Les Mathématiques, simples techniques de calcul ?
La leçon de Leibniz

Claude-Alain Risset*, Naoum Daher**

Le dix-huitième siècle a choisi : la physique serait newtonienne, les mathématiques intégreraient l'apport leibnizien. Quant à la philosophie de Leibniz et ses monades, cela resterait le domaine de philosophes spécialistes. Cette partition a du faire se retourner dans sa tombe Leibniz, car sa pensée n'a eu de cesse de s'enrichir en passant d'un domaine à l'autre. Il avait entrepris, en particulier, la quête d'une « Mathesis Universalis », langage permettant de dépasser toutes les ambiguïtés et toutes les erreurs dans tous les domaines. Et ce n'est qu'au vingtième siècle que le logicien Gödel a montré les limites d'une telle quête, en prouvant l'existence, même au sein de l'arithmétique, de propriétés indécidables. Mais montrer les limites d'une démarche n'est pas condamnation. Le passage incessant de la pensée de Leibniz d'un domaine à l'autre a porté des fruits, dont le calcul différentiel et intégral n'est pas le seul ; il a ouvert d'autres pistes dont certaines, en particulier la réflexion sur la dynamique et sa construction autrement que sur la cinématique, se révèlent remarquables et (encore) prometteuses. Nous proposons donc un retour sur le travail leibnizien en montrant, sur quelques exemples, la richesse d'une interdisciplinarité incomprise et souvent abandonnée. La pensée philosophique leibnizienne apparaîtra certainement plus simple qu'elle ne peut le paraître même à de purs philosophes avec ce que nous allons privilégier (au sein des nombreuses intrications de sa pensée) : son implication dans des domaines de la physique et des mathématiques.

Inanité de la dynamique de Newton comme théorie universelle

La révérence pour Newton, avec ses épaules de géant sur lesquelles ses successeurs sont montés, et l'épitaphe de Pope : « **Nature and Nature's laws lay hid in night. God said « Let Newton be » and all was light** » sont emblématiques de l'entreprise hagiographie qui prétend le présenter. Cela va au delà d'une démesure théâtrale, propre à enflammer, qu'on retrouve à propos des savants, ces héros, dans la plupart approches historiques justement introduites dans les livres d'enseignement. Et on ne peut ramener cette démesure à la seule licence poétique. De la véritable vie de la pensée, nous avons une illustration exaltante dans le travail d'explicitation par Leibniz de sa rentrée tardive en mathématiques, où son ignorance est un outil de découverte. La présentation de Marc Parmentier de la naissance du calcul différentiel[1] est un apport tonique, une fulgurance comme peuvent l'être la découverte de certains auteurs littéraires, ou les révélations de certaines créations du spectacle vivant. Nous proposons ici, après un aperçu des leçons qu'il tire de l'approche de la « chaînette » une présentation prenant en compte les effets d'une attitude ouverte en mécanique. Cette présentation de l'aventure de la construction d'une connaissance, qu'on peut qualifier d'épique, peut nous permettre de retrouver intérêt dans les réactions des « apprenants », intérêt sans lequel notre enseignement peut devenir plus que fastidieux. (*Ce qui a été la ligne directrice d'une aventure pédagogique menée à la faculté des sciences de Besançon dans les années 70*[2].) Mais il convient auparavant de remettre en cause la pertinence de la théorie de Newton, à partir d'arguments qui ne disparaissent pas derrière les preuves de son efficacité pratique.

La dynamique de Newton est inacceptable pour une raison philosophique évidente. Leibniz comme Huygens en étaient persuadés, étant sûrs que, dès sa seconde édition des « Principia », Newton redresserait une incohérence majeure, que les succès de l'approche newtonienne et l'habitude ont cachée. (Même Kant, après une longue résistance il est vrai, a fini par se convertir au point de vue de Newton.) Si l'approche newtonienne, issue de l'expérience usuelle et des mesures d'espace et de temps, peut présenter une certaine valeur à certaines échelles, il est inconcevable d'accepter une théorie se voulant universelle qui permettrait des vitesses infinies. Accepter, même potentiellement, une vitesse infinie, c'est nier notre monde, car un objet pourrait être partout en même temps ! Certes les scientifiques ont une certaine propension à vouloir occuper la place de Dieu. (Laplace et Hawking manifestent cette hypertrophie de leur ego.) Mais cette simple constatation montre que la théorie newtonienne ne peut-être acceptée qu'à une certaine échelle, et interdit les vitesses infinies. Ce qui conduit à penser une échelle correspondant une vitesse limite, au voisinage de laquelle notre vitesse perdra toute pertinence. (En effet, dans les accélérateurs de particules, les physiciens des hautes énergies utilisent une rapidité qui perd son caractère « d'artifice mathématique ». La prise en compte de l'expérience conduit à devoir maîtriser la diversité des points de vue, ce qui est l'exigence de départ de Leibniz.) Cela correspond à l'une des exigences philosophiques d'Aristote, qui ne troublera guère les mathématiciens : le mouvement est susceptible de nombre de paramétrisations, et au lieu de partir sur l'une d'elle, en fonction d'un choix de mesure (pour la mécanique, historiquement, la vitesse de la cinématique), on doit considérer d'abord l'ensemble des points de vue, avant de se spécialiser, si on ne veut pas s'enfermer dans une vision unique (attitude que dans le domaine social ou religieux, on qualifie d'**intégrisme**). Cela évitera de développer des théories qui se heurteront ensuite aux résultats expérimentaux (les problèmes de l'électromagnétisme dans la seconde partie du dix-neuvième siècle pour le développement de la physique avec la mécanique newtonienne).

La chaînette

L'antiquité avait été extraordinairement féconde sur les coniques. Les temps modernes ont introduit de nouvelles approches de courbes, parmi lesquelles le problème de la chaînette dont nous allons profiter du traitement. Ce problème a été introduit (physiquement) à partir de l'explicitation mathématique de la forme prise par une corde soumise à son propre poids. Ce problème caténaire –ou funiculaire (!) - et les diverses analyses par Leibniz des façons dont il a été abordé sont magistralement exposés et commentées dans l'ouvrage cité ci-dessus. Il y a des approches différentes et convergentes sur la chaînette (correspondant à la représentation graphique de la fonction ch X), forme d'une corde pendant entre deux points fixes, de sa « rectification », de la détermination des ses cercles osculateurs, donc de sa développante, et des relations avec d'autres problèmes (rectification de la spirale ou de la lemniscate de Bernoulli, forme des voiles...) On peut tirer de nombreux enseignements de la façon dont Leibniz revient sur le traitement de ces problèmes. Ceux de sa (vraie) modestie, et de la conscience de ses limites comme mathématicien) ne sont pas les moins intéressants ; nous allons nous attacher à deux autres.

Le premier correspond à la réfutation de la forme parabolique proposée par Galilée. Au lieu d'abandonner simplement cette (fausse) identification, ou même de la stigmatiser, Leibniz remarque que cette forme parabolique correspond à la première approximation, au voisinage de X = 0, de toute fonction analytique Y paire. (*Avec les mots de l'époque toute expression continue et absolue*.) En effet :

$$Y(X) = f(0) + f''(0)\, X^2/2 + \cdots + f^{(2n)}(0)\, X^{2n}/(2n)! + \cdots$$

On verra que cette remarque a une importance : elle permet en particulier de comprendre pourquoi la forme newtonienne de la dépendance de l'énergie par rapport à la quantité de mouvement est une approximation de la dynamique d'Einstein, mais aussi de toute forme de dynamique possible, et pourquoi, après même avoir montré le défaut majeur de la proposition cartésienne de conservation du module de la quantité de mouvement, Leibniz a refusé d'abandonner la piste ouverte par Descartes à la suite des mises en évidence expérimentales de la fausseté de cette loi. (Cette « réfutation » expérimentale correspond aux vitesses accessibles alors dans les chocs : aux hautes énergies, comme le montre la dynamique einsteinienne, elle est vraie en première approximation). Il a cherché une rectification, un prolongement analytique, qui mettent sur la voie d'une dynamique qui ne soit pas seulement un modèle qui « colle » avec l'expérience, mais un « monde » possible correspondant aux exigences premières, philosophiques. (*N'en déplaise à Auguste Comte.*)

Dans le domaine de la dynamique, la forme de la « force vive » était mv^2. On préfère écrire en terme moderne avec une constante additive, que la valeur de l'énergie est :

$E = p^2 / 2m + E_0$. Ce qu'on peut conclure de la constatation de Leibniz, c'est que cette forme peut n'être qu'une approximation. (La pertinence de cette constatation sera corroborée un peu plus loin.) De fait, la relation issue d'Einstein est :

$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$, ou avec $E_0 = mc^2$ $E = E_0 \sqrt{1 + c^2p^2 / E_0^2}$ ce qui conduit naturellement, au voisinage de l'axe, à la relation précédente. Cette première distance par rapport à l'interprétation des résultats de mesure du dix-septième siècle conduit naturellement à se pencher sur un second point sur lequel Leibniz revient dans le même article.

Il insiste sur la diversité des démarches qui permettent le calcul des intégrales correspondant (en particulier) à la rectification de la chaînette, et aux paramétrisations correspondantes (pour la branche correspondant aux valeurs de Y positives) de l'hyperbole équilatère, $Y^2 - X^2 = A^2$

Trois paramètres différents étaient utilisés dans ces intégrations, par Huygens, les frères Bernoulli et Leibniz, que nous nommerons, dans un premier temps x y et z (x correspond à l'équation explicite de Y en fonction de X):

$$X = A\, x \qquad Y = A \sqrt{1 + x^2}$$
$$X = A \operatorname{sh} y \qquad Y = A \operatorname{ch} y$$
$$X = A \operatorname{tg} z \qquad Y = A / \cos z$$

(*Dans ces temps, comme chez Christophe - Colomb - sécante et cosécante supplantaient les inverses cosinus et inverses sinus*.)

La différence entre ces paramètres est notable. z reste limité (à $\pi/2$) quand X et Y tendent vers l'infini et si x et y tendent vers l'infini en même temps que X et Y, cela correspond à une relation linéaire entre X et Y et x, et exponentielle pour y ($A e^y$).

Pour les faibles valeurs de X, on a, au premier ordre

$$X = A\, x \qquad Y = A(1 + x^2/2)$$
$$X = A\, y \qquad Y = A(1 + y^2/2)$$
$$X = A\, z \qquad Y = A(1 + z^2/2)$$

Cette coïncidence de la dépendance par rapport aux différents paramètres permet de comprendre comment Leibniz, ne serait-ce qu'en raison de son exigence de diversité des points de vue présentées ci-après, a pu ne pas être convaincu par la construction newtonienne (correspondant à ne se fier qu'au paramètre vitesse pour caractériser le mouvement). Cette construction s'est pourtant imposée pendant deux siècles comme *la vérité*, en ne considérant qu'un seul paramètre pour caractériser le mouvement (la vitesse issue de la cinématique).

Diversité des points de vue

Cette analyse de la diversité des points de vue et des paramétrisations sur un même objet est à la base d'une exigence que Leibniz ne cessera de mettre en avant. Au lieu de suivre une piste et d'en tirer tout ce qu'on peut en tirer, il est fructueux de considérer a priori tous les points de vue possibles, et de se servir de cette multiplicité pour appréhender un sujet (un problème) en profitant de ces éclairages multiples.

Pour exploiter l'image d'une ville qui peut être observée sous une infinité de points de vue que propose Leibniz pour illustrer le bien fondé de cette exigence, on peut penser au travail de représentation du dessin industriel : bornons nous à considérer (sans distinguer la distance) les différentes directions à partir desquelles on peut considérer cette ville. Il reste un nombre infini de points de vue différents, et nous savons (depuis Descartes et ses coordonnées cartésiennes) que chacun des points de vue peut être reconstruit à partir de trois points de vue permettant, par composition, de retrouver les autres. Ce qui correspond à une seule direction a certes **une certaine objectivité**, mais reste un point de vue particulier (partial pouvons nous dire), n'apportant qu'une connaissance partielle, que Leibniz qualifie de **subjective** : elle ne peut correspondre à la **réalité** de la ville qu'assortie de deux autres points de vue, (un seul point de vue *subjectif* ne correspondant pas uniquement à cette ville, mais à une infinité de villes potentielles) : **la réalité ne correspond qu'à l'ensemble des points de vue**. Dans une interprétation « réaliste » à la Saint Thomas (qui a besoin de toucher pour croire) ce ne serait qu'une argutie : le fondamental, ce serait la réalité matérielle de la ville qui permet ces points de vue. L'holographie et les controverses amenées par la physique quantique sur les trajectoires de particule permettent de réfuter cette objection et d'illustrer la portée de cette révolution conceptuelle dans la façon d'envisager la réalité.

Si on se restreint à la vision, un hologramme a une réalité qui correspond à l'ensemble des points de vue. La réalité virtuelle correspond bien à cette définition : la réalité, c'est l'ensemble des points de vue qui la font. Mais en physique moderne, longtemps avant le développement du *virtuel*, la nécessité de cette façon de voir est illustrée par la position de Heisenberg sur la réalité des trajectoires des particules élémentaires. Suivant la voie ouverte par Einstein (les mesures faites pour faire apparaître l'éther étant toutes vaines, c'est que cet éther n'existe pas), à partir de l'impossibilité de mettre en évidence une réalité du mouvement tel qu'il peut être induit à partir de l'observation du mouvement d'une pierre, par exemple, il a remis en cause la réalité d'une trajectoire. (C'est plus qu'une incapacité pratique, une impossibilité théorique en raison de ses inégalités). Einstein a - dans un premier temps ? - (ignorant des réflexions leibniziennes sur les facteurs d'échelle que nous évoquons ensuite) rejeté avec assurance cette façon de prendre au sérieux l'argument même qu'il avait mis en œuvre précédemment. Et on peut voir le long combat d'arrière garde au vingtième siècle, pour chercher dans le photon ou l'électron, au delà des « quantons » de J.M. Lévy-Leblond, la dualité d'une particule et d'une onde pilote, voire la référence à « un réel voilé », comme le refus de l'acceptation philosophique de ce que la mesure et la physique nous imposent : pour nous **la réalité est, et restera l'ensemble des points de vue**.

Leibniz appelle **objectif** ce qui ne va pas dépendre du point de vue mobilisé, du genre de mesure faite, et relativise ainsi toute mesure. En dynamique, que nous allons aborder, les physiciens reconnaissent cette qualité fondamentale à l'énergie à la quantité de mouvement, et à la masse, signature de la matière en l'absence de mouvement, même si des résultats de mesure ont parfois conduit, à certaines époques, à envisager de les dépouiller de sens universel…

Exploitation mathématique

Pour aller plus loin dans l'explicitation et l'exploitation de la démarche leibnizienne, il faut tenir compte du fait qu'existe forcément pour lui une infinité de points de vue, donc une infinité de paramétrisations (que nous supposerons dénombrable : point trop n'en faut. Nous n'en ferons pas le tour, et nous verrons même, comme dans le cas du dessin industriel, qu'on pourra en privilégier un petit nombre et que les autres pourront en être déduits.) Au lieu d'appeler ces paramètres x y et z comme ci-dessus, ont les appellera x_n. (*Dans certains cas, nous préférons dans nos exploitations de l'approche leibnizienne les nommer sous la dénomination indéterminée α, pour montrer les différences entre points de vue et mondes possibles*.) L'intérêt d'un tel changement apparaît clairement lorsqu'on compare l'effet des changements de paramètre en introduisant les dérivées des paramètres les uns par rapport aux autres. Pour une valeur (X, Y) donnée cette dérivée du paramètre x_m par rapport au paramètre x_n pourra s'écrire : $d x_m \,/\, d x_n = I (X , m , n)$

Cette simple notation met en évidence que, en raison des propriétés du calcul différentiel :

$$d x_m \,/\, d x_n = (d x_m \,/\, d x_k) \,.\, (d x_k \,/\, d x_n)$$

$$I (X , m , n) = I (X , m , k) \,.\, I (X , k ,n)$$

Cela montre que ces fonctions de deux paramètres, devenues fonctions de leur indice, présentent le caractère des **fonctions puissances**, et qu'on peut donc écrire (avec le cas trivial ou I(X) vaut 1 pour toutes les valeurs de X, il n'y aurait qu'un point de vue possible)

$$I (X, m, n) = [I (X)]^{n-m}$$

(*La fonction I, sera paire en X, puisque, pour tous les paramétrages, les dérivées seront des fonctions impaires. En prenant, au moins localement, I > 1 ce qui ne dépend que de la façon de numéroter les points de vue, on a là ce qu'on pourrait appeler un microscope théorique, jouant avec ces points de vue le rôle que souhaitait Leibniz, correspondant à l'importance des facteurs d'échelle sur lesquels nous allons revenir.*)

Si on part de n = 1, puisque pour toutes valeurs de X $d x_n \,/\, d x_{n+1} = I (X)$ cela correspond à

$$d x_n \,/\, d x_1 = [I (X)]^{1-n}$$

La valeur de I(X) ne dépend pas du point de vue (du numéro du paramètre considéré), donc ce I(X) reliant les différents paramètres a le statut d**'objectivité** relatif à la courbe de départ, aux grandeurs Y et X qui seraient objectives. Dans le sens que lui donne Leibniz, ce ne serait pas chacun des paramètres qui aurait le statut d'objectif : et **l'objectivité correspond à l'intersubjectivité**. N'est-ce pas là une belle leçon de philosophie (appliquée) ?

On peut montrer (cela apparaît clairement en regardant les paramétrages proposés) **qu'on peut prendre pour I,** qui ne dépend que du point de la courbe considéré, **la valeur objective de Y/A.** (On pourrait éventuellement multiplier le nombre de points de vue en prenant une racine nième de Y, mais nous n'en voyons aucun avantage, cela apparaît – en l'état actuel - comme une complication gratuite). Ce choix, qui permet de mettre de l'ordre dans les paramétrage, a été suggéré à partir des formes intégrales des relations entre les paramètres et X et Y dans le cas de la paramétrisation de la branche positive de l'hyperbole proposée ci-dessus. (*Il peut être généralisé à un hyperboloïde de révolution, ou une extension plus lointaine à un hyper hyperboloïde (!) correspondant à une généralisation à l'espace à quatre dimensions*.) $x = X / A$ va donc être choisi comme x_1, et on engendre à partir de celui-ci une infinité de paramètres possibles, dont y et z : en fait quatre seront premiers, et permettront de retrouver tous les autres.

$A\, d x_n / d X = (1+ X^2/ A^2)^{(1-n)/2}$ ce qui conduit à $A x_n = \int(1 + X^2 /A^2)^{(1-n)/2}\, d X$

On peut vérifier que y va correspondre à $n = 2$, z à $n = 3$

Et x_4 conduit, en inversant le résultat à $X = A x_4 / (1 - x_4{}^2)^{1/2}$ $Y = A / (1 - x_4{}^2)^{1/2}$

Pour revenir à la dynamique, ce qui est fondamental dans toutes les visions de la dynamique, c'est l'énergie et la quantité de mouvement. Dans les problèmes à une dimension (comme ceux des chocs frontaux qui ont servi de laboratoire au dix-septième siècle pour fonder cette dynamique : nous revenons ensuite sur cette fondation) ces quantités sont des grandeurs arithmétique et algébrique, et leur relation correspond à une dépendance hyperbolique, correspondant directement à ce qui précède. On voit facilement quand on assimile (guidé par l'homogénéité)

Y / A à E / mc^2, X / A à p / mc et si on écrit $x_4 = v / c$ on obtient :

$E = m c^2/ \sqrt{(1 - v^2/c^2)}$ $p = mv / \sqrt{(1 - v^2/c^2)}$

Ce sont les formules usuelles de la dynamique d'Einstein avec la vitesse v. La diversité des points de vue introduit les autres paramètres correspondant en particulier à la vitesse propre x_1 et à la rapidité x_2, grandeur additive qu'introduisent les physiciens des hautes énergies pour paramétrer le mouvement.

Facteur d'échelle

Un autre point, qui se rencontre aussi en physique (et en mathématiques), important pour Leibniz est la prise en compte de facteurs d'échelle. En physique, nous sommes conscients, aujourd'hui, qu'à l'échelle macroscopique peut être valable une théorie perdant toute pertinence à l'échelle atomique. La terre est plate dans notre environnement… En mathématique cela correspond au fait que, localement une courbe peut être assimilée à sa tangente, sans que cela implique que toute courbe est une droite, et justifie l'emploi (raisonné) de développements limités. Nous sommes familiers avec la constatation qu'avait faite Leibniz, par l'observation des spermatozoïdes, en se penchant sur le microscope de Van Leeuwenhoek : une réalité à une certaine échelle n'a pas à être extrapolée aux autres échelles ; le travail sur les fractals montre d'ailleurs bien – a contrario - la nécessité de la réflexion à ce propos.

Métaphysique de la dynamique. Principe de relativité et différenciation

La construction de la mécanique s'est faite à partir d'une vision idéalisée du choc frontal, le choc élastique[3]. (Comme pour le principe d'inertie, la conservation de l'énergie qui lui est associée est un choix métaphysique, une hypothèse que suggère le développement technologique, mais qui ne correspond à aucune vérification expérimentale possible. C'est un pari…) Cette interaction, où la paramétrisation du mouvement correspond à un problème à deux inconnues (algébriques ici) qui doit avoir une solution unique (le déterminisme fait partie des exigences métaphysiques) doit être régi par deux intégrales premières, deux lois de conservation. Huygens propose la force vive, et (utilisant le principe de relativité pour généraliser les résultats des chocs symétriques), la quantité de mouvement. Et son utilisation du principe de relativité (avec des vitesses additives) permet de relier ces deux lois de conservation.

$\Sigma\ m v^2$ constante implique dans un repère mobile à la vitesse $-V$ par rapport au premier $\Sigma\ m(v+V)^2$ constante, donc en soustrayant les deux égalités, en enlevant les quantités $\Sigma\ mV^2$ identiques et en divisant par V, la conservation de Σmv.

Par passage à la limite, Leibniz (*c'est au moins ainsi qu'on peut interpréter ses réflexions philosophiques qui suivent son activité extérieure sur sa « phoronomie » et sur la dynamique, en particulier sa monadologie*) montre que le principe de relativité correspond au fait que la dérivation ou l'intégration (par apport à la vitesse) d'une quantité se conservant en donne une autre. L'application de ce principe de relativité doit néanmoins conduire à une solution unique, ce qui correspond à une contrainte sur la dérivée seconde (Les quantités apparaissant à la seconde dérivation ne peuvent être qu'une combinaison linéaire des quantités conservatives, pour ne pas donner une nouvelle loi de conservation, ce qui ne correspondrait pas aux exigences que l'on a pris pour le problème de départ.).

Mais l'exigence leibnizienne est plus grande : il faut pour lui considérer l'ensemble des points de vue (que nous indiquerons par l'indice α, avec des v_α …), et dans ces différentes paramétrisations du mouvement, **une seule peut être additive** dans un changement de repère. (*Il se trouve que, dans la théorie d'Einstein, ce n'est pas la vitesse usuelle correspondant à x_4 qui présente cette additivité : c'est une rapidité que nous vous laissons le plaisir de déterminer…*) Le principe de relativité ne se traduira pas alors, avec ces différents paramètres, par la différenciation (en dehors de la seule paramétrisation additive). Une généralisation de la dérivée introduisant, par rapport à la différenciation usuelle, un coefficient D_α dépendant de α et aussi de v_α permettra de traiter sur un même plan tous les points de vue.

Exploitation

Quel que soit le point de vue, l'application des résultats précédents aux différents points de vue (qui correspondent à la même réalité) va donner des exigences. En partant de la quantité « objective » paire caractéristique d'un corps en mouvement (que nous appelons énergie E), toute les écritures de la relativité avec les différents α donnent la même quantité impaire conservée p (p sera nulle en l'absence de mouvement) :

$$p = d_\alpha E / d v_\alpha = D_\alpha\ dE / dv_\alpha$$

Une nouvelle dérivation donnera aussi un même résultat avec tous les points de vue, en introduisant une inertie $\mathcal{M}$ (identifiée à une constante, la masse, dans la physique newtonienne, et traitée un moment de masse relativiste en relativité restreinte, dans les problèmes à une dimension) : $\mathcal{M} = D_\alpha\ d p / dv_\alpha$

Si on fait le rapport de $\mathcal{M}$ et de p, on obtient **pour toutes les valeurs de α** (trans-subjectivité) : $\mathcal{M} / p = dp / d E$ soit

$$p^2 = 2\int \mathcal{M} \, d E$$

Cette relation est compatible avec diverses structures correspondant aux expressions des relations entre E et p: nous avons déjà évoqué les dynamiques de Newton est d'Einstein. Cela correspond à la notion de mondes possibles chère à Leibniz, que nous allons présenter rapidement, dans ce cadre, en les caractérisant par un indice i. La quantité $\mathcal{M}$ paire, conservée ou constante, devra être de la forme $\lambda_i E^i$ ou $\Sigma \lambda_i E^i$ toute autre valeur que 0 ou 1 conduisant à l'existence d'autres lois de conservation (ce qui est incompatible avec les exigences physiques). La valeur de i nulle correspond aux solutions algébriques, la valeur 1 à pour les différents points de vue, à des solutions transcendantes. (C'est Leibniz qui a nommé les fonctions dont le développement en série est illimité transcendantes). L'équation différentielle obtenue ci-dessus donne alors

$$p^2 = 2\lambda_i (E^{i+1} - E_0^{i+1})/(i+1)$$

Soit pour i = 0 $\quad p^2 = 2\lambda_0 (E - E_0)$ la solution de Newton

Et pour i = 1 $\quad p^2 = \lambda_1 (E^2 - E_0^2)$ correspondant à la forme hyperbolique évoquée.

La sommation correspond aux diverses solutions proposées dans les théories de « doubly-special relativity ». Sans aller jusqu'à la distinction de ces dynamiques du vingt et unième siècle, nous pouvons voir comment s'applique aux deux premières la réflexion leibnizienne.

La double multiplicité des points de vue correspondant à ces deux mondes possibles se traduit, en reprenant les résultats montrés sur l'hyperbole, valables aussi sur la parabole newtonienne, a correspondant à la valeur de α correspondant au paramètre additif :

$$d_{\alpha i} / d v_{\alpha i} = D_{\alpha i} \; d / dv_{\alpha i} \qquad D_{\alpha i} = (E/E_0)^{(a-\alpha)i}$$

$$\mathcal{M} = d_{\alpha i}{}^2 E / d^2 v_{\alpha i} = \lambda_i E^i$$

En oubliant les autres solutions (dont la nécessité physique correspondrait à des énergies de l'ordre de celle de Planck), cela correspond à ce que, à partir du principe de relativité dynamique, cette approche sélectionne ces deux mondes (physiquement possibles) que Leibniz nomme « compossibles ». Pour Leibniz, le monde réel correspond au « meilleurs des mondes possibles », c'est à dire le plus riche structurellement : le choix ne s'appuie pas sur l'expérience (non concluante alors pendant encore deux siècles). Le développement du formalisme exposé ici montre que l'entreprise de construction de la dynamique entamée par Leibniz affirmant **l'existence d' une infinité de points de vue sur les mondes possibles dont il va falloir sélectionner le meilleur** n'est ni aberrante ni illusoire : elle n'avait simplement pas été tentée.

Annexe 1 : La seule déraisonnable efficacité des mathématiques ?

Dans un premier temps l'efficacité des mathématiques s'est traduite par une identification du monde mathématique au monde physique (avec la réalité de l'axiome d'Euclide). A l'époque moderne, ne pouvant se référer à une quelconque intuition comme en l'heureux temps de la physique classique des particules et des ondes, c'est la physique quantique qui tend à se confondre avec les mathématiques qui la structurent.

L'approche leibnizienne (de N. D.) a fondé sur la distinction entre le mathématique et le physique sa démarche **logique** : le recours à la multiplicité des points de vue provient d'un argument physique sans aucune nécessité mathématique : l'absence de possibilité de mesure au niveau du comportement asymptotique de la vitesse aux hautes énergies, rendant non pertinente ce point de vue cinématique, n'a rien de mathématique. Cette nécessaire référence à un changement de point de vue (déjà soulignée par exemple par Claude Comte ou Jean-Marc Lévy-Leblond) a été le tremplin vers une ouverture correspondant à l'exigence leibnizienne. Avec l'abandon de la référence à un seul point de vue, « l'objectif » (que constituait par exemple la vitesse) se transforme en subjectif, ou plus précisément « subjectif mesuré objectivement ». Cette distinction intimement liée à la **pratique** (*distinction ontique*) conduit à une distinction **épistémologique** : la connaissance scientifique devra faire la distinction entre deux ordres, objectif et subjectif. Cette distinction bouleverse les évidences : ce qui est fondamental, objectif, ce n'est plus du tout ce qui se mesure directement, l'espace et le temps, mais ce sont les grandeurs qui permettent de structurer les mesures : l'énergie, comme la quantité de mouvement sont des constructions de l'esprit. Cette distinction épistémologique conduit à un autre niveau d'abstraction qui sous-tend, avec l'héritage aristotélicien, la pensée leibnizienne. En partant de la substance active, le mouvement de la matière, et des multiples manifestations de cette substance active (traductions avec les différents points de vue) elle permet d'atteindre son « Etre objectif », renouant avec « l'**ontologie** », qui correspond au pont jeté entre le plus particulier (la simple exploitation du choc élastique frontal) et le plus général : les théories modernes de la dynamique (il n'y a de science que du général).

Annexe 2 : Le rapport à la connaissance

La mythification que nous avons dénoncée à propos de Newton est caractéristique d'un rapport à la connaissance très spécial dont nous n'avons en général plus conscience, entraînant un dogmatisme des enseignements. Non que soit discutable la nécessité de la contrainte dans l'enseignement, de la valeur du par cœur et du travail « gratuit ». (*Que Einstein ait ignoré même la première décimale de π est son problème, et non celui de l'enseignement. Le fait que les quatre cinquième des connaissances exigées au bac ne soit plus mobilisables un an après ne remet pas forcément en cause le contenu de l'enseignement, mais à coup sûr la façon de regarder notre travail d'enseignants.)* Les critiques peuvent nous montrer, non pas « la solution » mais au contraire la façon de penser notre travail. Au lieu de se réclamer de l'innovation face à l'obscurantisme, en réaction à des remises en causes souvent populistes et passéistes (luttes du royaume du bien et du mal présente aussi dans d'autres domaines), il s'agit simplement de se réclamer de l'attitude de remise en question personnelle face à une tâche difficile où il n'y a pas de solutions miracles.

Le style pédagogique de l'enseignant restera forcément présent, et l'adaptation patiente et continue du travail pédagogique, de la pensée de la discipline et de son appropriation est le seul barrage à la sclérose. *Le rôle véritable du corps de l'inspection, dans cette optique, est de sortir l'enseignant de son isolement en face de la classe, de permettre de socialiser aussi sa pratique. L'avis et le jugement du conseiller pédagogique ou de l'inspecteur n'est pas parole d'évangile, mais devrait pouvoir servir de point de départ à une réflexion dont on ne doit pas préjuger du résultat. Mêmes promus à ce rôle, ils ont des avis à partir desquels l'irénisme leibnizien affirme qu'il y a toujours quelque chose à tirer.* Dans cette confrontation avec l'autre, le retrait frileux et corporatiste en face du pouvoir n'a aucun sens. Il est en contradiction avec le sens de l'acte pédagogique : permettre aux élèves l'aventure de l'ouverture à la connaissance.

Bibliographie :

1 Gérard Bardéche et al, Integrated phsics... pp 139 144 Eurphysics News 1980

C.A. Risset, L'expérience de physique intégrée, Revue Française de Pédagogie n°55, pp 19 25, 1981
2 Gottfried Wilhelm Leibniz, la naissance du calcul différentiel, Vrin, Paris 1995
3 Christiane Vilain, Mécanique…, éditions Albert Blanchard, Paris 1996

Naoum Daher FEMTO ST, Département LPMO. CNRS , UR6174
32 avenue de l'Observatoire, 25044 Besançon Cedex, France
Claude-Alain Risset, Epiphymaths, Université de Franche-Comté
1 rue des vignes, 25620 Malbrans
claude-alain.risset@laposte.net
ndaher@femto-st.fr
Ce renouvellement de l'approche de la mécanique va faire l'objet d'articles proposés en particulier à Physical Review Letters, et est présenté de façon plus exhaustive sur le site d'Epiphymaths.