Pythagore en Chine

Karine Chemla
REHSEIS
CNRS & U. Paris 7

SOURCES

DYNASTIE HAN **206 avant l’ère commune - 220 après**

(*Zhoubi*) *Le Gnomon des Zhou* Texte astronomico-mathématique (essentiellement triangle rectangle)
1er siècle avant ou après notre ère

(*Jiuzhang suanshu*) *Les neuf chapitres sur les procédures mathématiques*
1er siècle avant ou après notre ère. Le chapitre 9 porte sur le triangle rectangle ?

Classiques objets de commentaires —ceux qui ont survécu

Zhao Shuang (3e siècle), Zhen Luan (6e siècle) sur *Le Gnomon des Zhou*
Liu Hui (263) sur *Les neuf chapitres sur les procédures mathématiques*

DYNASTIE TANG **618 - 907**

En 656, Li Chunfeng et alii rassemblent et commentent
(*Suanjing shishu*) *Les dix classiques de mathématiques*, au nombre desquels

Le Gnomon des Zhou avec les commentaires dont Zhao Shuang - 3e siècle
Les neuf chapitres sur les procedures mathématiques avec le commentaire par Liu Hui - 3e siècle

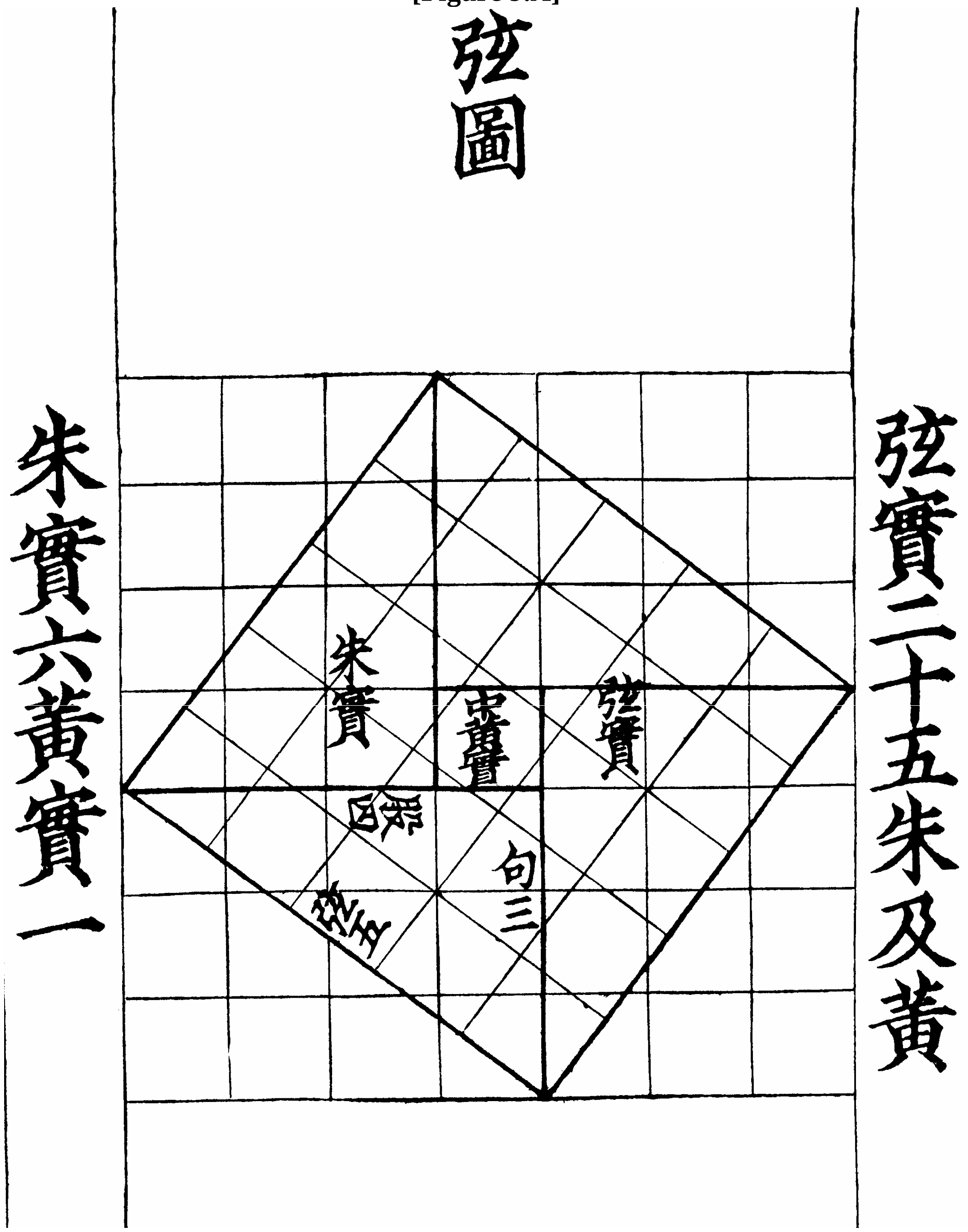
ET d’autres textes devenus “Classiques”, reprenant les mêmes thèmes

1. Qu'est-ce qu'une figure ?

1.1 Zhao Shuang et l'édition des figures

« Figures de la base (*gou*) et de la hauteur (*gu*), du carré et du cercle

[Figure 9.A]

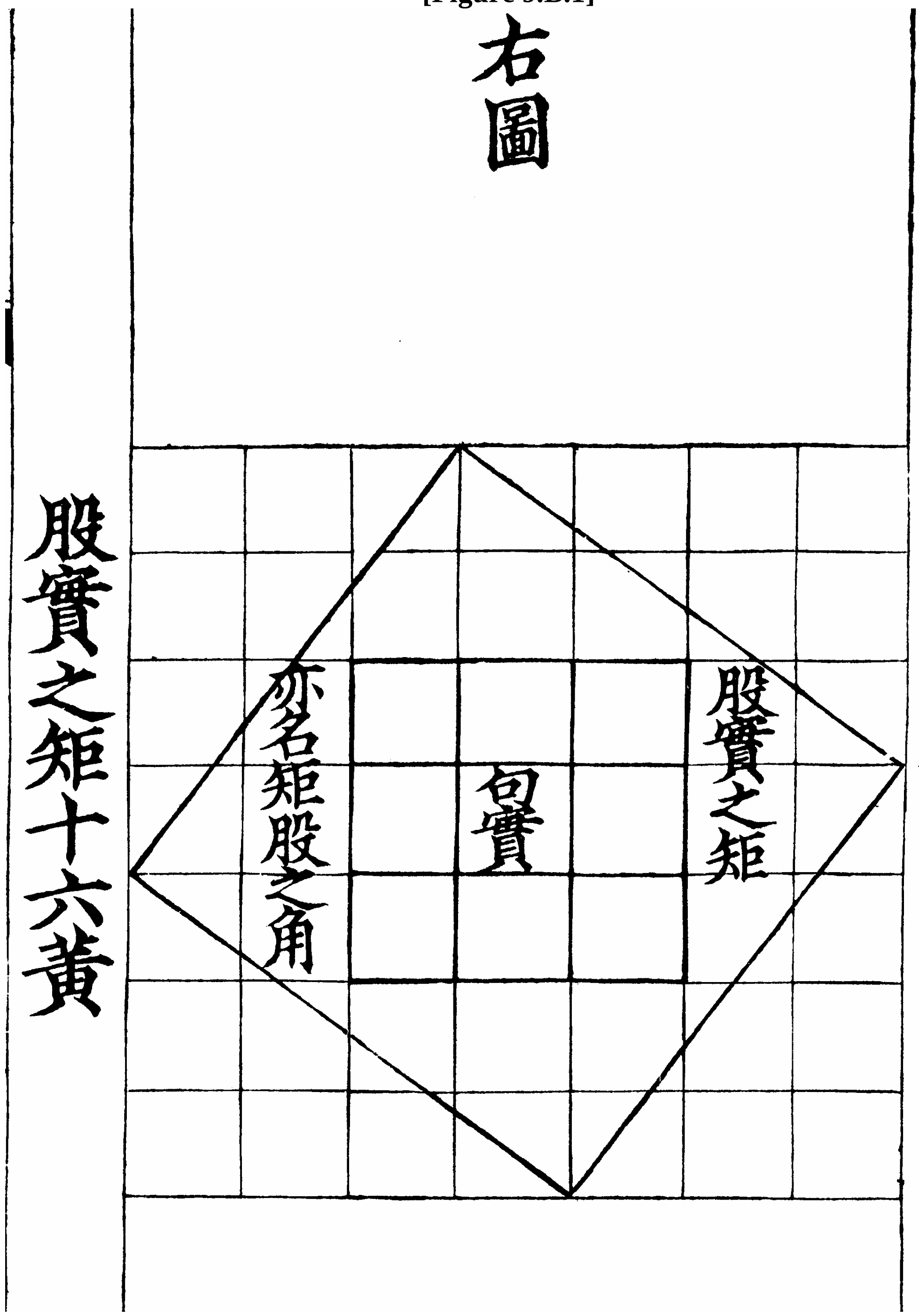


Traduction des légendes de haut en bas, de droite à gauche :

« Figure de l'hypoténuse »

« Le carré (*shi*) de l'hypotenuse, 25, est vermillon et jaune.//Le carré de l'hypoténuse.//La base vaut 3.//Aire (*shi*) centrale jaune.//(horizontalement) La base vaut 4.//Aire (*shi*) vermillon//(en oblique) L'hypoténuse vaut 5.//Les aires vermillon valent 6. L'aire jaune vaut 1.//

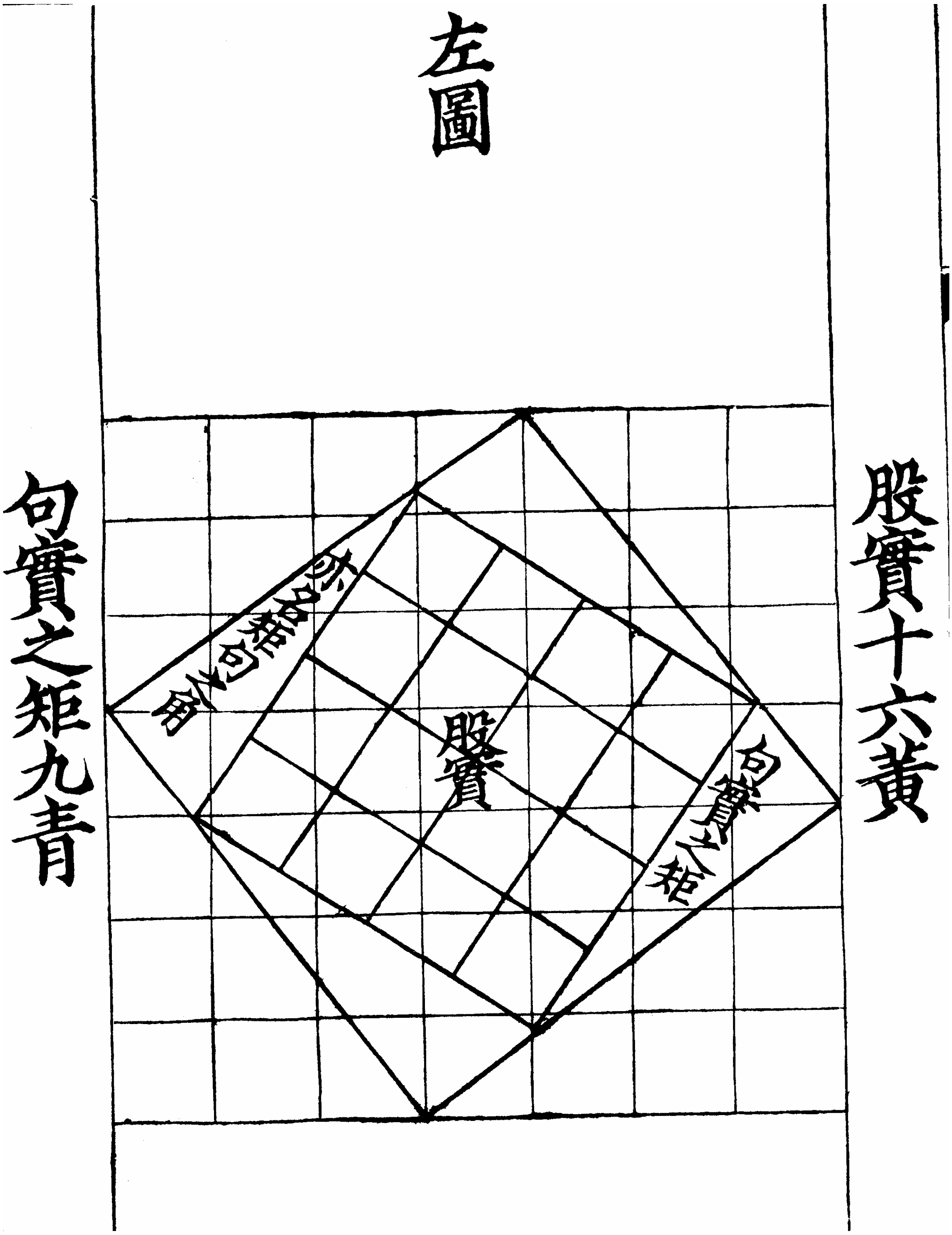
Edition de Bao Huanzhi, 1213
[Figure 9.B.1]



« Figure de droite»

“Le carré de la base, 9, est bleu-vert.//Le gnomon du carré de la hauteur//Le carré de la base//est aussi appelé l’angle de la hauteur comme gnomon//Le gnomon du carré de la hauteur, 16, est jaune.”

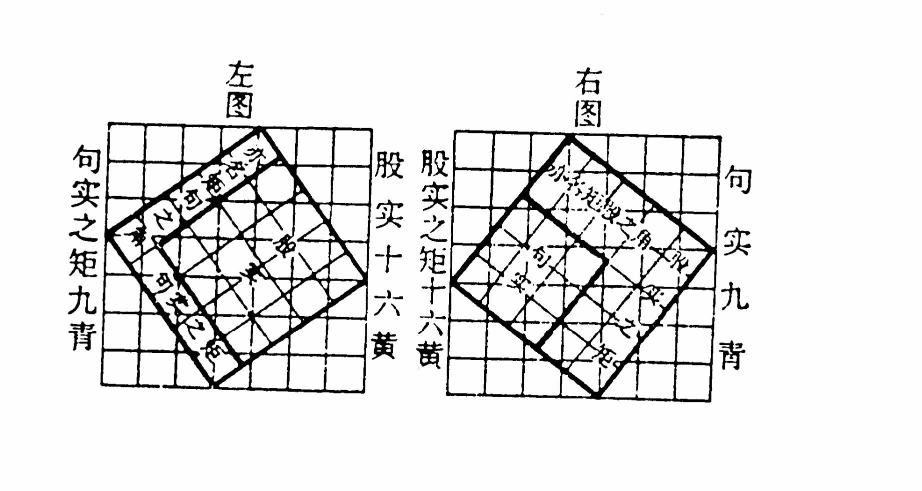
Edition de Bao Huanzhi, 1213
[Figure 9.B.2]



« figure de gauche »
“Le carré de la hauteur, 16, est jaune.//Le gnomon du carré de la base//Le carré de la hauteur//est aussi l’angle de la base comme gnomon.//Le gnomon du carré de la base, 9, est bleu-vert.”

[Figure 9.C.1] & [Figure 9.C.2]

Reconstitution des figure de gauche et figure de droite par Li Jimin



« Figures de la base (*gou*) et de la hauteur (*gu*) [ou : du triangle rectangle], du carré et du cercle "Base (*gou*) et hauteur (*gu*) étant chacune multipliée par elle-même, sommer"[1] ceux-ci (les résultats) fait le carré (*shi*) de l'hypoténuse. "On divise ceci par extraction de la racine carrée, ce qui donne l'hypoténuse." Sur la base de la figure de l'hypoténuse, on peut en outre considérer la multiplication l'une par l'autre de la base (*gou*) et de la hauteur (*gu*) comme 2 exemplaires d'aire vermillon. En doublant ceci, cela fait 4 exemplaires d'aire vermillon. On prend la multiplication par elle-même de la différence entre base (*gou)* et hauteur (*gu)* comme l'aire jaune centrale. En ajoutant (au résultat précédent) un exemplaire du carré de la différence, on engendre également le carré de l'hypoténuse[2].

Si l'on soustrait le carré de la différence du carré de l'hypoténuse et qu'on prend la moitié de son reste[3], qu'on prend la différence comme "diviseur rejoint (*congfa*)" et qu'on divise par extraction de la racine carrée, on obtient à nouveau (*fu*) la base (*gou*)[4]. En ajoutant la différence à la base (*gou*), cela donne la hauteur (*gu*).

Chaque fois que l'on somme les carrés/aires (*shi*) de la base (*gou*) et de la hauteur (*gu*), alors ils engendrent le carré de l'hypoténuse. Soit elles (les aires a^2 et b^2) forment un carré à l'intérieur, soit elles forment un gnomon à l'extérieur : les formes en sont différentes, mais les mesures (*liang*) sont égales, les corps sont distincts, mais les valeurs identiques (*qi*).

---

[1] Je marque par des guillemets les formulations que l'on retrouve à l'identique dans le texte des *Neuf chapitres*. Zhao Shuang renvoie explicitement à un ouvrage intitulé *Les neuf chapitres*.

[2] Noter cet « également » et cet « en outre », il renvoie à un algorithme alternatif, lui aussi fondé sur la « figure de l'hypoténuse ».

[3] Le contexte amène à comprendre que cette valeur constitue le « dividende », i.e. : le terme constant de l'équation quadratique dont l'opération suivante constitue le terme en x —nommé « diviseur rejoint » dans la terminologie de l'époque.

[4] L'énoncé décrit l'équation $1/2\ (c^2 — (b\text{-}a)^2) = (b\text{-}a)x + x^2$. Elle permet, connaissant l'hypoténuse et la différence entre base (*gou*) et hauteur (*gu*) de déterminer les dimensions du triangle rectangle. La base a en est solution, ce que Zhao Shuang décrit comme une « restitution » (*fu*) (VOIR *fu* « redonner »). En se reportant à la « figure de l'hypoténuse », l'aire du gnomon relatif à l'équation correspond au carré qui occupe un quart du carré global, dont on a ôté le quart de carré jaune central. Jusqu'ici, le passage s'interprète donc relativement à la première figure fondamentale. C'est à ce point du texte qu'il se tourne vers la seconde.

Le gnomon du carré de la base (*goushi zhi ju*) a pour largeur la différence entre l'hypoténuse et la hauteur (*gu*) et pour longueur la somme entre l'hypoténuse et la hauteur (*gu*), et le carré (*shi*) de la hauteur (*gu*) forme un carré en son intérieur. Si l'on soustrait l'aire/le carré (*shi*) de la base (*gou*) comme gnomon (*ju gou zhi shi*)[5] du carré de l'hypoténuse, en extrayant la racine de son reste, cela donne la hauteur (*gu*).

On double la hauteur (*gu*), qui se trouve des deux côtés, ce qui fait le "diviseur rejoint"[6]. En extrayant la racine du « coin de la base (*gou)* comme gnomon », cela donne la différence entre hypoténuse et hauteur (*gu*)[7]. En ajoutant la hauteur (*gu*), cela donne l'hypoténuse.

En divisant le carré de la base (*gou*) par la différence, on obtient la somme de la hauteur (*gu*) et de l'hypoténuse. En divisant le carré de la base (*gou*) par la somme, on obtient également la différence de la hauteur (*gu*) et de l'hypoténuse.

En effectuant la multiplication de la somme (de la hauteur (*gu*) et de l'hypoténuse) par elle-même, avec le carré (*shi*) de la base (*gou*), cela fait un dividende (*shi*), et si l'on prend le double de la somme comme diviseur, ce qu'on obtient est également l'hypoténuse. En soustrayant le carré (*shi*) de la base (*gou*) de la multiplication de la somme (de la hauteur (*gu*) et de l'hypoténuse) par elle-même, et en divisant par le diviseur, cela fait la hauteur (*gu*).

Le gnomon du carré de la hauteur (*gushi zhi ju*)[8] a pour largeur la différence entre l'hypoténuse et la base (*gou*) et pour longueur la somme entre l'hypoténuse et la base (*gou*), et le carré (*shi*) de la base (*gou*) forme un carré en son intérieur. Si l'on soustrait l'aire/le carré de la hauteur comme gnomon (*ju gu zhi shi*) du carré de l'hypoténuse, en extrayant la racine de son reste, cela donne la base (*gou*).

On double la base (*gou*), qui se trouve des deux côtés, ce qui fait le "diviseur rejoint". En extrayant la racine du « coin de la hauteur (*gu*) comme gnomon », cela donne la différence entre hypoténuse et base (*gou*). En ajoutant la base (*gou*), cela donne l'hypoténuse.

En divisant le carré de la hauteur (*gu*) par la différence, on obtient la somme de la base (*gou*) et de l'hypoténuse. En divisant le carré de la hauteur (*gu*) par la somme, on obtient également la différence de la base (*gou*) et de l'hypoténuse.

En effectuant la multiplication de la somme (de la base (*gou*) et de l'hypoténuse) par elle-même, avec le carré de la hauteur (*gu*), cela fait un dividende, et si l'on prend le double de la somme comme diviseur, ce qu'on obtient est également l'hypoténuse. En soustrayant le carré de la hauteur (*gu*) de la multiplication de la somme (de la base (*gou*) et de l'hypoténuse) par elle-même, et en divisant par le diviseur, cela fait la base (*gou*).

---

[5] Cette expression renvoie clairement, elle aussi, au gnomon d'aire a^2. Elle évoque la formulation que sur la « figure de gauche » (voir fig. 9.B.2 et 9.C.1), Zhao Shuang donne pour identique à « gnomon du carré de la base (*goushi zhi ju*) » : le « coin/angle de la base comme gnomon (*ju gou zhi jiao*) ». On peut penser que la première expression insiste sur la figure du gnomon en elle-même tandis que la seconde l'envisage relativement à la seconde figure fondamentale.

[6] Ce terme signale que le gnomon qui a pour aire le carré de la base sert ici de support à la lecture d'une nouvelle équation quadratique.

[7] Le carré en coin du gnomon a pour côté la différence entre hypoténuse et hauteur (*gu*). Il constitue l'inconnue qui sera racine de l'équation quadratique. Le coefficient de x est le double de la seconde dimension des rectangles qui, avec le carré de coin, composent le gnomon, soit ici : $2b$. Ainsi, le gnomon d'aire a^2 se décompose en deux rectangles d'aire globale $2bx$ et un carré d'aire x^2. L'agencement des algorithmes et les figures fondamentales permettent de comprendre pourquoi les algorithmes sont corrects. L'opération suivante en déduit l'hypoténuse.

[8] Ici commence un passage en tous points symétrique au précédent.

En multipliant l'une par l'autre les deux différences[9], en doublant et en extrayant la racine de ceci, ce qu'on obtient, en l'augmentant de la différence entre l'hypoténuse et la hauteur (*gu*), cela fait la base (*gou*); en l'augmentant de la différence entre l'hypoténuse et la base (*gou*), cela fait la hauteur (*gu*), et en l'augmentant des deux différences, cela fait l'hypoténuse.

Si, en doublant le carré de l'hypoténuse et en en soustrayant[10] le carré de la différence entre la hauteur (*gu*) et la base (*gou*), il apparaît le carré de la somme[11], c'est que, en examinant ceci à l'aide de la figure, le double du carré de l'hypoténuse remplit le grand carré extérieur[12] et il y a en trop l'aire jaune. Cette aire (*shi*) jaune qui est en trop, c'est le carré (*shi*) de la différence entre base (*gou*) et hauteur (*gu*). Si donc on soustrait de ceci le carré de la différence et qu'on extrait la racine de son reste, on obtient le côté du grand carré extérieur. Le côté du grand carré, c'est la somme de la base (*gou*) et de la hauteur (*gu*).

Si on effectue la multiplication de la somme par elle-même[13] et qu'on la soustrait alors du double du carré de l'hypoténuse, qu'on extrait la racine de son reste, on obtient le côté du carré jaune central. Le côté du carré jaune, c'est la différence entre la base (*gou*) et de la hauteur (*gu*). En soustrayant la différence de la somme et en prenant la moitié de ceci, cela fait la base (*gou*). En ajoutant la différence à la somme et en prenant la moitié de ceci, cela fait la hauteur (*gu*).

Si le double de l'hypoténuse est pris comme réunion de la largeur et de la longueur[14] et si l'on fait en sorte que celle de la base (*gou*) ou de la hauteur (*gu*) qui apparaît (*xian*) soit multipliée par elle-même pour faire l'aire correspondante (au rectangle que font longueur et largeur), si quatre exemplaires de l'aire sont soustraits de ceci (i.e.: l'aire du carré de côté le double de l'hypoténuse), en extrayant la racine de son reste, ce qu'on obtient fait la différence (de la largeur et de la longueur). En soustrayant la différence de la somme et en prenant la moitié de son reste, cela fait la largeur. En soustrayant la largeur de l'hypoténuse, cela donne ce qu'on cherchait[15].

---

[9] A savoir : la différence entre hypoténuse et hauteur (*gu*), d'un côté, entre hypoténuse et base (*gou*), de l'autre.

[10] Le commentaire se tourne de nouveau vers la première figure fondamentale.

[11] Zhao Shuang fait suivre son énoncé d'un renvoi à la figure qui montre pas à pas le sens des opérations.

[12] Il s'agit du carré de côté $a+b$ dans la « figure de l'hypoténuse ».

[13] Zhao Shuang entame ici l'énoncé de l'algorithme qui fait pendant au précédent.

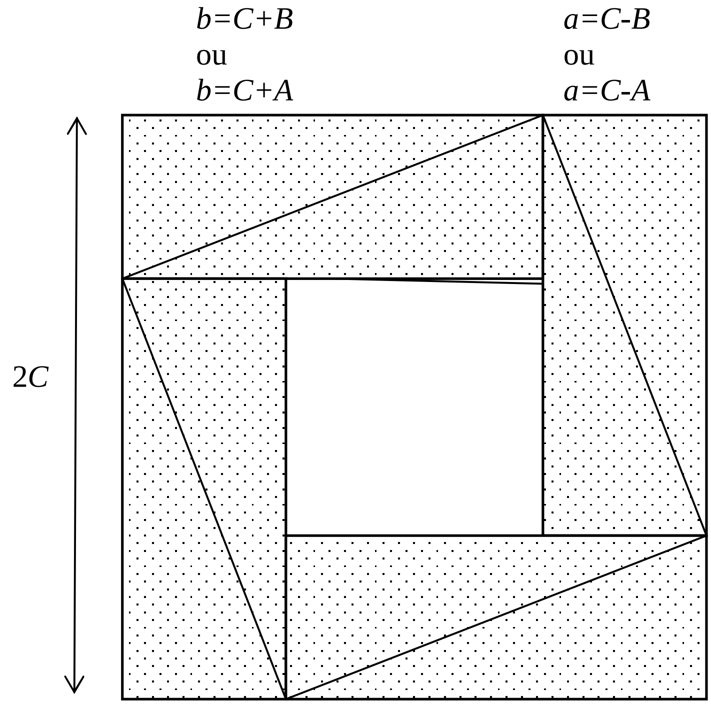
[14] Le texte propose ici une toute nouvelle lecture de la première figure fondamentale, qui y retrouve, sous un angle différent, les liens essentiels entre base, hauteur et hypoténuse, en les articulant aux relations entre c, $b+a$, b-a. Cette nouvelle lecture procède de la greffe de la seconde figure fondamentale sur la première. La trame du texte consiste en la résolution du problème clef de déterminer un côté de l'angle droit, lorsqu'on connaît l'hypoténuse et l'autre côté. Deux éléments cruciaux commandent cette interprétation différente de la figure (voir figure 9.D). D'une part, Zhao Shuang introduit une lecture du côté du carré extérieur comme le double de l'hypoténuse (notons-le $2C$). D'autre part, il décompose l'aire de ce carré en quatre rectangles et un carré. De là, deux strates de termes s'introduisent. D'un côté, il désigne par « longueur » et « largeur » (pour nous b et a) les côtés du rectangle. De l'autre, en relation avec son interprétation du côté extérieur, il lit dans ce rectangle un gnomon attaché à un triangle rectangle de dimensions A, B, C, tel que $b=C+B$ (resp. $b=C+A$) et $a=C$-B (resp. $a=C$-A). L'aire du gnomon vaut en conséquence $ab=A^2$ (resp. B^2). Retrancher de l'aire du carré extérieur l'aire des quatre rectangles donne l'aire du carré central comme $(b\text{-}a)^2$, sur la base de la lecture de la première figure fondamentale. De là, on déduit facilement la valeur de a, et partant, à suivre le texte, par l'opération C-a, on détermine B (resp. A). Notons que l'aire du gnomon n'est pas interprétée comme A^2 (resp. B^2). Autrement, on obtiendrait immédiatement $4B^2$ (resp. $4A^2$) comme interprétation de l'aire centrale, et donc B (resp. A).

[15] Le commentaire de Li Chunfeng à ce passage du commentaire au *Gnomon des Zhou* est conforme à l'interprétation proposée, et il la développe sur l'exemple du triplet pythagoricien (3, 4, 5). Cela l'amène à considérer une figure fondamentale de côté $2C$, soit 10. Il est intéressant de noter, une fois de plus, le travail récurrent consistant à tirer de la figure fondamentale de nouvelles lectures.

On observe comment, par alternance l'un avec l'autre du compas (cercle) et de l'équerre (rectangle)[16], (ces procédures) sont dans leur ensemble réciproques (l'une de l'autre), comment, en s'échangeant les pièces en communication, dans chaque cas, on parvient au résultat. S'il en est ainsi, alors elles présentent de façon synthétique une foule de principes, elles charpentent largement la constitution interne (*li*) de nombreuses (procédures), percent l'obscur et pénètrent l'infime (*wei*), « sondent le plus profond et atteignent le plus lointain », c'est pourquoi l'on dit : « permettre de régler les dix mille existants, seules elles le font »[17] »

Figure 9.D

Relecture de la figure fondamentale comme formée de 4 gnomons d'aire A^2 (resp. B^2) et d'un carré central d'aire $(2B)^2$ (resp. $(2A)^2$)



Conclusions :

— La nature des figures, figures fondamentales

— par contraste avec les outils de visualisation décrits dans *Le Gnomon des Zhou* (émergence entre le 1[er] et le 3[e] s. ?)……voir 1.2

— La matérialité des figures au 3[e] siècle : un objet matériel ? Expliquerait transmission

— Les quadrillages, comme l'énoncé d'un problème…… voir 1.3

[16] On peut faire l'hypothèse que ces deux termes tiennent lieu ici du pair et de l'impair, de la base et de la hauteur.

[17] Les dernières lignes citent le « Grand Commentaire » (*Xici zhuan*) du *Classique du changement* (*Yijing*) ainsi que *Le gnomon des Zhou*.

1.2 *Le Gnomon des Zhou* : un seul algorithme et sa correction en ouverture

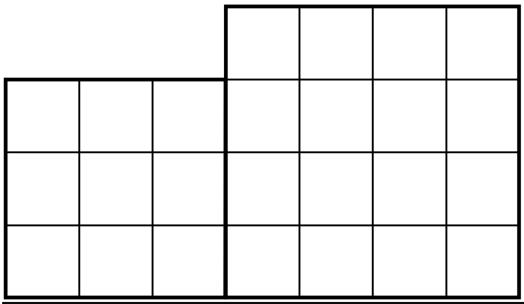


Figure 1 : Les carrés de la base et de la hauteur

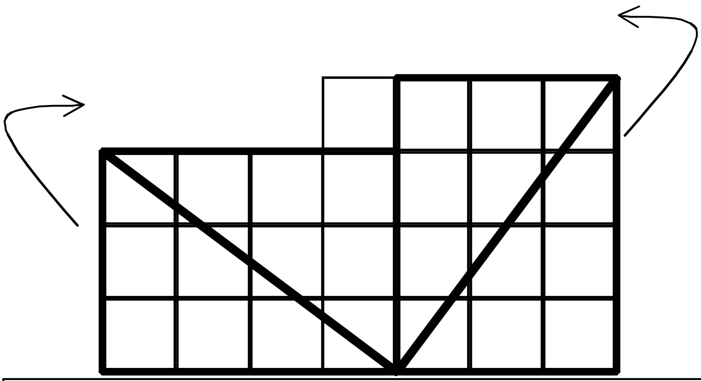


Figure 2 : On extrait de la surface constituée des formes…

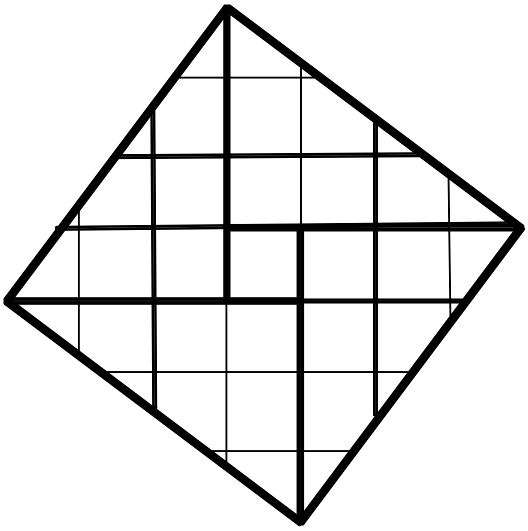


Figure 3 : …pour les replacer ailleurs et former le carré de l'hypoténuse

K. Chemla, “Geometrical figures and generality in ancient China and beyond. Liu Hui and Zhao Shuang, Plato and Thabit ibn Qurra”, *Science in context*, 18, 2005, p. 123-166.

1.3 *Les neuf chapitres* et Liu Hui

Le chapitre 9 présente exactement le même contenu, mais sous forme de problèmes et de procédures, ainsi que de commentaires —**NB :** capitales : le classique, bas-de-cape : commentaire

« **(9.1)**

SUPPOSONS QUE LA BASE (*GOU*) SOIT DE 3 *CHI* ET LA HAUTEUR (*GU*) DE 4 *CHI*. ON DEMANDE COMBIEN FAIT L'HYPOTENUSE.
REPONSE : 5 *CHI*.

(9.2)

SUPPOSONS QUE L'HYPOTENUSE SOIT DE 5 *CHI* ET LA BASE (*GOU*) DE 3 *CHI*. ON DEMANDE COMBIEN FAIT LA HAUTEUR (*GU*).
REPONSE : 4 *CHI*.

(9.3)

SUPPOSONS QUE LA HAUTEUR (*GU*) SOIT DE 4 *CHI* ET L'HYPOTENUSE DE 5 *CHI*. ON DEMANDE COMBIEN FAIT LA BASE (*GOU*).
REPONSE : 3 *CHI*.

BASE (*GOU*) ET DE LA HAUTEUR (*GU*) :
Le côté le plus court est appelé "base (*gou*)" ; le côté plus long est appelé "hauteur (*gu*)" ; ce qui lie les coins l'un à l'autre est appelé "hypoténuse"[18].

La base (*gou*) est plus courte que la hauteur (*gu*) qui lui correspond, la hauteur (*gu*) est plus courte que l'hypoténuse qui lui correspond. On s'apprête à les utiliser pour les appliquer à tous les *lü* (triangles ou procédures, ndt), c'est pourquoi on expose d'entrée de jeu cette procédure pour en faire apparaître l'origine.

PROCEDURE : BASE (*GOU*) ET HAUTEUR (*GU*) ETANT CHACUNE MULTIPLIEE PAR ELLE-MEME, ON SOMME (LES RESULTATS) ET ON DIVISE CECI PAR EXTRACTION DE LA RACINE CARREE, CE QUI DONNE L'HYPOTENUSE.

La base (*gou*) multipliée par elle-même fait un carré vermillon, la hauteur (*gu*) multipliée par elle-même un carré bleu-vert, et l'on fait en sorte que ce qui sort et ce qui entre se compensent l'un l'autre, que chacun se conforme à sa catégorie ; alors, sur la base du fait que l'on garde ceux (les parties, les morceaux) qui restent sans les bouger, on engendre par réunion l'aire (*mi*) du carré de côté l'hypoténuse[19]. "En divisant ceci par extraction de la racine carrée, cela donne l'hypoténuse". »

AUTREMENT, LA HAUTEUR (*GU*) ETANT MULTIPLIEE PAR ELLE-MEME, ON SOUSTRAIT CECI DE L'HYPOTENUSE MULTIPLIEE PAR ELLE-MEME. ON DIVISE CE QUI RESTE PAR EXTRACTION DE LA RACINE CARREE, CE QUI DONNE LA BASE (*GOU*). »

---

[18] Le terme de "côté" indique que Liu Hui pense à une forme, à une figure sur laquelle on les prélève. Ce peut être celle du triangle rectangle. La mention des coins permet d'interpréter autrement : le triangle rectangle apparaîtrait sur la figure du rectangle dont on trace la diagonale, ce qui serait en conformité avec l'introduction du *Gnomon des Zhou*.

[19] Liu Hui utilise les mêmes figures fondamentales. Les deux premières opérations de la procédure sont interprétées géométriquement comme constituant deux carrés coloriés. La transformation engendrant, sur cette base, le carré de l'hypoténuse se dégage de l'analyse qu'induit, sur les surfaces coloriées, le fait de les déposer sur la trame de la première figure fondamentale. Liu Hui renvoie à cette transformation par des énoncés qui font voir les principes généraux dont elle procède.

NB
Dans *Les Neuf chapitres*, les problèmes 9.1 à 9.12 ainsi que 9.24 (9.13 dans certaines éditions) ainsi que les procédures et les commentaires délivrent exactement les mêmes algorithmes que le commentaire de Zhao Shuang.

Liu Hui les démontre sur la base d'exactement les mêmes figures —aux couleurs près.

Conclusions

— Cela renforce l'idée qu'il s'agirait de « figures fondamentales », qu'elles seraient les mêmes et qu'elles étaient au 3e siècle un objet matériel.

— Deux manières complètement différentes de donner un ensemble d'algorithmes liés au triangle rectangle.

Argument développé dans K. Chemla, Présentation du chapitre 9, in K. Chemla & GUO Shuchun, *Les neuf chapitres. Le Classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*.

Une différence clef : l'aspect de théorie des nombres dans *Les Neuf chapitres*, avec les données des problèmes. On y reviendra. Pour l'instant, creusons la question des équations quadratiques et de leur lien, en Chine ancienne, à l'extraction de racine, d'une part, au triangle rectangle de l'autre.

2. Racine carrée et équation quadratique

2.1 L'algorithme d'extraction de racine

2.2 Zhao Shuang et le problème 9.19

Il y a clairement un lien entre le triangle rectangle et l'extraction de racine.

Dans le texte de Zhao Shuang, on voit le lien entre la figure du gnomon et l'équation quadratique. Toute équation quadratique décrit correspond à la figure d'un gnomon.

La description des termes de l'équation et la manière de la prescrire font référence à l'algorithme d'extraction de racine.
(Les équations n'ont pas de terme en x^2 à cette époque. Il sera « diagnostiqué » plus tard.)

D'où il apparaît clairement que la figure de l'équation provient de l'algorithme d'extraction et que sa résolution est un algorithme extrait de l'algorithme d'extraction de racine.
C'est par la figure du gnomon que le lien s'établit entre les deux champs.

La recherche de racine d'équation algébrique se développera comme dépendante de l'extraction de racine. Et les problèmes en relation avec lesquels les équations sont formulées resteront liés au triangle rectangle, même si le lien avec le gnomon se distendra avec l'extension du degré des équations au-delà du troisième.

(9.19) Le concept de *lü* dans le chapitre sur le triangle rectangle.

« SUPPOSONS QU'ON AIT UNE VILLE CARREE DONT ON NE CONNAIT PAS LA LONGUEUR DU COTE ET AU CENTRE DE CHAQUE COTE DE LAQUELLE S'OUVRE UNE PORTE. A 20 *BU* A L'EXTERIEUR DE LA PORTE NORD, IL Y A UN ARBRE, ET SI, APRES AVOIR FAIT 14 *BU* A L'EXTERIEUR DE LA PORTE SUD, ON TOURNE ET QU'ON MARCHE 1775 *BU* VERS L'OUEST, ON VOIT CET ARBRE. ON DEMANDE COMBIEN FAIT LE COTE DE LA VILLE CARREE.

REPONSE : 250 *BU*.

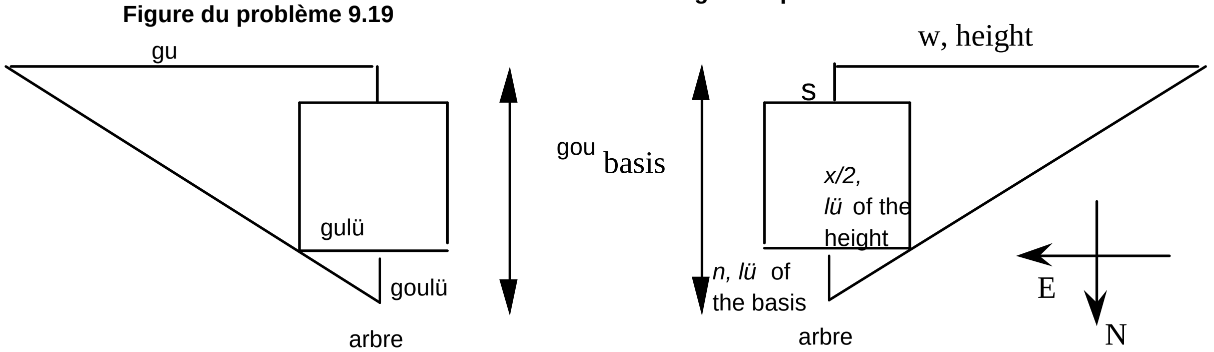
PROCEDURE : ON MULTIPLIE, PAR LA QUANTITE (*SHU*) DE *BU* A L'EXTERIEUR DE LA PORTE NORD, LA QUANTITE (*SHU*) DE *BU* MARCHES VERS L'OUEST, ET ON DOUBLE CECI, CE QUI FAIT LE DIVIDENDE.
Ici, on prend ce qui est marché vers l'Ouest après qu'on a tourné comme hauteur (*gu*), ce qui va de l'arbre jusqu'à 14 *bu* au Sud de la ville comme base (*gou*). On prend les 20 *bu* à l'extérieur de la porte Nord comme *lü* de la base (*gou*), et ce qui va de la porte Nord au coin Ouest comme *lü* de la hauteur (*gu*), ce qui donne la quantité (*shu*) moitié de la largeur. Par conséquent, si l'on multiplie, par ce qu'on a à l'extérieur de la porte Nord, la hauteur (*gu*) que fait la marche vers l'Ouest, après qu'on a tourné, cela fait l'aire (*mi*) correspondant à la multiplication du *lü* de la hauteur (*gu*) par la base (*gou*)[20]. Mais cette surface occupe la moitié à l'Ouest, par conséquent, si, en outre, on la double, on y adjoint l'Est, ce qui l'épuise tout entière[21].

---

[20] L'expression du texte tel que le donnent les sources anciennes est d'une concision remarquable. L'identification, dans la situation, de deux triangles rectangles semblables est exprimée par la distribution de noms composés des termes "base", "hauteur", et "*lü*" (voir la figure). Liu Hui transforme l'application de la règle de trois en égalité algorithmique d'aires : une multiplication est appliquée à deux quantités connues pour produire la valeur d'une aire dont la longueur comme la largeur sont inconnues (voir la figure 4).

Figure of problem IX.19

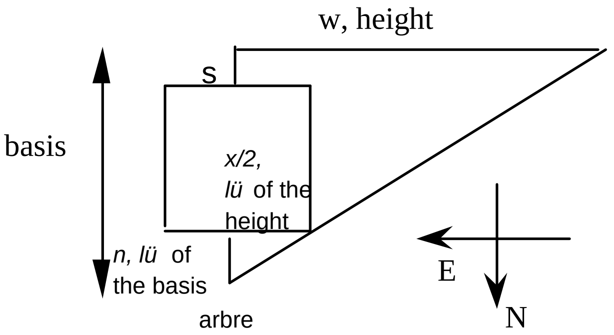
Figure du problème 9.19



[21] L'aire obtenue est lue comme correspondant à une partie d'une surface, laquelle est entièrement recouverte si, en doublant la première, on adjoint à l'étendue déjà couverte la partie symétrique grisée sur la figure 4. Comme le commentaire l'explicitera plus loin, le rectangle dont l'aire est ainsi calculée a l'inconnue comme largeur, et l'inconnue augmentée de deux parcours connus comme longueur. Il est ainsi structuré comme le gnomon que laisse la première étape d'une extraction de racine lorsque, du carré initial A, a été soustrait le carré correspondant au premier chiffre a. La poursuite de l'extraction de racine correspond alors à la résolution de l'équation $x^2 + 2ax = A— a^2$. La surface de la ville, ici, est identifiée au "coin" d'aire x^2 dans le gnomon —la terminologie évoque celle du commentaire de Lui Hui à la suite de l'algorithme d'extraction de racine carrée (4.16). Les étendues que laisse ce carré lorsqu'on l'ôte du rectangle correspondent aux autres composantes du gnomon, d'aire globale égale à $2ax$. **NB :** Auparavant, la figure du gnomon était lue comme équation quadratique. Ici, les surfaces sont transformées pour faire apparaître un gnomon qui est ensuite lu comme équation quadratique. La figure joue un rôle crucial pour l'interprétation des opérations et pour la circulation des algorithmes d'une situation à l'autre.

ON SOMME LES QUANTITES (*SHU*) DE *BU* A L'EXTERIEUR DE LA PORTE SUD ET DE LA PORTE NORD, CE QUI FAIT LE DIVISEUR REJOINT. ET ON DIVISE PAR EXTRACTION DE LA RACINE CARREE, CE QUI DONNE LE COTE DE LA VILLE CARREE.
L'aire (*mi*) de cette procédure, c'est l'aire (*mi*) qui, d'est en ouest, est comme le côté de la ville carrée, et, du nord au sud, va de l'arbre jusqu'au bout des 14 *bu* au sud de la ville. Chacune des [quantités] de *bu* au nord et au sud font une largeur, le côté de la ville carrée fait la longueur, c'est pourquoi on joint les deux largeurs pour constituer le diviseur rejoint, la somme [de leurs aires] est prise pour l'aire (*mi*) à l'extérieur du coin. »

Figure of problem IX.19



$$2nw = (s+n)x + x^2$$

Commentaire de Liu Hui

$$wn = (x+s+n).x/2$$

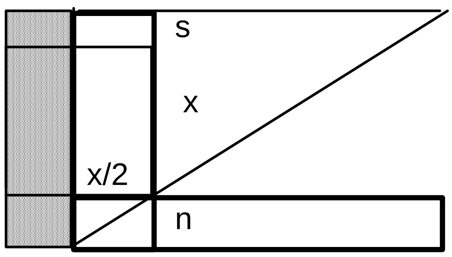
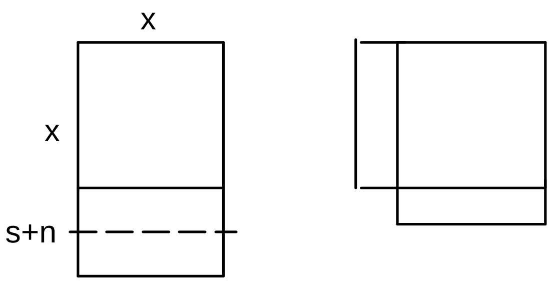


Figure 4



3. L'approche des valeurs numériques

3.1 Triplets des *Neuf chapitres*

Les données numériques que délivrent les énoncés des différents problèmes renvoient systématiquement à des longueurs et ne prennent que des valeurs entières.

Pourtant les côtés de ces triangles n'ont pas toujours, pour autant, tous des valeurs entières. Ce fait apparaît dès l'énoncé des résultats, puisque, par contraste avec les données, les solutions numériques peuvent être entières ou fractionnaires.

Ainsi,

les problèmes 9.1, 9.2, 9.3, 9.4, 9.5, 9.6, 9.8, 9.9, 9.11, 9.14, 9.15, 9.20, 9.24 impliquent des triangles dont les trois côtés sont entiers.

Dans les problèmes 9.7, 9.10, 9.12, 9.13, certains côtés du triangle sont rationnels.

Les triplets pythagoriciens utilisés sont les suivants :

— (3, 4, 5) dans les problèmes 9.1, 9.2, 9.3, et son double dans 9.24 ;
— (7, 24, 25) dans 9.4, et son quadruple dans 9.11 ;
— (20, 21, 29) dans le problème 9.5, et sa moitié ainsi que son 1/7 dans le problème 9.13 (**voir ci-dessous)** ;
— (5, 12, 13), dans les problèmes 9.6 et 9.14, son double dans le problème 9.9 ;
— $\frac{1}{6}(48, 55, 73)$ dans le problème 9.7 —les données que forment la base (8) ainsi que la différence entre l'hypoténuse et la hauteur (3) sont par conséquent entières.
— (20, 99, 101), qui intervient via son quintuple au problème 9.8 et via sa moitié au problème 9.10. Comme précédemment, les données des problèmes restent entières.
— $\frac{1}{20}(60, 91, 109)$ au problème 9.12. A nouveau, la base et la somme de la hauteur et de l'hypoténuse (les données du problème) sont entières.
— (8, 15, 17) dans le problème 9.15, et plusieurs de ses multiples apparaissent dans les données, les réponses et la procédure du problème 9.20 (**comparable à 9.13, voir ci-dessous)**.

Jamais, cependant, les résultats ne sont des irrationnels quadratiques, alors que les procédures regroupées sous le nom de « Base (*gou*) et hauteur (*gu*) » se concluent par une extraction de racine carrée et que l'algorithme des *neuf chapitres* pour cette opération prescrit de donner le résultat sous la forme $\sqrt{N}$, lorsque c'est nécessaire.

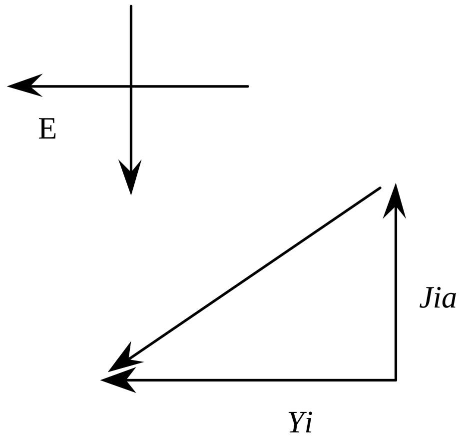
De plus, nous pouvons remarquer que, dans tous les problèmes pour lesquels les données entières renvoient aux bases et hauteurs de triangles dont on n'exhibe pas l'hypoténuse, cette dernière a une valeur irrationnelle[22].

Ces indices convergent avec les remarques précédentes pour donner à penser que les données sélectionnées pour les divers problèmes ont fait l'objet d'une élaboration attentive et que le choix des valeurs numériques résulte d'un travail de théorie des nombres.

[22] Il s'agit des problèmes 9.16, 9.17, 9.18, 9.19, 9.21, 9.23.

3.2 9.13 —La représentation numérique des triplets pythagoriciens

(9.13) Un second type d'usage du concept de *lü* dans le chapitre sur le triangle rectangle.
« Supposons que deux personnes soient debout au meme endroit. Si le *lü* de ce que marche *Jia*[23] vaut 7, le *lü* de ce que marche *Yi* vaut 3. *Yi* marche vers l'Est. *Jia* marche 10 *bu* vers le Sud, puis oblique vers le Nord-est et rejoint *Yi*. On demande combien marchent respectivement *Jia* et *Yi*.



Reponse :
Yi marche vers l'Est 10 *bu* et demi ;
Jia marche en oblique 14 *bu* et demi et le rejoint.

Procedure : on effectue la multiplication de 7 par lui-meme, et aussi la multiplication de 3 par lui-meme, on somme et on prend la moitie de ceci, ce qui est pris comme *lü* de ce que *Jia* marche en oblique[24]. Le *lü* de la marche en oblique etant soustrait de la multiplication de 7 par lui-meme, le reste fait le *lü* de ce qui est marche vers le Sud. On multiplie 3 par 7, ce qui fait le *lü* de ce que *Yi* marche vers l'Est.
Ici, on prend ce qui est marché vers le Sud comme base (*gou*), ce qui est marché vers l'Est comme hauteur (*gu*) et ce qui est marché en oblique comme hypoténuse. Le *lü* de la somme de la base (*gou*) et de l'hypoténuse est 7. Si on veut en déduire [les autres valeurs], il faut multiplier le *lü* de la hauteur (*gu*) par lui-même pour le prendre comme aire (*mi*), et diviser par la somme[25]. Ce

[23] Les directions cardinales permettent de conférer à la figure tracée par les parcours la forme d'un triangle rectangle. Les données précisent le rapport entre les distances décrites par les deux individus, en procurant deux entiers (*lü*) de même rapport. Elles introduisent donc un triangle rectangle en nombres semblable à celui sur lequel on demande de déterminer b et $c + a$ et dont une dimension est également fournie.

[24] L'énoncé donnait deux entiers, deux *lü*, b_0 et $c_0 + a_0$, dont le rapport reproduisait celui qu'entretiennent b et $c + a$. La procédure débute par la construction d'un autre ensemble de valeurs dont les rapports reproduisent les relations entre elles de toutes les grandeurs prises en considération dans l'énoncé. Ce second microcosme (dont je marquerai les dimensions par 1 en indice inférieur) est une dilatation du premier par un facteur $c_0 + a_0$: ainsi $c_1 + a_1 = (c_0 + a_0)^2$, $b_1 = (c_0 + a_0).b_0$, et $\dfrac{(c_0 + a_0)^2 + b_0^2}{2} = c_0.(c_0 + a_0)$ y représente l'hypoténuse. Par suite, l'aire $(c_0 + a_0)^2$ tient lieu, dans ce microcosme, de la longueur $c + a$. La procédure s'appuie ensuite sur cet ensemble de valeurs et sur une des dimensions réelles pour déduire les autres dimensions réelles par règle de trois. Le commentaire dégage ces différents niveaux formels.

[25] En procédant, comme cela serait naturel dans un premier temps, à l'aide des *lü* b_0 et $c_0 + a_0$, il peut apparaître —il apparaît dans le cadre de l'exemple numérique des *Neuf chapitres*— des fractions de dénominateur $c_0 + a_0$; c'est la

qu'on obtient alors fait le *lü* de la différence entre la base (*gou*) et l'hypoténuse. Si on y ajoute la somme, la moitié de ceci fait le *lü* de l'hypoténuse ; si l'on soustrait [de ceci] le *lü* de la différence, le reste fait le *lü* de la base (*gou*)[26].

Si l'on suit cette (procédure), il peut y avoir des parts ; il faut donc les faire communiquer et simplifier, et (les *lü*) sont alors déterminés [27].

La procédure peut faire en sorte qu'il n'y ait pas de dénominateur **—attention, problème d'édition—**, c'est pourquoi elle effectue la multiplication par elle-même de la somme de la base (*gou*) et de l'hypoténuse pour faire le carré qui unit l'un à l'autre le vermillon et le jaune. Le gnomon d'aire bleu-vert que fait la multiplication de la hauteur (*gu*) par elle-même a la somme de la base (*gou*) et de l'hypoténuse comme longueur, et leur différence comme largeur. Supposons qu'on l'étire pour en faire un rectangle, et qu'on ajoute ce qui est diminué (à savoir : ce qui correspond à l'hypoténuse diminué de la base) comme plus haut. Par suite, le corps principal de la figure a 2 hypoténuses comme longueur, la somme de la base (*gou*) et de l'hypoténuse comme largeur. On tire une horizontale et on la (la figure) coupe à la moitié, ce qui fait le *lü* de l'hypoténuse. La raison pour laquelle le *lü* donné pour être utilisé en commun, 7, est multiplié par lui-même, c'est pour faire le *lü* de la somme de la base (*gou*) et de l'hypoténuse ; par conséquent si l'hypoténuse est soustraite de ceci, le reste donne le *lü* de la base (*gou*)[28].

(...) Dans tous les cas la somme de la base (*gou*) et de l'hypoténuse constitue les *lü*, c'est pourquoi il faut aussi faire que le *lü* de la base (*gou*) —ou **problème d'édition du texte** : le *lü* de la hauteur— partage cette longueur[29].

ON PLACE CE QUI EST MARCHE VERS LE SUD, 10 *BU*, ET ON LE MULTIPLIE PAR LE *LÜ* DE CE QUE *JIA* MARCHE EN OBLIQUE. ON PLACE EN AUXILIAIRE 10 *BU*, ET ON LE MULTIPLIE PAR LE *LÜ* DE CE QUE *YI* MARCHE VERS L'EST. CHACUN FAIT RESPECTIVEMENT UN DIVIDENDE. SI L'ON EFFECTUE LES DIVISIONS DES DIVIDENDES PAR LE *LÜ* DE CE QUI EST MARCHE VERS LE SUD, L'ON OBTIENT RESPECTIVEMENT LES QUANTITES (*SHU*) MARCHEES.

Ce qui est marché vers le Sud, 10 *bu*, c'est la base (*gou*) réelle et que l'on a, et l'on cherche l'hypoténuse et la hauteur (*gu*) réelles[30] ; c'est pourquoi on multiplie par les *lü* de l'hypoténuse et de la hauteur (*gu*), et l'on divise par le *lü* de la base (*gou*). »

---

raison à laquelle le commentateur attribue le fait que le Classique en vienne à travailler avec les *lü* b_1, $c_1 + a_1$, etc. Sa démonstration propose un premier algorithme/raisonnement, et montre comment et pourquoi la procédure du Classique en provient par déformation.

[26] Si le texte original était conforme à la restitution que nous en proposons ici, le commentaire proposerait un algorithme qui s'écarte de la procédure du Classique : il calculerait a_0 en soustrayant, de c_0, c_0 —a_0, alors que le Classique calcule a_1 en soustrayant c_1 de $c_1 + a_1$ (je ne rentre pas ici dans la discussion de ces détails). Voir l'ouvrage.

[27] Il s'agit de donner des *lü*, qui représentent l'ensemble des relations entre les éléments de la situation, des valeurs entières, qui soient par ailleurs les plus petites valeurs entières possibles.

[28] Les quantités que calcule la procédure sont donc interprétées comme les aires de rectangles, qui tiennent lieu de *lü* de longueurs.

[29] Sur le texte ici, voir les notes dans l'ouvrage.

[30] *suo you shu* "quantité de ce que l'on a", *suo qiu shu* "quantité de ce que l'on cherche" sont les termes techniques de la règle de trois, telle que décrite dans *Les neuf chapitres*.

Commentaires

On peut lire, dans le mode de résolution du problème 9.13, la coordination de deux idées.

1. Pour une part, des *lü* b_0 et $c_0 + a_0$ —entiers premiers entre eux, ici impairs en fait— tenant lieu de $c+a$ et b constituent les dimensions d'un triangle semblable en nombres à celui cherché. Si l'on détermine, en s'appuyant sur ces valeurs, l'ensemble des quantités attachées à ce triangle, de simples règles de trois traduisent la donnée de la base a du triangle qui fait l'objet du problème en les données correspondantes cherchées.

2. Pour une autre part, établir les dimensions du triangle correspondant à b_0 et $c_0 + a_0$, c'est s'exposer à rencontrer des valeurs fractionnaires. La démarche est inutilement lourde, pour qui vise simplement à exhiber les dimensions d'un triangle semblable en nombres au triangle cherché. Il suffit de dilater l'ensemble de la situation par 7 —en fait, comme le montre le commentateur, $c_0 + a_0$—pour qu'en l'occurrence, toutes les dimensions calculées deviennent entières.

La procédure de résolution peut donc s'appuyer sur les relations qui unissent a_0, b_0 et c_0, en tant que côtés d'un triangle rectangle, pour déterminer les dimensions a_1, b_1 et c_1 du triangle semblable en nombres cherché :

$$\frac{(c_0 + a_0)^2 + b_0^2}{2} = c_0.(c_0 + a_0) = c_1$$
$$(c_0 + a_0)^2 - c_0.(c_0 + a_0) = a_0.(c_0 + a_0) = a_1$$
$$(c_0 + a_0).b_0 = b_1$$

La lecture du commentateur Liu Hui est légèrement différente, et elle nous met sur la piste de la nature du travail de théorie des nombres sous-jacent à ce chapitre 9. Suivons-le dans son commentaire du problème 9.13, pour observer la manière dont il rend compte de la procédure prescrite par *Les neuf chapitres*[31].

L'énoncé, rappelons-le, donne des valeurs entières premières entre elles (de fait impaires) 7 ($c_0 + a_0$) et 3 (b_0), exprimant, pour le triangle dont les dimensions sont cherchées, le rapport entre la somme de l'hypoténuse et de la base, d'une part, la hauteur, de l'autre. Dans un premier temps, en s'appuyant sur les données $c_0 + a_0$ et b_0, le commentateur détermine les autres grandeurs du triangle correspondant :

$$\frac{b_0^2}{c_0 + a_0} = c_0 - a_0$$

et, par conséquent,

[31] C'est l'historien des mathématiques Li Jimin qui a ouvert au début des années 1980 la voie à une exploitation du problème 9.13 permettant de dégager le travail de théorie des nombres lié au triangle rectangle dans *Les neuf chapitres*.

$$\left[\frac{b_0^2}{c_0+a_0}+(c_0+a_0)\right].\frac{1}{2}=c_0$$
$$\left[\frac{b_0^2}{c_0+a_0}+(c_0+a_0)\right].\frac{1}{2}-\frac{b_0^2}{c_0+a_0}=a_0$$

Ce faisant, il met simplement en œuvre des algorithmes généraux dont il a examiné la correction antérieurement, afin de déterminer un triangle semblable en nombres auquel appliquer la règle de trois. **C'est à ce point que Liu Hui se tourne vers la relation qu'entretient cette première procédure avec celle proposée par le Classique**.

Explicitons le mouvement de son raisonnement. Il avance tout d'abord une motivation qui a pu conduire, selon lui, les auteurs du Classique à opter pour une autre procédure : « Si l'on suit cette (procédure), il *peut* y avoir des parts » (je souligne). *La formulation en révèle un point clef* : *aux yeux de Liu Hui, l'algorithme a, ici aussi, été conçu comme devant valoir pour toutes les valeurs* des *lü*, et non pas seulement pour les données de 3 et 7 de l'énoncé particulier. Il est donc loisible de lire avec le commentateur la **procédure** comme **générale**.

Puis, Liu Hui évoque, en termes de calculs sur les nombres, les opérations à appliquer pour déterminer des valeurs de *lü* cette fois entières pour toutes les grandeurs associées au triangle en question. Considérée de façon générale, l'opération de « mise en communication » conduirait à l'élimination du dénominateur $2(c_0+a_0)$ et produirait donc les valeurs suivantes :

$$\left[b_0^2+(c_0+a_0)^2\right]=c_0^{'} \text{ et } a_0^{'}=c_0^{'}-2b_0^2$$

Ces deux grandeurs peuvent s'interpréter comme valant l'une $2c_0(c_0+a_0)$ et l'autre $2a_0(c_0+a_0)$. C'est pourquoi c'est par simplification —la seconde opération indiquée par l'exégète— que l'on obtiendrait les valeurs dont *Les neuf chapitres* prescrivent le calcul

$$\frac{(c_0+a_0)^2+b_0^2}{2}=c_0(c_0+a_0)=c_1$$
$$(c_0+a_0)^2 — c_0.(c_0+a_0)=a_0.(c_0+a_0)=a_1$$
$$(c_0+a_0).b_0=b_1$$

Cette seconde opération produit des valeurs entières premières entre elles si et seulement si b_0 et c_0+a_0 sont tous deux impairs. La forme de l'algorithme pointe peut-être vers cette condition. Plus ci-dessous à ce sujet…

Cependant, après avoir indiqué la possible motivation et les calculs qu'elle engendrerait, Liu Hui ne détaille pas cette restitution de la procédure axée sur les valeurs numériques, mais il reprend directement la description des *Neuf chapitres* pour développer une interprétation géométrique des opérations aussi bien que des quantités produites, qui en donne le sens. L'objectif étant de « faire en sorte qu'il n'y ait pas de dénominateur », la seconde figure fondamentale est mise en œuvre, à nouveaux frais[32], pour représenter b_0^2 sous la forme d'un rectangle de longueur a_0+c_0 et de largeur c_0-a_0. Accolé au carré de côté a_0+c_0, il constitue un rectangle de longueur 2 c_0, dont la moitié a pour aire c_1.

[32] C'est la transformabilité de b^2 en $(c+a)(c-a)$ qui jouera ici un rôle clef dans les représentations des dimensions par les *lü*.

Le triplet de nombres a_1, b_1, c_1 (entiers si les données sont impaires, et comportant des demis sinon) **ressort, de cette lecture, doté d'une représentation géométrique** : chacune de ses valeurs correspond à l'aire d'un rectangle, de largeur, respectivement a_0, b_0, c_0, et de longueur systématiquement égale à a_0+c_0. La largeur donne l'identité du *lü*, l'aire sa valeur dans le triplet en nombres entiers —ou avec demis— correspondant[33]. Et, puisque, nous l'avons vu, nous pouvons lire la procédure comme générale, nous pouvons faire varier la valeur des données et produire de la sorte une grande variété de tels triplets.

En fait, tout triplet pythagoricien en nombres entiers s'obtient ainsi. Prenons le triplet (a, b, c) d'éléments premiers entre eux, et supposons que a et c sont de parité différente. On sait qu'il existe deux entiers impairs, premiers entre eux, p et q, tels que :

$$a=\frac{p^2-q^2}{2},\ b=pq,\ c=\frac{p^2+q^2}{2} \qquad (9.1)$$

Par conséquent,

$$\frac{c+a}{b}=\frac{p}{q}$$

Si l'on considère p et q comme les quantités correspondantes prélevées sur un triangle semblable de dimensions rationnelles (a_0, b_0, c_0), les formules (9.1) se transforment en les formules équivalentes à ce que décrivent *Les neuf chapitres*:

$$a=\frac{(c_0+a_0)^2-b_0^2}{2}=(c_0+a_0)^2-\frac{(c_0+a_0)^2+b_0^2}{2},\ b=(c_0+a_0).b_0,\ c=\frac{(c_0+a_0)^2+b_0^2}{2} \qquad (9.2)$$

Si ce sont en revanche b et c qui sont de parité différente, c'est le rapport entre $c+b$ et a qui donne p et q respectivement.

La donnée, pour ces *lü*, de valeurs impaires premières entre elles quelconques permet donc de produire tout triplet pythagoricien composé de nombres premiers entre eux. Par voie de conséquence, on constate que la sous-procédure dans la résolution du problèmes 9.13 donne un mode d'engendrement des triplets pythagoriciens qui a la particularité d'offrir une interprétation géométrique de leur structure. Toute valeur se lit alors bien comme l'aire d'un rectangle, conformément à la description qu'en donne Liu Hui. C'est en ce sens qu'à suivre le commentateur, les quantités impliquées ne sont pas, contrairement à notre première lecture, à considérer comme de purs nombres, mais apparaissent chargées de significations géométriques.

Plusieurs remarques s'imposent ici. Tout d'abord, nous aurions pu opter pour une autre combinaison et déduire de (9.1) que

$$\frac{c-a}{b}=\frac{q}{p}$$

En reprenant des notations comparables, nous aurions obtenu les valeurs de notre triplet pythagoricien comme suit :

$$a=\frac{-(c_0-a_0)^2+b_0^2}{2},\ b=(c_0-a_0).b_0,\ c=\frac{(c_0-a_0)^2+b_0^2}{2} \qquad (9.3)$$

Les formules analogues s'obtiennent par échange de a et de b, dans le second cas. Ces dernières évoquent la procédure de résolution du problème 9.6, où l'interprétation géométrique développée par Liu Hui entre en résonance avec ce que nous venons d'analyser. Les données de 9.6 sont de 5 pour a et 1 pour c-b. En ce cas, il y a coïncidence des deux triangles et le couple de

[33] Les valeurs des largeurs qui ne sont pas entières ont forcément pour dénominateur (c_0+ a_0) —ou 2(c_0+ a_0), si les données ne sont pas toutes deux impaires.

données engendre le triplet (5, 12, 13). L'analyse développée par Liu Hui pour le problème 9.13 commence à refluer vers un examen des données numériques de la première partie du chapitre 9, dont elle éclaire la structure. Le phénomène ira s'amplifiant.

Seconde remarque, toujours dans ce cas où c et a sont de parité différente, on a également :

$$\frac{c+b}{a}=\frac{\frac{p+q}{2}}{\frac{p-q}{2}}, \text{ et } \frac{c-b}{a}=\frac{\frac{p-q}{2}}{\frac{p+q}{2}}$$

où $\frac{p+q}{2}$ et $\frac{p-q}{2}$ sont deux nombres entiers, premiers entre eux et de parité différente[34]. En les considérant à leur tour comme correspondant à un triangle et en les notant respectivement c_0+b_0 et a_0 (resp. a_0 et c_0-b_0), on obtient en ce cas la représentation suivante :

$$\begin{aligned} b &= (c_0+b_0)^2-a_0^2 = 2(c_0+b_0)b_0, \\ c &= a_0^2+(c_0+b_0)^2 = 2(c_0+b_0)c_0, \\ a &= 2(c_0+b_0).a_0, \end{aligned} \qquad (9.4)$$

ou

$$\begin{aligned} b &= a_0^2-(c_0-b_0)^2 = 2(c_0-b_0)b_0, \\ c &= a_0^2+(c_0-b_0)^2 = 2(c_0-b_0)c_0, \\ a &= 2(c_0-b_0).a_0, \end{aligned} \qquad (9.5)$$

Les problèmes 9.7 et 9.10 portent sur des couples (a_0, c_0-b_0) valant respectivement (8, 3) et (10, 1). Les triangles de nombres rationnels qu'ils engendrent correspondent aux longueurs de rectangles d'aires entières, données par les formules (9.5) et valant respectivement (48, 55, 73) et (20, 99, 101). Le problème 9.12, quant à lui, a pour données un couple de valeurs (a_0, c_0+b_0) égal à (3, 10). Il correspond au triangle $(a_0, b_0, c_0)=\frac{1}{20}(60, 91, 109)$, dont l'analyse précédente éclaire la structure, le triplet (60, 91, 109) étant produit par les formules (9.4).

Les données, premières entre elles, constituent en général les seules valeurs entières des triangles auxquelles elles correspondent et engendrent les triplets pythagoriciens en nombres entiers sous-jacents. Notons cependant, parmi les énoncés correspondant à des triplets rationnels, la présence de deux problèmes impliquant des triangles dont les côtés n'ont pas des longueurs premières entre elles. L'un (problème 9.9) délivre les données ($2a_0$, c_0-b_0) égales à (10, 1), et vise le triangle double du triangle (5, 12, 13) déjà rencontré. L'autre (problème 9.8) donne pour (a_0, c_0-b_0) le couple de valeurs (100, 10), correspondant au quintuple du triplet (20, 99, 101), qu'on retrouve sous un autre angle au problème 9.10.

Au total, des huit triplets pythagoriciens rationnels présents dans le chapitre 9, six d'entre eux se présentent dans des problèmes où leurs éléments générateurs, au sens des nombres entiers qui les engendrent selon les schémas détaillés ci-dessus, constituent les données. Cette grille d'analyse, développée en nous appuyant sur les commentaires, paraît donc éclairer de façon pertinente les données numériques des divers problèmes des *Neuf chapitres*.

[34] Leur somme fait p, leur différence q

En lieu et place d'un schéma unique engendrant les triplets sur la base de deux entiers impairs *p* et *q* premiers entre eux, on trouverait donc, imprégnant ce chapitre 9, divers modes de génération basés sur les valeurs, considérées comme *lü* et, partant, rendues entières et simplifiées, que sont d'une part, c-a, $c+a$, c-b ou $c+b$, et, respectivement, d'autre part, b ou a. Cette pratique met en évidence un fait : si, en assignant des valeurs entières à deux des côtés d'un triangle rectangle, on ne peut garantir que le troisième ait une longueur rationnelle, en revanche, il suffit que ces couples autres —impliquant un côté et la somme ou la différence des deux autres— soient constitués d'entiers pour que l'ensemble des dimensions des triangles correspondants soient rationnelles.

En conclusion, dans la seconde partie du chapitre 9 que caractérise l'empreinte de la règle de trois, nous retiendrons que le concept de *lü* y intervient de deux manières.

D'une part, il qualifie des éléments qui entreront dans la « Procédure du “supposons” », laquelle donne son expression à la similitude entre triangles (cas du problème 9.19).

D'autre part, il y joue un rôle clef en tant que concept numérique, désignant des valeurs susceptibles d'être « mises en communication » et « simplifiées ». Par ce dernier biais, un lien se trouve établi entre les deux parties du chapitre 9, dans la mesure où les valeurs numériques rationnelles de l'ensemble du chapitre sont éclairées par l'analyse qui se greffe sur les problèmes 9.13 et 9.20.

Cet ordre de préoccupations paraît absent du *Gnomon des Zhou* et du commentaire de Zhao Shuang. **En corrélation avec le fait que les connaissances sur le triangle rectangle sont présentées sous la forme de problèmes et de procédures** dans *Les neuf chapitres*, **chaque problème** de l'ensemble 9.1 à 9.13, 9.20, 9.24 **paraît devoir être lu de deux façons : de façon algébrique et de façon arithmétique**.

NB : on trouve chez Brahmagupta (VII^{e} siècle) des modes comparables d'engendrement des triplets pythagoriciens. Cette remarque vient enrichir un ensemble déjà fourni de points communs entre ceux des résultats mathématiques de la Chine et de l'Inde anciennes qui adhèrent à la sphère de l'astronomie. Il se confirme donc qu'il y a là un dossier, encore trop peu exploité, pour des travaux comparatifs à venir.