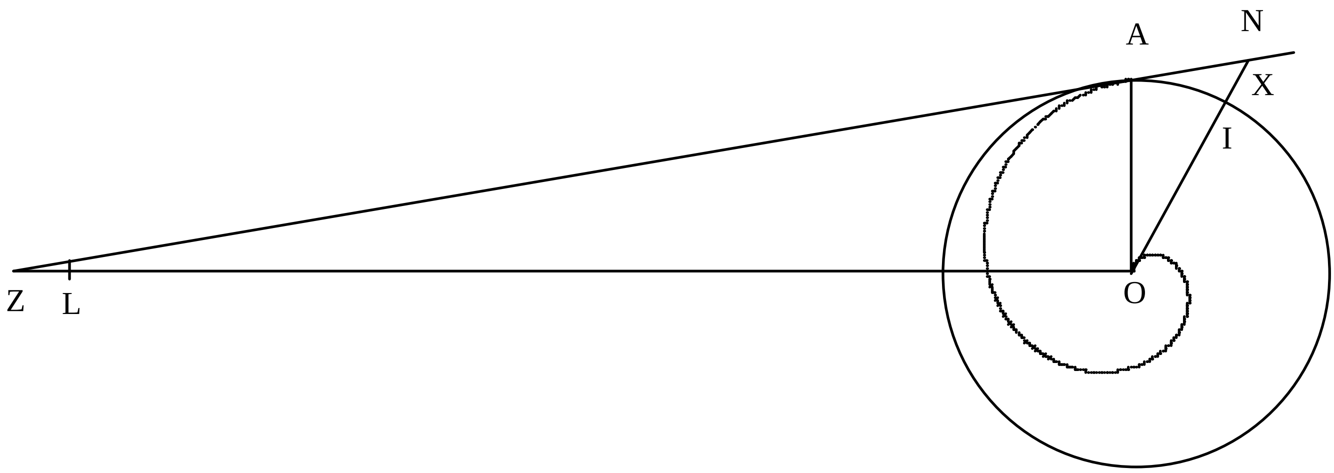
$$\frac{IC}{IB} = \frac{PQ}{MN}$$



(Démonstration faite par Archimède mais non donnée ici)

Retour à la spirale : Supposons que AZ soit plus grand que la circonférence. Il est possible de trouver un point L tel que AL soit compris entre la circonférence et AZ. Mais alors par le lemme, on peut trouver N sur la tangente tel que :

$$\frac{NI}{IA} = \frac{OA}{OL} \qquad \text{ou} \quad \frac{NI}{OA} = \frac{IA}{OL} \qquad \text{ou} \quad \frac{NI}{OI} = \frac{IA}{OL}$$



Mais IA est inférieur à l'arc IA et OL est supérieur à la circonférence C. Donc :

$$\frac{\text{arc } IA}{C} > \frac{NI}{OI} \qquad \text{et} \qquad \frac{C + \text{arc } AI}{C} > \frac{ON}{OI}$$

Mais le rapport des arcs de cercles est aussi celui des rayons de spirale et si X est le point de rencontre de la spirale avec ON : $\frac{C + \text{arc } AI}{C} = \frac{OX}{OI}$

L'inégalité se traduit par : $OX > ON$ Ce qui est contradictoire !

Même chose si on suppose $OZ < C$; **donc la seule hypothèse possible est :**

$$\mathbf{OZ = C}$$

Démonstration difficile, mais efficace !

Conclusion

Il faut attendre la Renaissance pour de nouveaux développements significatifs ; en ce temps-là, la géométrie s'est ouverte sous l'influence des peintres du Quattrocento qui se sont passionnés pour la perspective. La géométrie n'est plus l'étude des objets et de leur mesure, mais devient celle de l'espace et de ses représentations. Dans le même temps, si l'infiniment grand est important, l'infiment petit l'est autant : Stévin découvre les nombres décimaux, et on se met à écrire des séries infinies qui entre autres produiront des décimales de π, et aussi ce nom π dont nous ne pouvons nous passer. Le XIXième siècle créera les nombres réels, les classera en catégories et offrira enfin une solution au problème, définitivement : **l'impossibilité de la quadrature du cercle**.

Bernard BETTINELLI

Bibliographie : Les œuvres complètes d'Archimède par P. Ver Eecke — ed. Blanchard

L'histoire de la quadrature du cercle par J.E. Montucla — Irem Paris VII

Le trésor d'Archimède par B. Bettinelli — Irem de Besançon